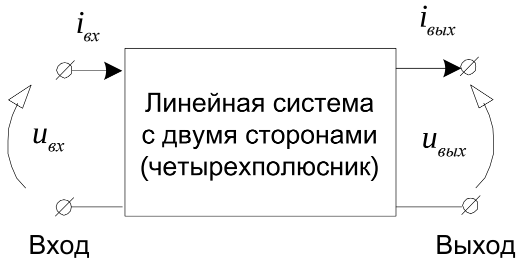
"ТЭЦ'2017"

X олимпиада по теории электронных цепей,

посвященная памяти

проф. Сигорского Виталия Петровича

Задача 1.



При подключении на *выход* системы идеального источника тока входное сопротивление системы равно 4 Ом. При подключении того же источника на *вход* системы, ее выходное сопротивление равно 5 Ом. При подключении на *выход* системы идеального источника напряжения получим входное сопротивление 1 Ом. Каким будет входное сопротивление системы, если на ее выход подключить нагрузку 5 Ом?

<u>Решение:</u>

Электрические свойства линейной системы с двумя сторонами характеризуются парой линейных уравнений, связывающих токи и напряжения на сторонах системы. Входящие в уравнения коэффицинты называются параметрами системы, количество которых равно четырем. Например, уравнения системы в z - параметрах имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} u_{вх} &= z_{11} i_{вх} + z_{12} i_{вых}; \\ u_{вых} &= z_{21} i_{вх} + z_{22} i_{вых}. \end{aligned} \qquad (1)$$

Входное сопротивление системы по определению равно отношению входного напряжения к входному току. Для экспериментального определения входного сопротивления источник воздействия подключается на вход системы, а нагрузка – на выход, как показано на Рис. 1(а). Входное сопротивление можно выразить через параметры системы и сопротивление нагрузки, используя уравнения (1) и уравнение нагрузки, записанное по закону Ома:

$$u_{вых} = r_н i_{вых}. \qquad (2)$$

Подставив (2) во второе уравнение (1), выразив $i_{вых}$ через $i_{вх}$ и подставив его в первое уравнение (1), получим:

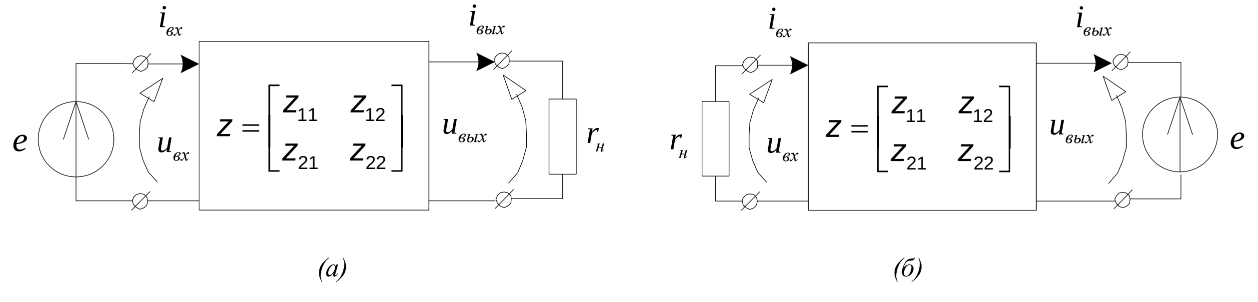


Рис. 1. (а) система с двумя сторонами с заданными z-параметрами и сопротивлением нагрузки на выходе; (б) система с двумя сторонами с заданными z-параметрами и сопротивлением нагрузки на входе .

$$r_н i_{вых} = z_{21} i_{вх} + z_{22} i_{вых}; \rightarrow u_{вх} = z_{11} i_{вх} + z_{12} \frac{z_{21}}{r_н - z_{22}} i_{вх} = \frac{r_н z_{11} - |z|}{r_н - z_{22}} i_{вх}; \quad \rightarrow \tag{3}$$

$$R_{вх} = \frac{u_{вх}}{i_{вх}} = \frac{r_н z_{11} - |z|}{r_н - z_{22}},$$

где $|z|$ - определитель матрицы z - параметров системы.

