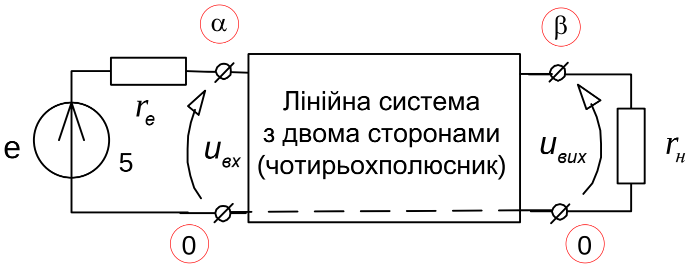
"ТЕК'2021"
XIV олімпіада з теорії електронних кіл, присвячена пам’яті проф. Сігорського Віталія Петровича

Задача 1.



$$Y_c = \begin{array}{c} \\ \alpha \\ 1 \\ \beta \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \alpha & 1 & \beta \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 4 & 2 & -0{,}5 \\ -5 & -0{,}5 & 0{,}5 \end{bmatrix} \end{array}$$

На рисунку зображена лінійна система з двома сторонами та її матриця провідности Y_c. Знайти опір джерела r_e та опір навантаження $r_н$, за яких вхідний опір системи є узгодженим з опором джерела, а вихідний опір системи – з опором навантаження. Знайти потужність, споживану навантаженням.

.

Розв'язок:

З умови узгодженості опорів випливає, що вхідний $R_{вх}$ і вихідний $R_{вих}$ опір системи пов'язані з шуканими опорами r_e і $r_н$ таким чином:

$$\begin{aligned} R_{вх} &= r_e; \\ R_{вих} &= r_н. \end{aligned} \qquad (14.1)$$

Вхідний та вихідний опори системи знаходимо через алгебраїчні доповнення та визначник заданої матриці провідності системи Y_c:

$$R_{вх} = \frac{r_н \Delta_{\alpha\alpha} + \Delta_{\alpha\alpha,\beta\beta}}{r_н \Delta + \Delta_{\beta\beta}}; \qquad (14.2)$$

$$R_{вих} = \frac{r_e \Delta_{\beta\beta} + \Delta_{\alpha\alpha,\beta\beta}}{r_e \Delta + \Delta_{\alpha\alpha}}, \qquad (14.3)$$

де α, β - вхідний і вихідний вузол, відповідно (другий вузол кожної із сторін системи є базисним вузлом 0).

Підставивши (14.2) і (14.3) в (14.1), отримуємо систему двох рівнянь щодо шуканих опорів r_e і $r_н$:

$$\begin{cases} r_e = \dfrac{r_н \Delta_{\alpha\alpha} + \Delta_{\alpha\alpha,\beta\beta}}{r_н \Delta + \Delta_{\beta\beta}}; \\ r_н = \dfrac{r_e \Delta_{\beta\beta} + \Delta_{\alpha\alpha,\beta\beta}}{r_e \Delta + \Delta_{\alpha\alpha}}. \end{cases} \tag{14.4}$$

Виконуємо підстановку другого рівняння системи (14.4) у перше і вирішуємо отримане рівняння відносно r_e :

$$r_e = \frac{\dfrac{r_e \Delta_{\beta\beta} + \Delta_{\alpha\alpha,\beta\beta}}{r_e \Delta + \Delta_{\alpha\alpha}} \Delta_{\alpha\alpha} + \Delta_{\alpha\alpha,\beta\beta}}{\dfrac{r_e \Delta_{\beta\beta} + \Delta_{\alpha\alpha,\beta\beta}}{r_e \Delta + \Delta_{\alpha\alpha}} \Delta + \Delta_{\alpha\alpha}}; \rightarrow$$

$$\rightarrow r_e = \frac{\Delta_{\alpha\alpha}\left(r_e \Delta_{\beta\beta} + \Delta_{\alpha\alpha,\beta\beta}\right) + \Delta_{\alpha\alpha,\beta\beta}\left(r_e \Delta + \Delta_{\alpha\alpha}\right)}{\Delta\left(r_e \Delta_{\beta\beta} + \Delta_{\alpha\alpha,\beta\beta}\right) + \Delta_{\alpha\alpha}\left(r_e \Delta + \Delta_{\alpha\alpha}\right)}; \rightarrow \tag{14.5}$$

$$\rightarrow r_e = \frac{r_e A + B}{r_e C + A}; \quad \rightarrow \quad r_e^2 C = B; \quad \rightarrow \quad r_e = \sqrt{\frac{B}{C}},$$

