"ТЭЦ'2019"

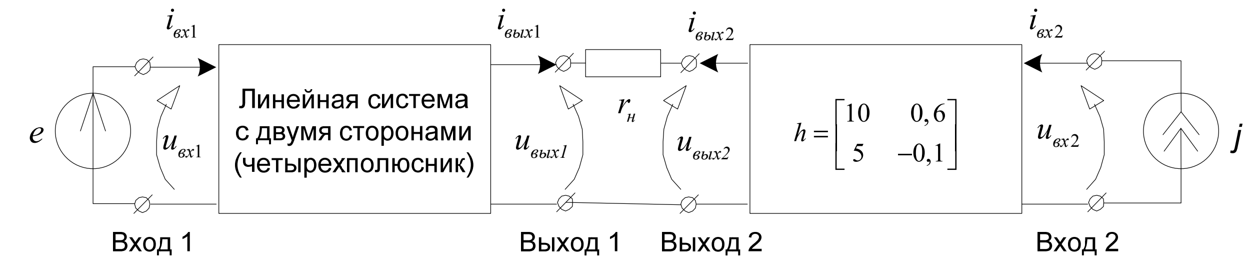
XII олимпиада по теории электронных цепей,

посвященная памяти

проф. Сигорского Виталия Петровича

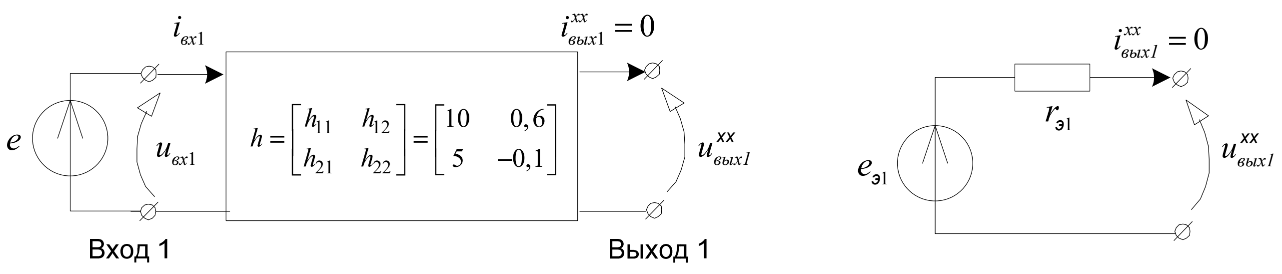
Задача 1.

Выходы двух одинаковых систем с двумя сторонами (четырехполюсников) соединены последовательно и к ним параллельно подключена нагрузка с сопротивлением $r_н$. Заданы h-параметры систем. Напряжение идеального источника напряжения *e=4 В,* а ток идеального источника тока *j=0,2 А.* Найти сопротивление $r_н$, при котором нагрузка рассеивает наибольшую мощность, и значение этой мощности.



Решение:

Отключаем систему 1, на вход которой подключен идеальный источник напряжения, от остальной схемы и заменяем ее эквивалентным источником относительно выходной пары полюсов (см. Рис. 12.1). Напряжение эквивалентного источника $e_{э1}$ равно напряжению холостого хода на выходе системы $u^{xx}_{вых1}$. Находим напряжение $u^{xx}_{вых1}$ через коэффициент передачи напряжения системы K^{xx}_u, который, в свою очередь, выражается через h-параметры системы:



(а) *(б)*

Рис. 12.1. (а) система 1 в режиме холостого хода на выходе; (б) эквивалентная схема Тевенена.

$$e_{э1} = u^{xx}_{вых1} = K^{xx}_u e = \left.\frac{h_{21}e}{g_н h_{11} - |h|}\right|_{g_н=0} = \frac{h_{21}e}{-|h|} = \frac{h_{21}e}{h_{12}h_{21} - h_{11}h_{22}} = \frac{5\cdot 4}{4} = 5\,В, \qquad (12.1)$$

где $|h|$ - определитель матрицы h-параметров системы, $g_н$ - проводимость нагрузки системы, которая в режиме холостого хода равна нулю, т.к. сопротивление нагрузки в этом случае стремится к бесконечности.

