

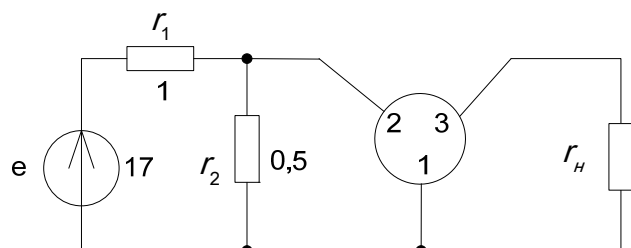
"ТЭЦ'2018"

XI олимпиада по теории электронных цепей,

посвященная памяти

проф. Сигорского Виталия Петровича

Задача 1.



$$g = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Схема содержит линейный трехполюсник, четыре g -параметра которого заданы в сименсах: полюс 1 - входной, 2 - выходной, 3 - общий полюс трехполюсника. Определить значение сопротивления r_n , при котором на нем будет выделяться максимальная мощность, и значение этой мощности.

Решение:

Сопротивление r_n подключено к резистивному двухполюснику, образованному идеальным источником напряжения E , сопротивлениями r_1, r_2 и линейным трёхполюсником. Этот двухполюсник по теореме об эквивалентном источнике можно заменить схемой Тевенена (реальным источником напряжения) или схемой Нортон (реальным источником тока). Выполнив замену, получим схемы, эквивалентные исходной, показанные на Рис. 11.1.

Для определения параметров эквивалентных источников r_s, e_s, j_s представим исходную схему как систему с двумя сторонами, как показано на Рис. 11.2 (а). Далее сформируем расширенную матрицу g_p g -параметров трехполюсника, добавив к исходной матрице g еще один столбец и одну строку. Каждый из добавленных элементов равен сумме элементов соответствующей строки или столбца исходной матрицы g , взятой с обратным знаком:

$$g_p = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} & -(g_{11} + g_{12}) \\ g_{21} & g_{22} & -(g_{21} + g_{22}) \\ -(g_{11} + g_{21}) & -(g_{12} + g_{22}) & g_{11} + g_{12} + g_{21} + g_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & -3 \\ -3 & -1 & 4 \end{bmatrix}. \quad (11.1)$$

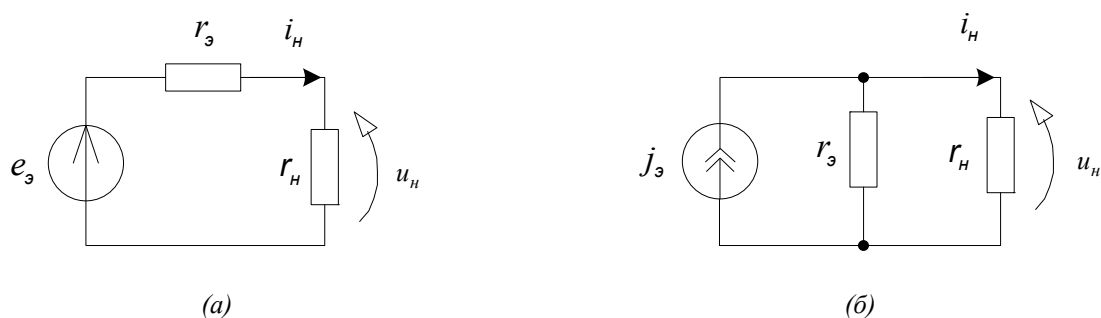


Рис. 11.1. Схемы, эквивалентные заданной: (а) с реальным источником напряжения; (б) с реальным источником тока.

Сформируем матрицу проводимости Y_c внутренней части системы с двумя сторонами, состоящей из сопротивлений и трехполюсника, воспользовавшись формализованными правилами учета этих типов компонентов в матрице проводимости. Для учета трехполюсника необходимо установить соответствие между его полюсами и узлами схемы, к которым они подключены (см. Рис. 11.2 (б)). В результате получим:

$$Y_c = \begin{bmatrix} g_1 & -g_1 & 0 \\ -g_1 & g_1 + g_2 + g_{22} & g_{23} \\ 0 & g_{32} & g_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 5 & -3 \\ 0 & -1 & 4 \end{bmatrix}. \quad (11.2)$$