Понятие «сопротивление» используется для характеристики электрических свойств пассивного двухполюсника. Поэтому при плодключении идеального источника тока на выход системы и определении ее входного сопротивления, источник тока необходимо подавить, заменив его сопротивлением. Сопротивление идеального источника тока равно бесконечности, тогда из (3) и условия задачи следует:

$$R_{вх}\Big|_{r_н = \infty} = R_{вх}^{х.х.} = \frac{r_н z_{11} - |z|}{r_н - z_{22}}\Bigg|_{r_н = \infty} = z_{11} = 4\ Ом. \tag{4}$$

Если на выход системы подключен идеальный источник напряжения, то ее входное сопротивление рассчитывается при $r_н = 0$, так как сопротивление подавленного идеального источника напряжения равно нулю. Тогда из (3) и условия задачи следует:

$$R_{вх}\Big|_{r_н = 0} = R_{вх}^{к.з.} = \frac{r_н z_{11} - |z|}{r_н - z_{22}}\Bigg|_{r_н = 0} = \frac{|z|}{z_{22}} = 1\ Ом. \tag{5}$$

Для экспериментального определения *выходного* сопротивления системы источник воздействия требуется подключить на выход системы, как показано на Рис. 1(б). В этом случае выходное сопротивление системы связано с током и напряжением на выходе следующим соотношением:

$$R_{вых} = -\frac{u_{вых}}{i_{вых}}, \tag{6}$$

где знак «-» появляется для согласования направлений тока и напряжения, необходимое при определении сопротивления двухполюсника (выходное сопротивление системы – это сопротивление двухполюсника со стороны выхода).

Выходное сопротивление можно выразить через параметры системы, используя уравнения (1) и уравнение нагрузки, подключенной на вход системы:

$$u_{вх} = -r_н i_{вх}, \tag{7}$$

где знак «-» появляется по той же причине, что и в (6). Подставив (7) в первое уравнение (1), выразив $i_{вх}$ через $i_{вых}$ и подставив его во второе уравнение (1), получим:

$$-r_н i_{вх} = z_{11} i_{вх} + z_{12} i_{вых}; \rightarrow u_{вых} = z_{21} \frac{z_{12}}{-r_н - z_{11}} i_{вых} + z_{22} i_{вых} = \frac{-r_н z_{22} - |z|}{-r_н - z_{11}} i_{вых}; \rightarrow$$

$$R_{вых} = -\frac{u_{вых}}{i_{вых}} = \frac{-r_н z_{22} - |z|}{r_н + z_{11}}. \tag{8}$$

Тогда выходное сопротивление системы при подключенном на вход идеальном источнике тока определяется по (8) при $r_н = \infty$, так как сопротивление подавленного идеального источника тока равно бесконечности. С учетом условия задачи получим:

$$R_{вых}\Big|_{r_н = \infty} = R_{вых}^{х.х.} = \frac{-r_н z_{22} - |z|}{r_н + z_{11}}\Bigg|_{r_н = \infty} = -z_{22} = 5\ Ом. \tag{9}$$

Подставив z_{22} в (5), находим определитель матрицы z - параметров:

$$|z| = -R_{вх}^{к.з.} R_{вых}^{х.х.} = -5\ Ом^2. \tag{10}$$

Из (3) находим искомое входное сопротивление:

$$R_{вх} = \left.\frac{r_н z_{11} - |z|}{r_н - z_{22}}\right|_{r_н=5} = \frac{5\cdot 4+5}{5+5} = 2{,}5 \ \ Ом \ . \qquad (11)$$

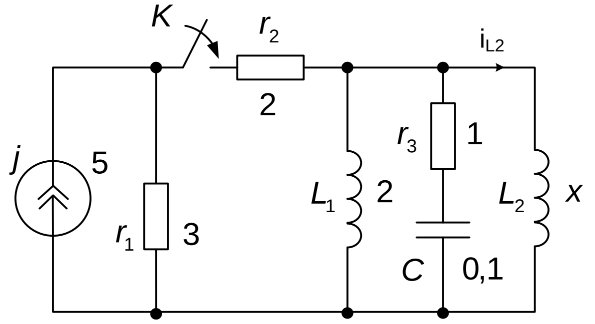
Следует отметить, что из (8) и (4) следует:

$$R_{вых}\Big|_{r_н=0} = R_{вых}^{к.з.} = \left.\frac{-r_н z_{22} - |z|}{r_н + z_{11}}\right|_{r_н=0} = \frac{-|z|}{z_{11}} = \frac{-|z|}{R_{вх}^{х.х.}}, \qquad (12)$$

что с учетом (10) позволяет получить следующее соотношение:

$$|z| = \det[z] = -R_{вх}^{х.х.} R_{вых}^{к.з.} = -R_{вых}^{х.х.} R_{вх}^{к.з.} \ . \qquad (13)$$

Соотношения (3) и (8) можно взять из учебников по теории электронных цепей и использовать для ускорения решения данной задачи.