Для определения сопротивления эквивалентного источника $r_{э1}$ замыкаем выходные полюсы системы Рис. 12.1а и рассчитаем ток короткого замыкания $i_{вых1}^{кз}$, используя проводимость передачи $Y_{пер}^{кз}$, выраженную через h-параметры системы:

$$i_{вых1}^{кз} = Y_{пер}^{кз} e = \left. \frac{g_н h_{21}}{g_н h_{11} - |h|} e \right|_{g_н \to \infty} = \frac{h_{21}}{h_{11}} e = \frac{5}{10} 4 = 2\ A, \qquad (12.2)$$

где проводимость нагрузки $g_н$ в режиме короткого замыкания на выходе системы стремится к бесконечности, т.к. сопротивление нагрузки в этом случае равно нулю.

Находим сопротивление эквивалентного источника $r_{э1}$ через напряжение холостого хода и ток короткого замыкания:

$$r_{э1} = \frac{u_{вых1}^{xx}}{i_{вых1}^{кз}} = \frac{5}{2} = 2,5\ Ом. \qquad (12.3)$$

Заменив систему 1 эквивалентным источником получаем схему, представленную на Рис. 12.2.

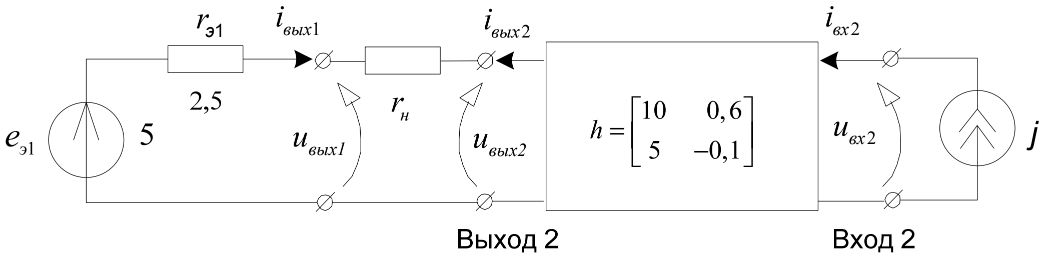


Рис. 12.2. Исходная схема после замены в ней системы 1 эквивалентной схемой Тевенена

Систему 2 также представляем эквивалентным источником напряжения относительно ее выходных полюсов, принимая во внимание то, что ее входной ток задается идеальным источником тока:

$$e_{э2} = u_{вых2}^{xx} = Z_{пер}^{xx} j = \left. \frac{h_{21}}{g_н - h_{22}} j \right|_{g_н = 0} = \frac{h_{21}}{-h_{22}} j = \frac{5 \cdot 0,2}{0,1} = 10\,В;$$

$$i_{вых2}^{кз} = K_i^{кз} j = \left. \frac{g_н h_{21}}{g_н - h_{22}} j \right|_{g_н \to \infty} = h_{21} j = 5 \cdot 0,2 = 1\,A; \qquad (12.4)$$

$$r_{э2} = \frac{u_{вых2}^{xx}}{i_{вых2}^{кз}} = \frac{10}{1} = 10\ Ом.$$

Заменив систему 2 эквивалентным источником напряжения, получаем схему, приведенную на Рис. 12.3а, которую упрощаем до делителя напряжения, как показано на Рис. 12.3б, где: $e_э = e_{э2} - e_{э1} = 5\ В$; $r_э = r_{э2} + r_{э1} = 12,5\ Ом.$

Максимальная мощность отдается реальным источником напряжения в нагрузку тогда, когда сопротивление нагрузки равно сопротивлению источника, следовательно:

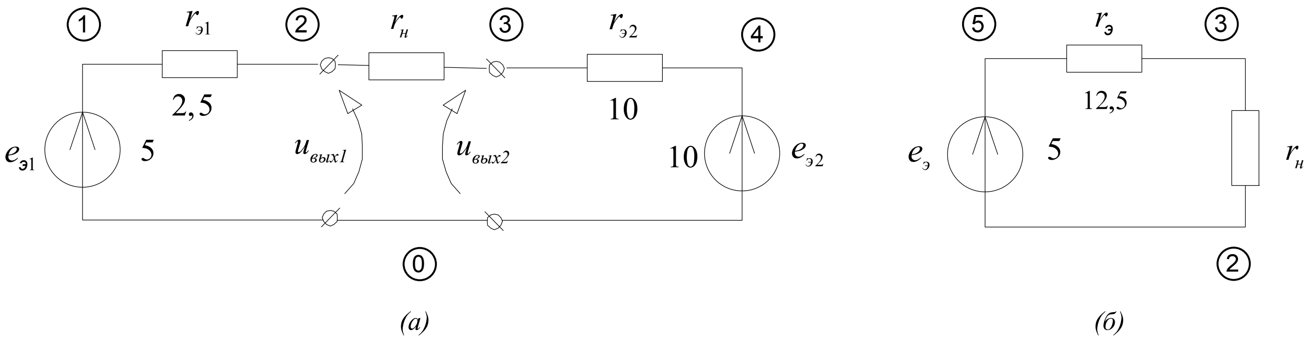
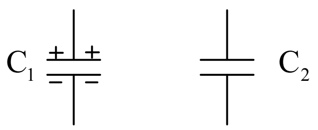


Рис. 12.3. (а) схема, образованная эквивалентными источниками напряжения и сопротивлением нагрузки; (б) упрощенная схема (а), эквивалентная исходной схеме с четырехполюсниками.

$$r_н = r_э = 12,5\ Ом. \qquad (12.5)$$

Искомая максимальная мощность $P_{\max}$ рассчитывается по схеме Рис. 12.3б с учетом (12.5):

$$P_{\max} = \frac{e_э^2}{4r_э} = \frac{25}{4 \cdot 12,5} = 0,5\ Вт$$

	Задача 2. Имеется два конденсатора, сопротивление утечки которых стремится к бесконечности, а емкость каждого равна 1 мкФ. Заряд на первом из них равен 2 мКл, а второй конденсатор не заряжен. Найти суммарную энергию, запасенную в электрических полях обоих конденсаторов, до и после их параллельного соединения и сделать выводы относительно сохранения энергии.

Решение:

Зная заряд первого конденсатора q_1, можно определить напряжение между его обкладками U_1 до замыкания ключа:

$$U_1 = \frac{q_1}{C_1} = \frac{2\ мКл}{1\ мкФ} = 2000\ В, \qquad (12.6)$$

где C_1 емкость конденсатора. Энергия электрического поля W_C конденсатора определяется его емкостью C и напряжением u между его обкладками:

$$W_C = C\frac{u^2}{2}. \qquad (12.7)$$

Тогда начальный запас энергии сосредоточен только на емкости C_1 и равен 2 Дж согласно (12.7).

После замыкания ключа происходит перераспределение заряда между конденсаторами: незаряженный конденсатор заряжается и его напряжение увеличивается, а заряженный конденсатор разряжается и его напряжение уменьшается. При этом суммарный заряд на конденсаторах сохраняется и остается равным 2 мКл, т.е., имеет место следующее равенство:

$$q_1 = C_1 U_1 = C_э U_э = 2 \cdot 10^{-3} \ Кл, \tag{12.8}$$

где $C_э = C_1 + C_2$ - емкость параллельно соединенных конденсаторов, $U_э$ - напряжение на параллельно соединенных конденсаторах. Из (12.8) находим напряжение $U_э$:

$$U_э = \frac{q_1}{C_э} = \frac{q_1}{C_1 + C_2} = \frac{2 \cdot 10^{-3}}{2 \cdot 10^{-6}} = 1000 \ В. \tag{12.9}$$

По (12.7) находим энергию $W_э$, накопленную параллельно соединенными конденсаторами:

$$W_э = C_э \frac{U_э^2}{2} = 2 \cdot 10^{-6} \frac{10^6}{2} = 1 \ Дж. \tag{12.10}$$

Таким образом, суммарный запас энергии на конденсаторах уменьшается в два раза, что свидетельствует о рассеянии половины первоначально запасенной электрической энергии. Это объясняется тем, что перераспределение заряда происходит по металлическим обкладкам конденсаторов и металлическим выводам, соединяющим конденсаторы, которые обладают некоторым электрическим сопротивлением r. Для выяснения вклада этого сопротивления в рассеяние электрической энергии рассмотрим схему перезаряда конденсаторов, приведенную на Рис. 12.4а.