Параметр r_3 равен выходному сопротивлению системы, которое рассчитывается по следующей формуле:

$$r_3 = R_{\text{вых}} = \frac{r_e \Delta_{\beta\beta} + \Delta_{\alpha\alpha, \beta\beta}}{r_e \Delta + \Delta_{\alpha\alpha}} \Bigg|_{\substack{r_e=0; \\ \alpha \rightarrow 1; \\ \beta \rightarrow 3}} = \frac{\Delta_{11,33}}{\Delta_{11}} = \frac{5}{17} \text{ Ом}, \quad (11.3)$$

где r_e - сопротивление идеального источника напряжения, α , β - узлы входа и выхода системы, соответственно (система уравновешена, т.е., ее вход и выход имеют общий узел, выбранный в качестве базисного при формировании матрицы проводимости системы Y_c , поэтому в алгебраических дополнениях индексы одиночные, а не суммарные, как в случае проходной

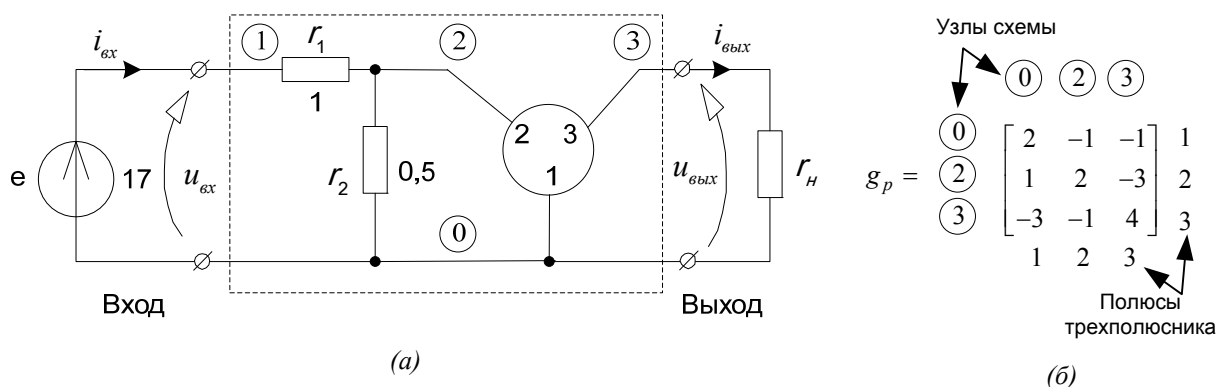


Рис. 11.2. (а) исходная схема, представленная как система с двумя сторонами; (б) расширенная матрица g -параметров трехполюсника с отображением соответствия полюсов трехполюсника узлам схемы.

системы).

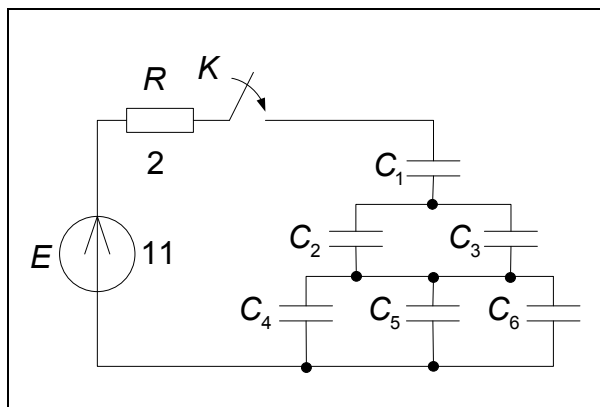
В нагрузке выделяется максимальная мощность, когда ее сопротивление равно сопротивлению реального источника, который отдает мощность нагрузке, т.е., $r_n = r_3 = \frac{5}{17} \text{ Ом}$.

Чтобы рассчитать максимальную мощность, найдем параметр e_3 как выходное напряжение системы в режиме холостого хода (см. Рис. 11.1 (а)):

$$e_3 = u_{\text{вых}}^{x.x.} = K_u e \Big|_{r_n \rightarrow \infty} = K_u^{x.x.} e = \frac{\Delta_{\alpha\beta}}{\Delta_{\alpha\alpha}} e = \frac{\Delta_{13}}{\Delta_{11}} e = \frac{1}{17} 17 = 1 \text{ В}, \quad (11.4)$$

где $K_u^{x.x.}$ - коэффициент передачи напряжения в режиме холостого хода системы, т.е., коэффициент передачи при $r_n \rightarrow \infty$. Тогда по схеме Рис. 11.1 (а) находим значение максимальной мощности:

$$P_{\text{max}} = u_n i_n = \frac{e_3 r_n}{r_n + r_3} \cdot \frac{e_3}{r_n + r_3} \Big|_{r_n=r_3} = \frac{e_3^2}{4r_3} = \frac{1}{4 \cdot \frac{5}{17}} = \frac{17}{20} \text{ Вт}. \quad (11.5)$$



Задача 2.