де

$$\begin{aligned} A &= \Delta_{\alpha\alpha} \cdot \Delta_{\beta\beta} + \Delta_{\alpha\alpha,\beta\beta} \cdot \Delta; \\ B &= 2\Delta_{\alpha\alpha} \cdot \Delta_{\alpha\alpha,\beta\beta}; \\ C &= 2\Delta \cdot \Delta_{\beta\beta}. \end{aligned} \tag{14.6}$$

Розраховуємо алгебраїчні доповнення $\Delta_{\alpha\alpha}, \Delta_{\beta\beta}, \Delta_{\alpha\alpha,\beta\beta}$, які входять до (14.6) та визначник Δ :

$Y_c = \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} \alpha & 1 & \beta \end{array} \\ \begin{array}{c} \alpha \\ 1 \\ \beta \end{array} & \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 4 & 2 & -0,5 \\ -5 & -0,5 & 0,5 \end{bmatrix} \end{array}$	$\Delta_{\alpha\alpha} = \left[2 \cdot 0,5 - (-0,5)\cdot(-0,5)\right]\cdot(-1)^{1+1} = 0,75;$ $\Delta_{\beta\beta} = \left[1\cdot 2 - (-1)\cdot 4\right]\cdot(-1)^{3+3} = 6;$ $\Delta_{\alpha\alpha,\beta\beta} = 2\cdot(-1)^{(1+3)+(1+3)} = 2;$ $\Delta = 1\cdot\Delta_{\alpha\alpha} + (-1)\cdot\Delta_{\alpha 1} = 0,75 - \left[4\cdot 0,5 - 5\cdot 0,5\right]\cdot(-1)^{1+2} = 0,25.$

Підставляємо B і C з (14.6) в останнє співвідношення (14.5) і, використовуючи розраховані значення $\Delta_{\alpha\alpha}, \Delta_{\beta\beta}, \Delta_{\alpha\alpha,\beta\beta}$ і Δ, знаходимо r_e :

$$r_e = \sqrt{\frac{B}{C}} = \sqrt{\frac{\Delta_{\alpha\alpha}\cdot\Delta_{\alpha\alpha,\beta\beta}}{\Delta\cdot\Delta_{\beta\beta}}} = \sqrt{\frac{0,75\cdot 2}{0,25\cdot 6}} = 1\ Ом. \tag{14.7}$$

Підставляємо (14.7) у друге рівняння системи (14.4) і знаходимо $r_н$:

$$r_н = \frac{r_e\Delta_{\beta\beta} + \Delta_{\alpha\alpha,\beta\beta}}{r_e\Delta + \Delta_{\alpha\alpha}} = \frac{6+2}{0,25+0,75} = 8\ Ом. \tag{14.8}$$

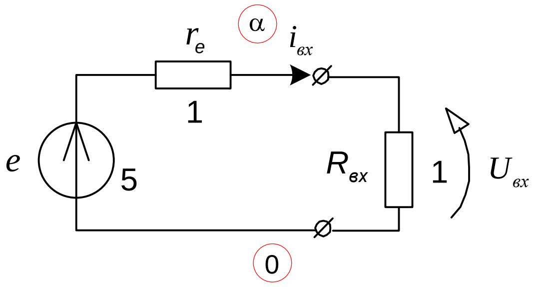
Потужність у навантаженні $P_н$ знаходимо за формулою:

$$P_н = \frac{u_{вых}^2}{r_н} \tag{14.9}$$

Для визначення вихідної напруги $u_{вых}$ розраховуємо коефіцієнт передачі напруги системи K_u:

$$K_u = \frac{u_{вих}}{u_{вх}} = \left.\frac{r_н\Delta_{\alpha\beta}}{r_н\Delta_{\alpha\alpha} + \Delta_{\alpha\alpha,\beta\beta}}\right|_{\Delta_{\alpha\beta}=8} = \frac{8\cdot 8}{8\cdot 0,75+2} = 8. \tag{14.10}$$

Вхідна напруга системи $u_{вх}$ дорівнює половині напруги джерела, так як вхідний опір системи $R_{вх}$ та опір джерела r_e однакові, з'єднані послідовно та утворюють дільник напруги (див. рисунок 14.1). Тоді з (14.10) маємо:



(а)

$$u_{вх} = e\frac{R_{вх}}{R_{вх}+r_e} = 5\frac{1}{1+1} = 2,5\ В.$$

(б)

Рис. 14.1. (а) вхідний контур системи з двома сторонами, представлений як дільник напруги; (б) розрахунок вхідної напруги системи..

$$u_{вих} = K_u \cdot u_{вх}\Big|_{u_{вх}=\frac{e}{2}=2,5} = 8\cdot 2,5 = 20\ В. \tag{14.11}$$

Підставляємо знайдене $u_{вих}$ в (14.9) і знаходимо потужність $P_н$, споживану навантаженням:

$$P_н = \frac{u_{вих}^2}{r_н} = \frac{20^2}{8} = 50\ Вт. \tag{14.12}$$

Задача 2.