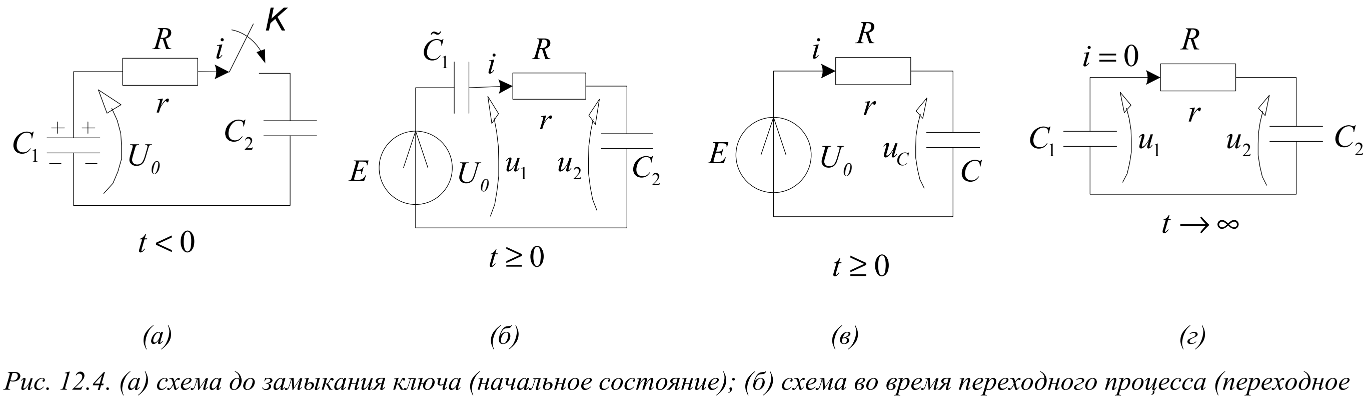


Рис. 12.4. (а) схема до замыкания ключа (начальное состояние); (б) схема во время переходного процесса (переходное состояние); (в) упрощенная схема (б); (г) схема после завершения переходного процесса (установившееся состояние). t-время.

Момент замыкания ключа, после которого начинается переходный процесс перезаряда конденсаторов, примем равным нулю. Соответствующая схема приведена на Рис. 12.4б. В ней первый конденсатор заменен моделью, состоящей из ёмкости $\tilde{C}_1 = C_1$ и идеального источника напряжения E, номинал которого $U_0 = \frac{q_1}{C_1} = 2000\ В$ согласно заданным условиям. Начальное напряжение на модельной емкости $\tilde{C}_1$ равно нулю.

На Рис. 12.4*в* приведена упрощенная схема, полученная заменой последовательно соединенных незаряженных емкостей $\tilde{C}_1, C_2$ на одну эквивалентную емкость $C = \frac{\tilde{C}_1 C_2}{\tilde{C}_1 + C_2} = 0,5\ мкФ$. Начальное напряжение на эквивалентной емкости C равно нулю, и после замыкания ключа происходит процесс ее заряда.

Напряжение емкости, заряжающейся от источника постоянного напряжения, находим из уравнения, составленного для схемы Рис. 12.4в по второму закону Кирхгофа с использованием компонентных уравнений емкости $i = C\frac{du_c}{dt}$ и сопротивления $u_R = ri$:

$$rC\frac{du_c}{dt} + u_c = U_0;\ u_c(0) = 0\ . \qquad (12.11)$$

Решение дифференциального уравнения (12.11) имеет следующий вид:

$$u_C = U_0\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{t}{rC}}\right),\ t \geq 0\ .$$

Продифференцировав напряжение u_C по времени, находим ток i:

$$i = C\frac{du_C}{dt} = C\frac{d}{dt}\left[U_0\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{t}{rC}}\right)\right] = \frac{U_0}{r}\mathrm{e}^{-\frac{t}{rC}},\ t \geq 0\ , \qquad (12.12)$$

который протекает по всем компонентам схемы, включая и сопротивление R. Тогда энергию W_R, рассеиваемую на сопротивлении R при протекании тока i в процессе перезаряда конденсаторов, находим через мгновенную мощность $p_R(t)$:

$$W_R = \int_0^\infty p_R(t)dt = \int_0^\infty i^2 r dt = \frac{U_0^2}{r}\int_0^\infty \mathrm{e}^{-\frac{2t}{rC}}dt = \frac{U_0^2}{r}\frac{rC}{2}\left(\mathrm{e}^{-\frac{2t}{rC}}\right)\Bigg|_\infty^0 = C\frac{U_0^2}{2} = 1\ Дж\ . \qquad (12.13)$$

Таким образом, половина начального запаса энергии на конденсаторах рассеивается на сопротивлении R, причем количество рассеянной энергии не зависит от его номинала r. Вторая половина начальной энергии сохраняется на кондесаторах, перераспределившись между ними.