Задача 2.

Ключ К замыкает цепь при нулевых начальных условиях. Определить индуктивность L_2, если после окончания переходных процессов через нее будет протекать ток 2 А.

Решение:

После окончания переходных процессов наступит установившееся состояние: все токи и напряжения в схеме примут постоянные значения, так как сигнал источника тока постоянный. Согласно компонентному уравнению емкости, ток через емкость будет равен нулю при постоянном напряжении:

$$i = C\frac{du}{dt}\bigg|_{u=const} = 0,$$

следовательно, сопротивление емкости, равное отношениею напряжения и тока, будет равно бесконечности, и ее можно заменить разомкнутой дугой. Аналогично, согласно компонентному уравнению индуктивности, напряжение на интуктивности будет равно нулю при постоянном токе:

$$u = L\frac{di}{dt}\bigg|_{i=const} = 0, \tag{14}$$

тогда сопротивление индуктивности будет равно нулю, и ее можно заменить короткозамкнутой дугой. В результате исходная схема приводится к резистивному виду, как показано на Рис. 2.

Сопротивления схемы соединены параллельно, образуя вместе с источником делитель тока, тогда ток i_{R2} можно рассчитать по правилу чужого плеча:

$$i_{R2} = \frac{r_1}{r_1 + r_2} j = \frac{3}{3+2} 5 = 3A.$$

По первому закону Кирхгофа находим ток i_{L1}:

$$i_{L1} = i_{R2} - i_{L2} = 3 - 2 = 1\ A.$$

Инуктивности включены параллельно, следовательно, в любой момент времени напряжения на них одинаковы. Тогда из компонентного уравнения индуктивности (14) получим:

$$L_1\frac{di_{L1}}{dt} = L_2\frac{di_{L2}}{dt};\ \rightarrow\ \int_0^t L_1\frac{di_{L1}}{dt}dt = \int_0^t L_2\frac{di_{L2}}{dt}dt;\ \rightarrow\ L_1 i_{L1} = L_2 i_{L2}, \tag{15}$$

где произведение $L_k i_{Lk},\ k = 1,2$ равно потокосцеплению самоиндукции соответствующей индуктивности. Из равенства потокосцеплений (15) находим искомую индуктивность L_2:

$$L_2 = L_1\frac{i_{L1}}{i_{L2}} = 2\frac{1}{2} = 1\,Гн.$$

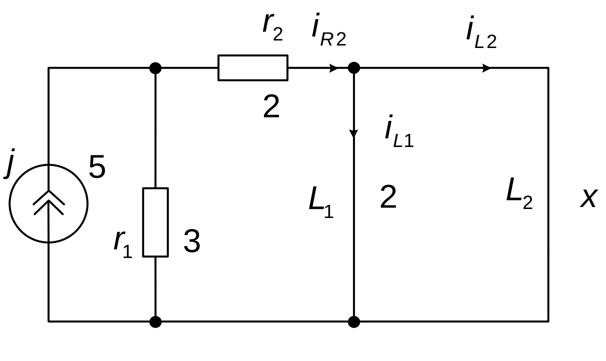
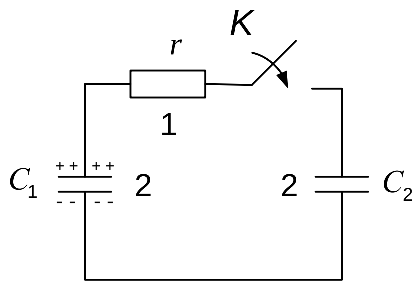


Рис. 2. Исходная схема в установившемся состоянии (после окончания переходных процессов).



Задача 3.

В момент замыкания ключа К, который считаем началом отсчета времени t=0 , напряжение U_{C1} на емкости C_1 равнялось 1 В, а емкость C_2 не была заряжена. В момент времени $t=\tau$, где τ – постоянная времени схемы, емкость C_2 мгновенно уменьшилась в 20 раз под действием сил неэлектрической природы. Определить начальный запас электрической энергии в схеме и количество энергии, затраченной на нагревание, начиная с t=0 и до окончания переходных процессов.