До замыкания ключа К все емкости разряжены. После замыкания ключа происходит процесс заряда емкостей. Какая часть энергии, запасенной всеми емкостями после окончания переходного процесса, накопится на емкости C_6 , если все емкости одинаковы?

Решение:

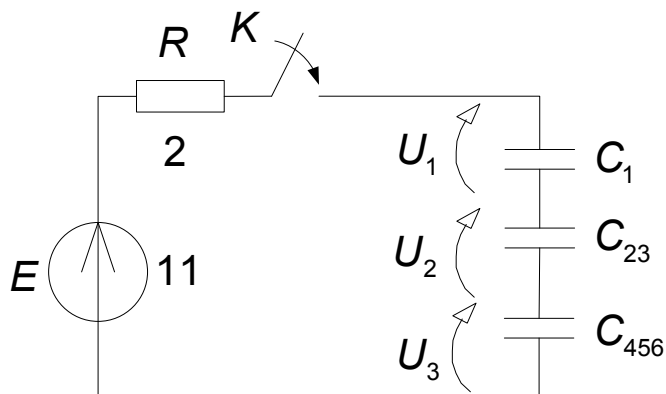
Заменим параллельно соединенные емкости одной эквивалентной:

$$\begin{aligned} C_{23} &= C_2 + C_3 = 2C_1; \\ C_{456} &= C_4 + C_5 + C_6 = 3C_1, \end{aligned} \quad (11.6)$$

тогда исходную схему можно заменить на упрощенную эквивалентную, как показано на Рис. 11.3. Поскольку емкости в ней соединены последовательно, то после замыкания ключа через них протекает один и тот же ток смещения, в результате чего на них образуется заряд одной и той же величины:

$$C_1 U_1 = C_{23} U_2 = C_{456} U_3. \quad (11.7)$$

После окончания процесса заряда емкостей ток, протекающий по сопротивлению R уменьшится до нуля, а, значит, уменьшится до нуля и напряжение на сопротивлении, тогда по второму закону Кирхгофа имеем:



(a)

$$U_1 + U_2 + U_3 = U_E = 11. \quad (11.8)$$

Выразив напряжения U_2 и U_3 через U_1 в (11.7) и подставив в (11.8), получаем уравнение

$$U_1 + \frac{C_1}{C_{23}} U_1 + \frac{C_1}{C_{456}} U_1 = 11,$$

которое после подстановки в него (11.6) принимает следующий вид:

Рис. 11.3. Упрощенная схема, эквивалентная исходной.

$$U_1 + \frac{1}{2}U_1 + \frac{1}{3}U_1 = 11. \quad (11.9)$$

Решив уравнение (11.9) и подставив U_1 в (11.7) получаем

$$\begin{aligned} U_1 &= 6 \text{ В}; \\ U_2 &= 3 \text{ В}; \\ U_3 &= 2 \text{ В}. \end{aligned}$$

Энергия, запасенная всеми емкостями, равна:

$$W = \frac{C_3 U_E^2}{2}, \quad (11.10)$$

где C_3 - емкость, эквивалентная последовательно соединенным емкостям C_1, C_{23} и C_{456} . Найдем C_3 :

$$\frac{1}{C_3} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_{23}} + \frac{1}{C_{456}} = \frac{1}{C_1} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) \rightarrow C_3 = \frac{6}{11} C_1. \quad (11.11)$$

Подставив (11.11) в (11.10), получим:

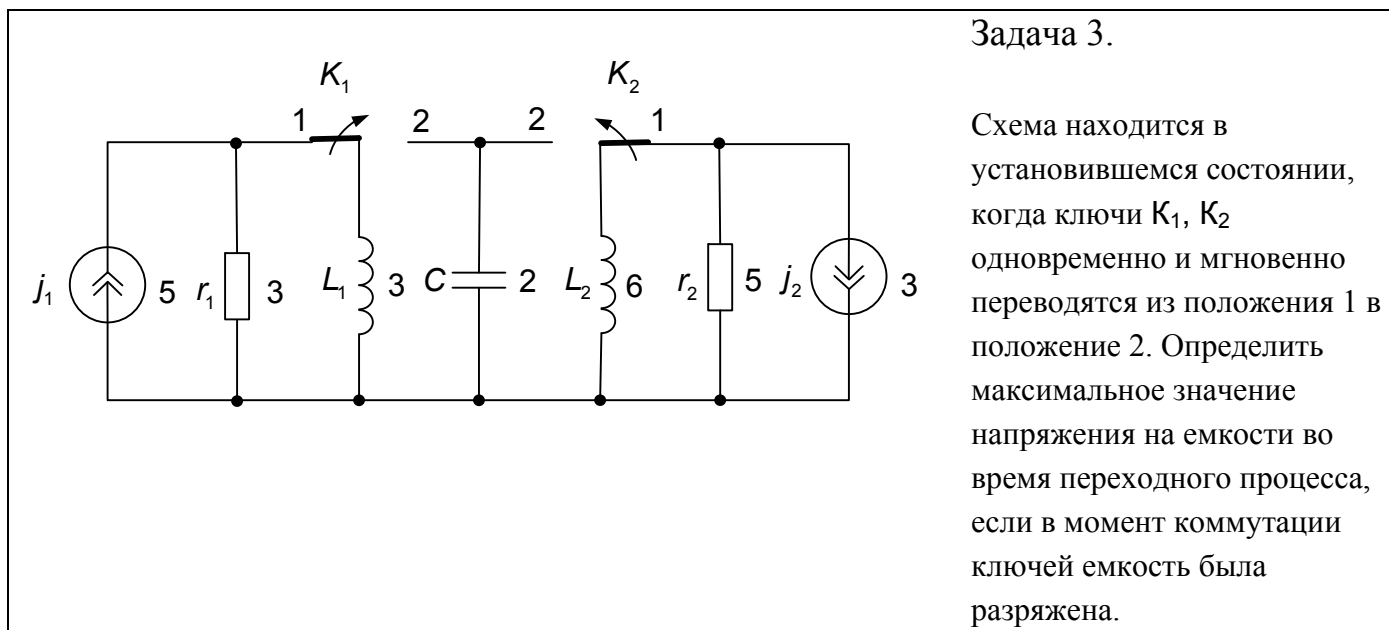
$$W = \frac{C_3 U_E^2}{2} = \frac{6C_1 U_E^2}{11 \cdot 2} = \frac{3C_1 U_E^2}{11} \Big|_{U_E=11 \text{ В}} = 33C_1 \text{ Дж}. \quad (11.12)$$

Энергия, запасенная емкостью C_6 равна:

$$W_6 = \frac{C_6 U_3^2}{2} = \frac{C_1 2^2}{2} = 2C_1 \text{ Дж}, \quad (11.13)$$

Поделив (11.13) на (11.12), получаем искомое решение задачи:

$$\eta = \frac{W_6}{W} = \frac{2}{33} \approx 6\%.$$

Решение:

В установившемся состоянии все токи и напряжения в схеме постоянны, поэтому полюсные напряжения на индуктивностях, которые связаны с их полюсными токами соотношением

$$u_L = L \frac{di_L}{dt}, \quad (11.14)$$

равны нулю. Следовательно, индуктивности в этом случае можно заменить короткозамкнутыми дугами, сопротивление которых равно нулю. Тогда через каждую индуктивность протекает ток, равный току соответствующего источника тока и определяющий начальные условия.

После коммутации ключей в положение 2 образуются три схемы, представленная на Рис. 11.4, в которых электрические процессы протекают независимо. В резистивных схемах переходные процессы отсутствуют, так как они не содержат реактивных компонентов, а в реактивной схеме будет протекать переходный процесс за счет начального запаса энергии на индуктивностях.

Чтобы определить начальный запас энергии, представим реактивную схему так, как

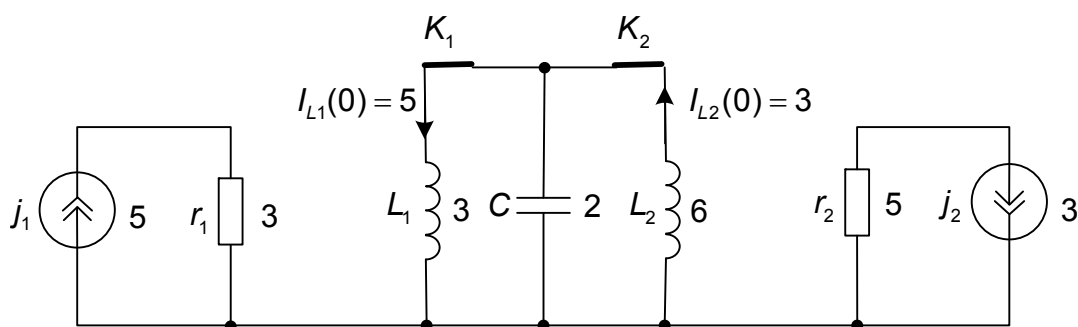


Рис. 11.4. Исходная схема в начальный момент времени после коммутации ключей.