Выполняем проверку полученных результатов. Зная ток i, находим напряжения u_1, u_2 на конденсаторах после окончания перераспределения энергии между ними (см. Рис. 12.4б):

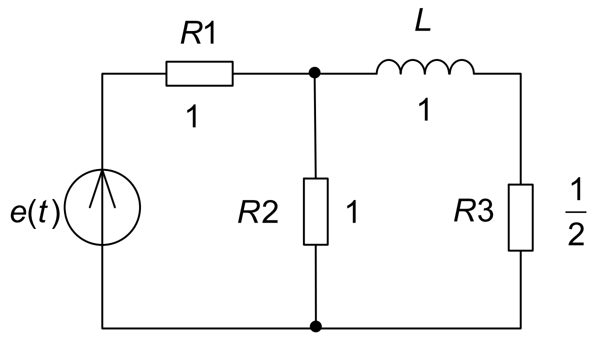
$$u_2\big|_{t\to\infty} = \frac{1}{C_2}\int_0^\infty i dt = \frac{U_0}{rC_2}\int_0^\infty \mathrm{e}^{-\frac{t}{rC}}dt = \frac{U_0}{rC_2}\cdot rC\left(\mathrm{e}^{-\frac{t}{rC}}\right)\Bigg|_\infty^0 = \frac{U_0 C}{C_2} = \frac{U_0 C_1}{C_1 + C_2} = 1000\ В = U_э; \qquad (12.14)$$

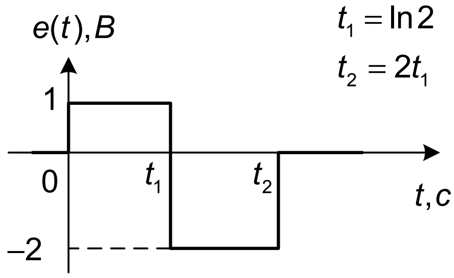
$$u_1\Big|_{t\to\infty} = U_0 - \frac{1}{\tilde{C}_1}\int_0^\infty i dt\Bigg|_{\tilde{C}_1=C_1} = U_0 - \frac{U_0}{rC_1}\int_0^\infty \mathrm{e}^{-\frac{t}{rC}} dt = U_0 - \frac{U_0}{rC_1}\cdot rC\left(\mathrm{e}^{-\frac{t}{rC}}\right)\Bigg|_\infty^0 = \frac{U_0 C_1}{C_1 + C_2} = 1000\ B = U_э, \quad (12.15)$$

где $U_э$ найдено по (12.9). Как и ожидалось, напряжения оказались одинаковыми на параллельно соединенных конденсаторах после окончания переходных процесов. Этот же вывод следует из схемы Рис. 12.4*г,* где ток i после окончания переходного процесса стремится к нулю согласно (12.12) и, следовательно, напряжение на сопротивлении R также стремится к нулю. Тогда по второму закону Кирхгофа $u_1\big|_{t\to\infty} = u_2\big|_{t\to\infty} = U_э$.

Задача 3.

Определить момент времени $t_x > 0$, в который ток через индуктивность равен нулю, если в начальный момент времени $t = 0$ ток через индуктивность не течет. Найти значение мощности источника в момент времени t_x.