Решение:

Начальный запас энергии в электрическом поле заряженной емкости C_1 равен:

$$W_{C1} = C_1 \frac{U_{C1}^2}{2} = 2\frac{1}{2} = 1 \text{ Дж}. \tag{16}$$

После замыкания ключа в схеме возникает переходный процесс: емкость C_1 начинает разряжаться, а емкость C_2 – заряжаться. Одна часть запасенной энергии превращается в тепло вследствие протекания электрического тока через сопротивление, другая часть запасается в электрическом поле емкости C_2. Чтобы рассчитать энергию, затраченную на нагревание в течение переходного процесса, необходимо найти зависимость тока, протекающего через сопротивление, от веремени. Для этого заменим емкость C_1 схемной моделью, учитывающей ненулевые начальные условия, как показано на Рис. 3(а).

Начальное напряжение на емкости схемной модели $u_{1м}(t)\big|_{t=0}$ равно нулю, так как $u_{C1}(t)\big|_{t=0} = 1\ B$ по условию задачи. Заменив последовательное соединение емкостей $C_{1м}$, C_2 эквивалентной емкостью С получим:

$$C = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} = \frac{2\cdot 2}{2+2} = 1\ Ф. \tag{17}$$

Используя (17),заменяем схему Рис. 3(а) эквивалентной схемой, представленной на Рис. 3(б). Напряжение $u_C(t)$ удовлетворяет следующему уравнению, записанному по второму закону Кирхгофа:

$$\begin{gathered} E_1 - u_R - u_C = 0; \ \rightarrow\ E_1 - r i_R - u_C = 0; \ \rightarrow \\ E_1 - rC\frac{du_C}{dt} - u_C = 0; \ \ u_C(t)\big|_{t=0} = 0. \end{gathered} \tag{18}$$

Решив уравнение (18) при нулевых начальных условиях, например, классическим методом, получим:

$$u_C(t) = E_1(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) \ , \tag{19}$$

где $\tau = rC$ - постоянная времени схемы.

Поскольку компоненты схемы включены последовательно, через них протекает один и тот же ток, который находим следующим образом:

$$i_R = i_{C2} = i_{1м} = i_C = C\frac{du_C}{dt} = C\frac{d}{dt}E_1(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) = CE_1\frac{1}{\tau}e^{-\frac{t}{\tau}} = \frac{E_1}{r}e^{-\frac{t}{\tau}}\sigma(t), \tag{20}$$

где $\sigma(t)$ - единичная ступенчатая функция (функция Хевисайда). Она необходима для того, чтобы ток, рассчитанный по формуле (20), был равен нулю при отрицательных t (до замыкания ключа). За время τ на нагревание сопротивления затратится энергия W_R, которую можно рассчитать, интегрируя мгновенную мощность $p_R(t)$, найденную с использованием (20):

$$W_R = \int_0^{\tau} p_R(t)dt = \int_0^{\tau} r i_R^2(t)dt = \frac{E_1^2}{r}\int_0^{\tau} e^{-\frac{2t}{\tau}}dt = \frac{E_1^2}{r}(-\frac{\tau}{2})e^{-\frac{2t}{\tau}}\Bigg|_0^{\tau} = \frac{CE_1^2}{2}(1-\frac{1}{e^2}) \approx 0,43\,Дж\,. \quad (21)$$

В момент времени $t=\tau$ течение переходного процесса, рассчитанного по уравнению (18), прерывается, так как происходит скачкообразное уменьшение емкости C_2, и начинается новый переходный процесс. Для его расчета определим начальные условия (напряжения $u_{C2}(\tau)$, $u_{1м}(\tau)$ на емкостях в момент времени, предшествующий уменьшению емкости C_2).

Равенство токов в (20) позволяет утверждать, что заряд на каждой из емкостей С1м, С2 изменяется на одну и ту же величину за одно и то же время:

$$i_{C2} = i_{1м};\to C_2\frac{du_{C2}}{dt} = C_{1м}\frac{du_{1м}}{dt};\to \int_0^t C_2\frac{du_{C2}}{dt} = \int_0^t C_{1м}\frac{du_{1м}}{dt};\to C_2u_{C2} = C_{1м}u_{1м};\to q_2 = q_{1м}, \quad (22)$$