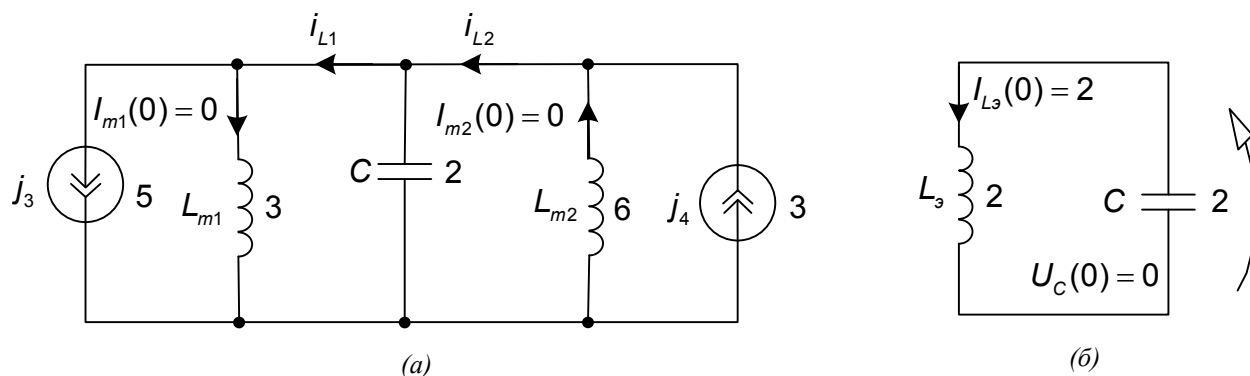


Рис. 11.5. (а) реактивная схема в начальный момент времени после коммутации ключей, приведенная к нулевым начальным условиям; (б) эквивалентная реактивная схема после коммутации ключей.

показано на Рис. 11.5(а), где индуктивности L_1, L_2 заменены их моделями: начальные условия моделируются источниками тока, а ток через модельные индуктивности L_{m1}, L_{m2} в начальный момент времени равен нулю.

Заменив параллельное соединение источников и индуктивностей эквивалентным источником и индуктивностью, получим схему, приведенную на Рис. 11.5 (б). Тогда начальный запас энергии в реактивной схеме равен запасу энергии на эквивалентной индуктивности:

$$W_L = \frac{L_3 [i_{L3}(0)]^2}{2} = 4 \text{ Дж} . \quad (11.15)$$

Поскольку схема Рис. 11.5(б) представляет собой параллельный колебательный контур без потерь, то в ней протекает незатухающий переходный процесс в виде гармонических колебаний тока и напряжения:

$$\begin{aligned} u_C(t) &= U_{cm} \cos(\omega t + \varphi_u); \\ i_{L3}(t) &= I_{Lm} \cos(\omega t + \varphi_i). \end{aligned} \quad (11.16)$$

Напряжение на емкости в данной схеме в любой момент времени равно напряжению на индуктивности, а ток на индуктивности всегда отстает от напряжения на четверть периода колебаний ($\varphi_u - \varphi_i = \pi/2$). Следовательно, в момент времени, когда напряжение на емкости равно максимальному значению U_{cm} , ток через индуктивность равен нулю. Энергия, запасенная в магнитном поле индуктивности, преобразуется в энергию электрического поля емкости. Тогда максимальное значение энергии на емкости равно начальному запасу энергии на индуктивности:

$$W_L = \frac{L_3 [i_{L3}(0)]^2}{2} = \frac{C U_{Cm}^2}{2} = W_{Cmax} . \quad (11.17)$$

Решив уравнение (11.17), находим искомое максимальное напряжение на емкости:

$$U_{Cm} = \sqrt{\frac{2W_L}{C}} = 2 \text{ В} . \quad (11.18)$$