Решение:

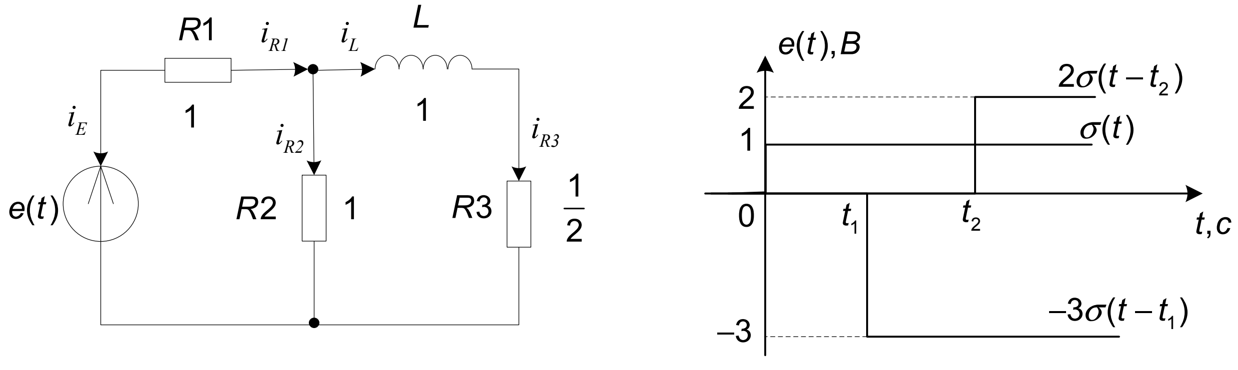
Мгновенная мощность, отдаваемая или потребляемая любым двухполюсником, равна произведению его полюсного тока и полюсного напряжения. Тогда задача определения мгновенной мощности источник напряжения в момент времени t_x сводится к определению значений $i_E(t_x)$ и $e(t_x)$ (см. Рис. 12.5а). Сигнал источника $e(t)$ можно представить как сумму ступенчатых функций, показанных на Рис. 12.5б.

Каждую из ступенчатых функций выразим через единичную ступенчатую функцию $\sigma(t)$ (функцию Хевисайда), тогда аналитическое выражение сигала источника $e(t)$, приведенного в задании, принимает следующий вид:

$$e(t) = \sigma(t) - 3\sigma(t - t_1) + 2\sigma(t - t_2), \quad (12.16)$$

где $t_1 = \ln 2$, а $t_2 = 2t_1$ по условию задачи.

Первое слагаемое в (12.16) представляет собой функцию Хевисайда $\sigma(t)$, реакция схемы на которую называется переходной характеристикой $h(t)$ при условии, что начальные условия нулевые. В нашем случае начальным условием является полюсный ток индуктивности

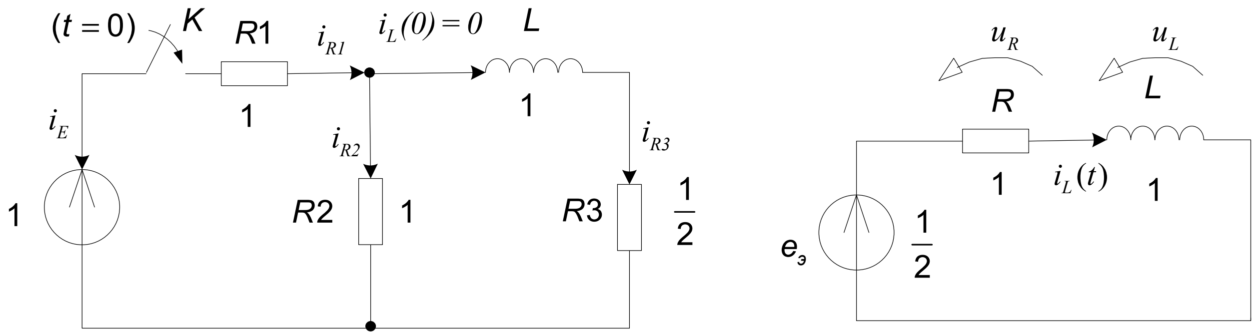


(a) (б)

Рис. 12.5. (а) исходная схема с указанными полюсными токами; (б) сигнал $e(t)$, представленный как сумма ступенчатых функций Хевисайда.

$i_L(t)\big|_{t=0} = i_L(0)$, который по условию задачи равен нулю. Выбираем в качестве переходной характеристики $h(t)$ искомый ток индуктивности $i_L(t)$ и находим его как реакцию на подключение источника 1 вольт ($e(t) = \sigma(t)\big|_{t\ge 0} = 1$), показанного на Рис. 12.6а.

По теореме об эквивалентном источнике заменяем резистивную часть схемы, подключенную к индуктивности после замыкания ключа, эквивалентным источником напряжения. Для этого воспользуемся методом эквивалентных преобразований и получаем схему, приведенную на Рис. 12.6б.