Зобразити (синтезувати) схему з двополюсних компонентів, яка має такі ж електричні властивості, як і система з двома сторонами із задачі 1.

Розв' язок:

Оскільки коефіцієнт передачі напруги системи з двома сторонами більше одиниці, то еквівалентна схема, що шукається, повинна містити крім опорів ще й залежне джерело одного з чотирьох типів: джерело струму кероване струмом або напругою або джерело напруги кероване струмом або напругою.

Найпростішою структурою, на основі якої можна утворити таку схему, може бути, наприклад, трикутник опорів і джерело струму, кероване напругою, як показано на рисунку 14.2. Значення опорів r_1, r_2, r_3 і керуючого параметра залежного джерела струму g, є невідомими. Їх визначаємо з умови еквівалентності запропонованої схеми та заданої системи з двома сторонами.

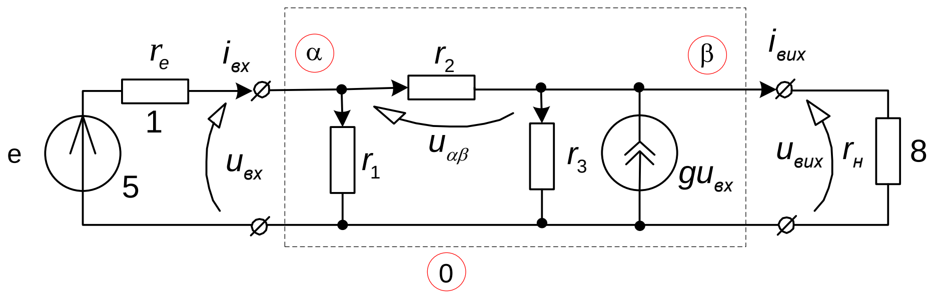


Рис. 14.2. Найпростіша схема із залежним джерелом струму, керованим напругою.

Схему, розташовану всередині "чорної скриньки", представимо як систему з двома сторонами і запишемо рівняння системи, виразивши струми $i_{вх}$, $i_{вих}$ через напруги $u_{вх}$, $u_{вих}$:

$$\begin{aligned} i_{вх} &= g_1 u_{вх} + g_2 u_{\alpha\beta}\Big|_{u_{\alpha\beta}=u_{вх}-u_{вих}} = (g_1+g_2)u_{вх} - g_2 u_{вих}; \\ i_{вих} &= g u_{вх} - g_3 u_{вих} + g_2 u_{\alpha\beta} = (g+g_2)u_{вх} - (g_2+g_3)u_{вих}. \end{aligned} \tag{14.13}$$

В результаті отримуємо рівняння системи у y-параметрах.

Значення y -параметрів вихідної системи розраховуємо за заданою матрицею провідності Y_c:

$$[y]=\begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{bmatrix}=\frac{1}{\Delta_{\alpha\alpha,\beta\beta}}\begin{bmatrix} \Delta_{\beta\beta} & -\Delta_{\beta\alpha} \\ \Delta_{\alpha\beta} & -\Delta_{\alpha\alpha} \end{bmatrix}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 6 & -0{,}5 \\ 8 & -0{,}75 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 3 & -0{,}25 \\ 4 & -0{,}375 \end{bmatrix} \quad (14.14)$$

Прирівнявши відповідні y-параметри з (14.13) і (14.14), отримуємо таку систему з чотирьох рівнянь:

$$\begin{cases} g_1+g_2=3; \\ g_2=0{,}25; \\ g+g_2=4; \\ g_2+g_3=0{,}375. \end{cases} \quad (14.15)$$

Розв’язуємо рівняння методом підстановки:

$$\begin{cases} g=4-g_2=3{,}75\ См; \\ g_3=0{,}375-g_2=0{,}125\ См; \\ g_1=3-g_2=3-0{,}25=2{,}75\ См. \end{cases} \quad (14.16)$$

Виражаємо невідомі опори через знайдені провідності:

$$\begin{cases} r_2=\dfrac{1}{g_2}=\dfrac{1}{0{,}25}=4\ Ом; \\ r_3=\dfrac{1}{g_3}=\dfrac{1}{0{,}125}=8 Ом; \\ r_1=\dfrac{1}{g_1}=\dfrac{1}{2{,}75}=0{,}(36)\ Ом. \end{cases} \quad (14.17)$$

В результаті маємо еквівалентну схему з відомими номіналами компонентів, зображену на рисунку 14.3.