где q_2, $q_{1м}$ - заряд на емкостях C_2, $C_{1м}$, соответственно. Поскольку емкости C_2, $C_{1м}$ одинаковы, то из равенства зарядов q_2 и $q_{1м}$ в (22) следует, что в момент времени $t=\tau$ напряжения на емкостях будут также одинаковы:

$$u_{C2}(\tau) = u_{1м}(\tau)\;. \quad (23)$$

С другой стороны (см. Рис. 3), сумма напряжений на последовательно включенных емкостях C_2, $C_{1м}$ равна напряжению (19) на эквивалентной емкости C :

$$u_{C2}(\tau)+u_{1м}(\tau) = u_C(\tau) = E_1(1-e^{-\frac{t}{\tau}})\Bigg|_{t=\tau} = 1-\frac{1}{e}\;B\,. \quad (24)$$

Решив уравнения (23) и (24) относительно напряжений на емкостях, получим:

$$u_{C2}(\tau) = u_{1м}(\tau) = \frac{1}{2}u_C(\tau) = \frac{1}{2}E_1(1-\frac{1}{e}) \approx 0,32\,B\,. \quad (25)$$

Тогда напряжение на емкости $u_{C1}(\tau)$ находим по схеме Рис. 3(а):

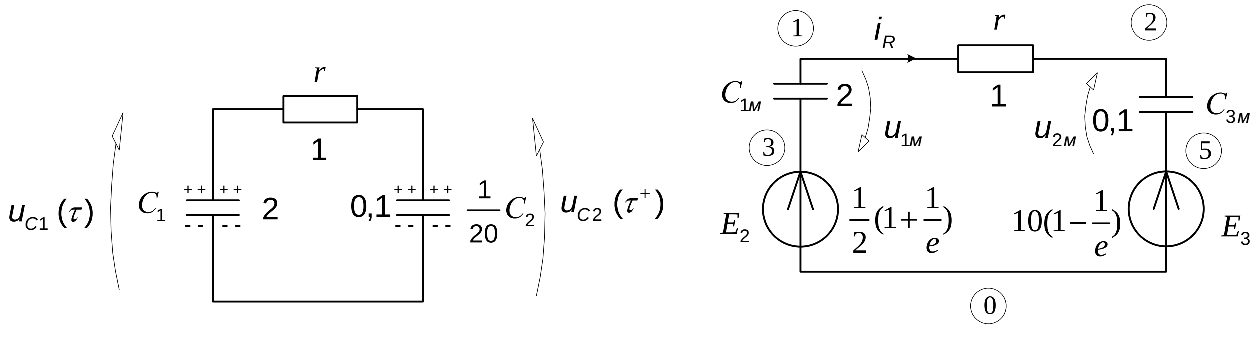
$$u_{C1}(\tau) = E_1 - u_{1м}(\tau) = E_1 - \frac{E_1}{2}(1-\frac{1}{e}) = \frac{E_1}{2}(1+\frac{1}{e}) = E_2 \approx 0,68\;B\,. \quad (26)$$

Скачкообразное изменение емкости C_2 под действием сил неэлектрической природы не может мгновенно изменить ее заряд q_2, что позволяет рассчитать напряжение $u_{C2}(\tau^+)$:

$$\begin{gathered} q_2(\tau) = q_2(\tau^+);\to C_2u_{C2}(\tau) = \frac{1}{20}C_2u_{C2}(\tau^+);\to \\ u_{C2}(\tau^+) = \frac{20C_2u_{C2}(\tau)}{C_2} = 20\frac{E_1}{2}(1-\frac{1}{e}) = E_3 \approx 6,32\;B, \end{gathered} \quad (27)$$

где τ^+ - момент времени, наступивший после уменьшения емкости C_2 в 20 раз и отличающийся от τ на бесконечно малую величину. Схема, соответствующая моменту времени τ^+, приведена на Рис. 4(а).

Для расчета нового переходного процесса заменяем заряженные емкости их схемными моделями с нулевыми начальными условиями и получаем схему, приведенную на Рис. 4(б), где напряжения независимых источников E_2, E_3 равны напряжениям на первой и второй емкости в момент времени $t=\tau^+$, соответственно, а напряжения на модельных емкостях $u_{1м}$, $u_{2м}$ равны нулю. Время отсчета нового переходного процесса обозначим как $\tilde{t} = t-\tau^+$, начальное значение которого равно нулю при $t=\tau^+$.



(а) (б)

Рис. 4. (а) схема в момент времени $t=\tau^+$; (б) схема в момент времени $t=\tau^+$, приведенная к нулевым начальным условиям.