(а) (б)

Рис. 12.6. (а) схема для расчета переходной характеристики как реакции на замыкание ключа; (б) упрощенная схема, эквивалентная исходной.

Для упрощенной схемы Рис. 12.6б записываем уравнение по второму закону Кирхгофа, в котором напряжение на сопротивлении $u_R = ri_L$, а напряжение на индуктивности $u_L = L\dfrac{di_L}{dt}$:

$$L\frac{di_L}{dt} + ri_L = e_э; \quad \to \quad \frac{L}{r}\frac{di_L}{dt} + i_L = \frac{e_э}{r}; \quad i_L(0) = 0,$$

где $r = 1\ Ом$. Решив дифференциальное уравнение, находим ток $i_L(t)$, а значит, и переходную характеристику схемы $h(t)$:

$$i_L(t)=h(t)=\frac{1}{2}(1-e^{-t}),\ t\in[0,\infty). \qquad (12.17)$$

Ток $i_L(t)$ есть реакцией исходной схемы на сигнал $e(t)$ на интервале $[0,t_1)$, так как вторая и третья ступенчатые функции в (12.16) равны нулю на этом интервале. Очевидно, что $i_L(t)$ не имеет нулевого значения ни в одной точке данного интервала (см. (12.17)).

Находим и исследуем ток индуктивности на следующем интервале $[t_1,t_2)$, где сигнал источника $e(t)=\sigma(t)-3\sigma(t-t_1)$. Тогда по принципу суперпозиции реакция схемы определяется суммой реакций на каждую составляющую сигнала $e(t)$:

$$\begin{aligned} i_L(t)\big|_{e(t)=\sigma(t)-3\sigma(t-t_1)}&=h(t)-3\cdot h(t-t_1)=\frac{1}{2}\left(1-\mathrm{e}^{-t}\right)\sigma(t)-\frac{3}{2}\left(1-\mathrm{e}^{-(t-t_1)}\right)\sigma(t-t_1)=\\ &=-1-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-t}\left(1-3\mathrm{e}^{t_1}\right);\ t\in[t_1,t_2). \end{aligned} \qquad (12.18)$$

Находим искомое значение t_x, приравняв (12.18) к нулю:

$$i_L(t)\big|_{t=t_x}=-1-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-t_x}\left(1-3\mathrm{e}^{t_1}\right)=0;$$

$$\mathrm{e}^{-t_x}=\frac{2}{3\mathrm{e}^{t_1}-1};$$

$$t_x=-\ln\left(\frac{2}{3\mathrm{e}^{t_1}-1}\right)\Bigg|_{t_1=\ln 2\approx 0,7c}=\ln\left(\frac{5}{2}\right)\approx 0,9c.$$

Схема в момент времени t_x приведена на Рис. 12.7а, откуда находим

$$i_E(t_x)=-\frac{e}{r_1+r_2}=-\frac{3}{2}\ A.$$

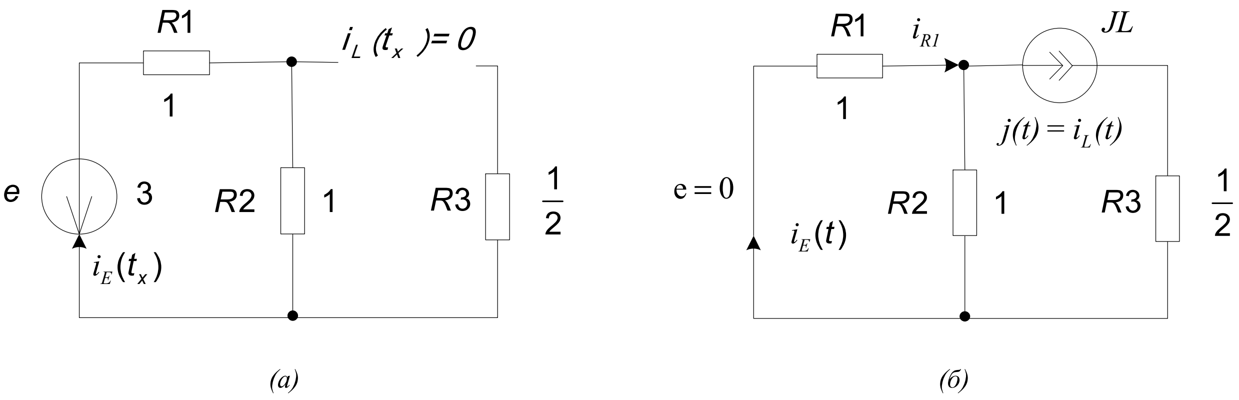


Рис. 12.7. (а) исходная схем в момент времени t_x, когда ток через индуктивность равен нулю; (б) исходная схема на интервале $[t_2,\infty)$.