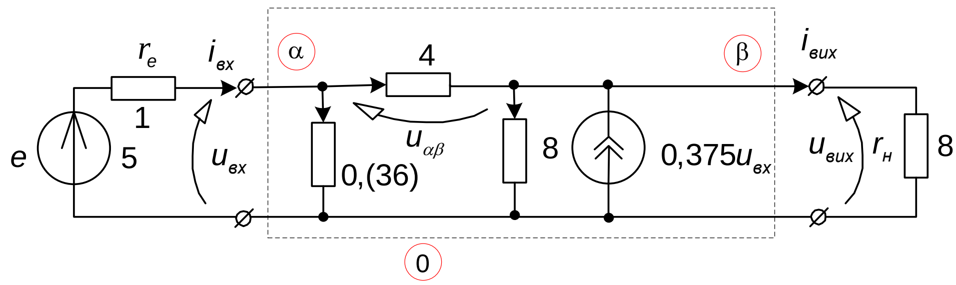


Рис. 14.3. Схема, еквівалентна вихідній системі з двома сторонами з реальним джерелом на вході та навантаженням на виході.

Для перевірки отриманих результатів складемо матрицю провідності системи на рисунку 14.2 і підставимо знайдені числові значення (14.16)

$$Y_c = \begin{array}{c} \\ \alpha \\ \beta \end{array} \!\!\! \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \alpha & \beta \end{array} \\ \begin{bmatrix} g_1 + g_2 & -g_2 \\ -g - g_2 & g_2 + g_3 \end{bmatrix} \end{array} = \begin{array}{c} \\ \alpha \\ \beta \end{array} \!\!\! \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \alpha & \beta \end{array} \\ \begin{bmatrix} 3 & -0,25 \\ -4 & 0,375 \end{bmatrix} \end{array} \tag{14.18}$$

Знайдемо напругу на виході:

$$R_{вх} = \frac{r_н \Delta_{\alpha\alpha} + \Delta_{\alpha\alpha,\beta\beta}}{r_н \Delta + \Delta_{\beta\beta}} = \frac{8 \cdot 0{,}375 + 1}{8 \cdot 0{,}125 + 3} = 1\,Ом.$$

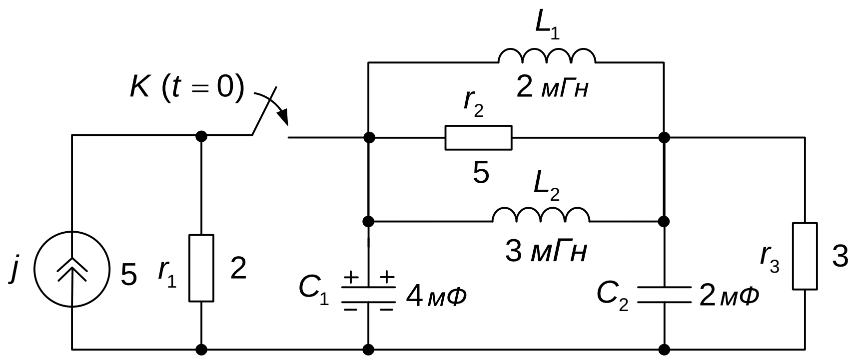
$$u_{вх} = e\frac{R_{вх}}{r_e + R_{вх}} = 5\frac{1}{2} = 2{,}5\ В;$$

$$u_{вих} = K_u u_{вх} = \frac{r_н \Delta_{\alpha\beta}}{r_н \Delta_{\alpha\alpha} + \Delta_{\alpha\alpha,\beta\beta}} u_{вх} = \frac{8 \cdot 4 \cdot 2{,}5}{8 \cdot 0{,}375 + 1} = 20\ \ В,$$

що співпадає з раніше знайденим значенням.

https://everycircuit.com/circuit/6526720494272512

Задача 3.