Упрощенная схема, эквивалентная схеме Рис. 4(б), приведена на Рис. 5(б) , где $C_э$ - емкость, эквивалентная емкостям $C_{1м}$, $C_{3м}$, соединенным последовательно:

$$C_э=\frac{C_{1м}C_{3м}}{C_{1м}+C_{3м}}=\frac{C_1\frac{1}{20}C_2}{C_1+\frac{1}{20}C_2}=\frac{C_1C_2}{20C_1+C_2}=\frac{2}{21}\approx 0,095\ Ф\,, \tag{28}$$

а $E_э$ - напряжение источника, эквивалентного последовательно соединенным источникам напряжения E_1, E_3:

$$E_э=E_1-E_3=\frac{1}{2}(1+\frac{1}{e})-10(1-\frac{1}{e})=-\frac{19}{2}+\frac{21}{2e}\approx -5,64\ B\,. \tag{29}$$

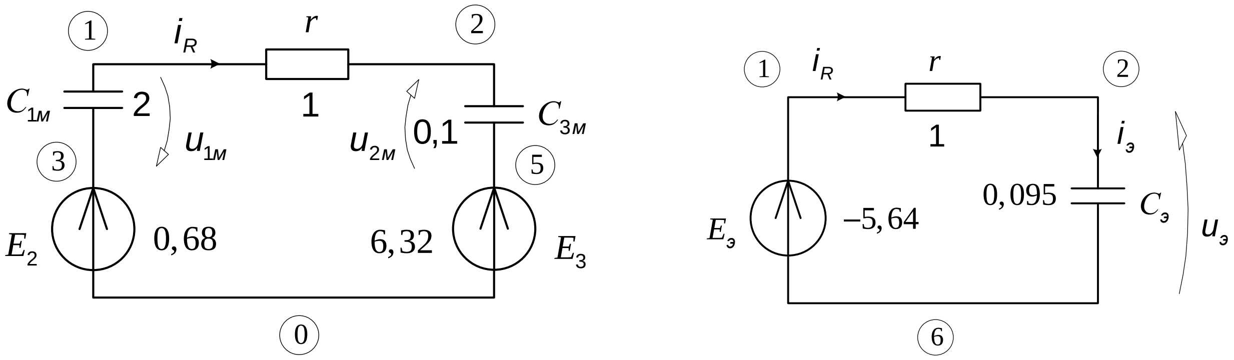
Напряжение $u_э$ находим аналогично напряжению u_C в схеме Рис. 3(б):

$$u_э(\tilde{t})=E_э(1-e^{-\frac{\tilde{t}}{\tau_э}})\ , \tag{30}$$

где $\tau_э=rC_э=\dfrac{rC_1C_2}{20C_1+C_2}$. Зная напряжение $u_э(\tilde{t})$, находим ток, протекающий через сопротивление:

$$i_R(\tilde{t})=i_э(\tilde{t})=C_э\frac{du_э(\tilde{t})}{d\tilde{t}}=C_э\frac{d}{d\tilde{t}}E_э(1-e^{-\frac{\tilde{t}}{\tau_э}})=C_э\frac{E_э}{\tau_э}e^{-\frac{\tilde{t}}{\tau_э}}=\frac{E_э}{r}e^{-\frac{\tilde{t}}{\tau_э}}\sigma(\tilde{t})\,. \tag{31}$$

Энергию $\tilde{W}_R$, расходуемую на нагревание сопротивления, определяем по формуле, аналогичной (21):



(а) (б)

Рис. 5. (а) *схема Рис. 4(б) с численными значениями номиналов источников, моделирующих ненулевые начальные условия; (б) упрощенная схема, эквивалентная схеме (а).*

$$\tilde{W}_R = \int_0^\infty r i_R^2(\tilde{t}) d\tilde{t} = \frac{E_э^2}{r}\int_0^\infty e^{-\frac{2\tilde{t}}{\tau_э}} dt = \frac{E_э^2}{r}(-\frac{\tau_э}{2}) e^{-\frac{2t}{\tau}}\Bigg|_0^\infty = \frac{C_э E_э^2}{2} = \frac{2\cdot 2}{2\left(20\cdot 2+2\right)}\left(-\frac{19}{2}+\frac{21}{2e}\right)^2 \approx 1,51\,Дж\,. \qquad (32)$$

Тогда количество энергии W, затраченной на нагревание, начиная с t=0 и до окончания переходных процессов, равно $W = W_R + \tilde{W}_R \approx 0,43 + 1,51 = 1,94\ Дж$. На нагревание затратилось больше энергии, чем было первоначально запасено ($1\ Дж$), за счет энергии, сообщенной второй емкости при выполнении работы по ее уменьшению в 20 раз.