Мощность источника в момент t_x равна:

$$p_E=e\cdot i_E(t_x)=-\frac{e^2}{r_1+r_2}=-\frac{9}{2}=-4,5\ Bm.$$

Отрицательный знак мощности p_E указывает на то, что источник отдает электрическую энергию.

Схема, соответствующая интервалу $\left[t_2,\infty\right)$, на котором напряжение $e(t)=0$, приведена на Рис. 12.7б. Несмотря на отсутствие в схеме источника напряжения, переходный процесс будет продолжаться за счет энергии, накопленной в индуктивности. По теореме компенсации индуктивность заменена источником тока $j(t)=i_L(t)$, где $i_L(t)$ является реакцией на сигнал источника напряжения $e(t)=\sigma(t)-3\sigma(t-t_1)+2\sigma(t-t_2)$ на интервале $\left[t_2,\infty\right)$. Находим реакцию $i_L(t)$ по принципу суперпозиции:

$$\begin{aligned}
&i_L(t)\big|_{e(t)=\sigma(t)-3\sigma(t-t_1)+2\sigma(t-t_2)} = h(t)-3\cdot h(t-t_1)+2\cdot h(t-t_2)=\\
&=\left[\frac{1}{2}\left(1-\mathrm{e}^{-t}\right)-\frac{3}{2}\left(1-\mathrm{e}^{-(t-t_1)}\right)+\left(1-\mathrm{e}^{-(t-t_2)}\right)\right]\sigma(t-t_2)=\\
&=\left(-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-t}+\frac{3}{2}\mathrm{e}^{-t}\mathrm{e}^{t_1}-\mathrm{e}^{-t}\mathrm{e}^{t_2}\right)\sigma(t-t_2)=\\
&=\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-t}\left(-1+3\mathrm{e}^{t_1}-2\mathrm{e}^{t_2}\right)\sigma(t-t_2)\Big|_{\substack{t_1=\ln 2;\\ t_2=2\ln 2}}=\\
&=-\frac{3}{2}\mathrm{e}^{-t};\ t\in\left(t_2,\ \infty\right).
\end{aligned} \tag{12.19}$$

Знак минус указывает на то, что физическое направление тока (т.е., направление движения положительных зарядов) противоположно направлению источника тока.

Согласно (12.19) функция тока $j(t)=i_L(t)$ принимает нулевое значение только при $t\to\infty$. Она характеризует расход энергии W_L, запасенной в магнитном поле индуктивности за время, предшествующее моменту t_2:

$$W_L(t)=L\frac{i_L^2(t)}{2}=\frac{9}{4}\mathrm{e}^{-2t}>0;\ t\in\left[t_2,\ \infty\right).$$

Таким образом, во время переходного процесса ток $i_L(t)$ принимает нулевое значение лишь в точке $t_x\approx 0{,}9\,c$ и асимптотически стремится к нулю при $t\to\infty$.

Переходную характеристику $h(t)$ можно также найти операторным методом, основанным на преобразовании Лапласа. На Рис. 12.9 приведена кривая изменения тока $i_L(t)$, построенная по (12.17), (12.18) и (12.19).

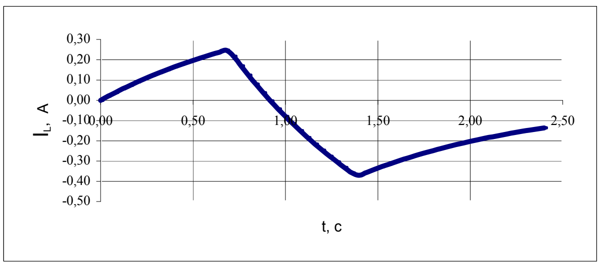


Рис. 12.9. Зависимость тока индуктивности от времени.