У початковий момент часу $t = 0$ (момент замикання ключа К) в електричному полі ємності C1 запасено 8 Дж енергії. Запас енергії в інших компонентах відсутній. Скільки енергії запасе кожен реактивний компонент схеми протягом перехідного процесу, що виникає після замикання ключа?

<u>Розв' язок:</u>

Після закінчення перехідних процесів, що виникають внаслідок підключення реального джерела струму, настане усталений стан, за якого всі струми і напруги матимуть деякі постійні значення. У цьому випадку струм через кожну з ємностей дорівнює нулю при будь-якій постійній напрузі на ній, і напруга на кожній з індуктивностей дорівнює нулю при будь-якому постійному струмі, оскільки полюсні струми і напруги на реактивних двополюсниках пов'язані такими співвідношеннями:

$$i_C = C\frac{du_c}{dt}\bigg|_{u_c=const} = 0;$$
$$u_L = L\frac{di_L}{dt}\bigg|_{i_L=const} = 0. \quad (14.19)$$

Тоді кожну з ємностей в усталеному стані можна замінити розімкнутою дугою, а кожну індуктивність - короткозамкненою дугою. В результаті вихідна схема стане резистивною, як показано на рисунку 14.4а.

Напруга на опорі r_2 дорівнює нулю і, отже, його можна прибрати зі схеми, а паралельні короткозамкнуті дуги можна замінити однією короткозамкненою дугою. В результаті отримуємо схему, наведену на рисунку 14.4б.

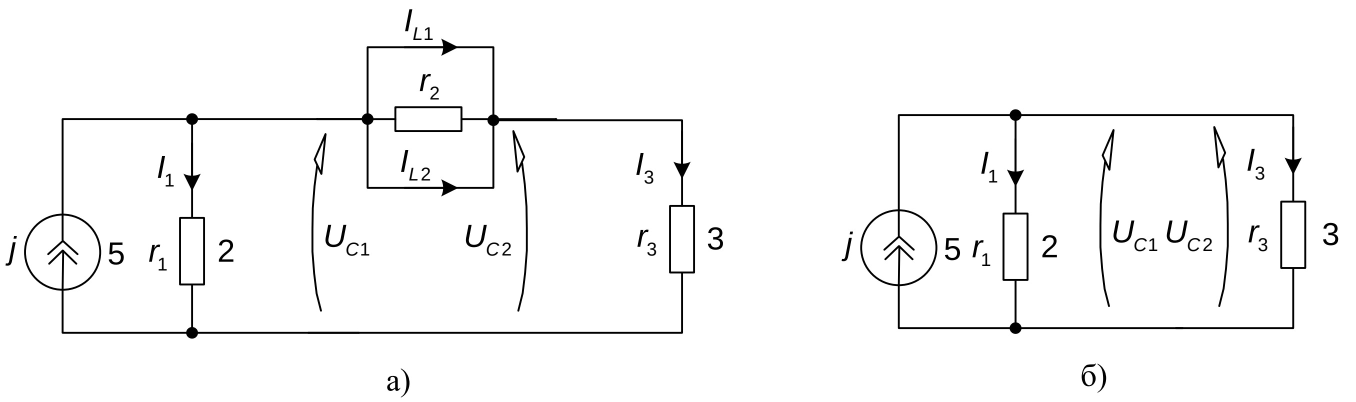


Рис. 14.4. Исходная схема после окончания переходных процессов

Замінивши паралельно з'єднані опори r_1, r_3 одним еквівалентним і помноживши його на струм джерела j, отримаємо:

$$U_{C1} = U_{C2} = j\frac{r_1 r_3}{r_1 + r_3} = 5\frac{2\cdot 3}{2+3} = 6\,B. \quad (14.20)$$

Розраховуємо енергію, запасену в електричному полі ємностей c_1, c_2:

$$W_{C1} = \frac{c_1 U_{C1}^2}{2} = \frac{4\cdot 10^{-3} 36}{2} = 72 \ \text{мДж};$$
$$W_{C2} = \frac{c_2 U_{C2}^2}{2} = \frac{2\cdot 10^{-3} 36}{2} = 36 \ \text{мДж}. \quad (14.21)$$

Знаходимо струм I_3:

$$I_3 = \frac{U_{C2}}{r_3} = 2\ A, \quad (14.22)$$

який за першим законом Кірхгофа, записаним для вузла схеми на рисунку 14.4а, дорівнює:

$$I_3 = I_{L1} + I_{L2} = 2\ A. \tag{14.23}$$

Індуктивності L_1, L_2 з'єднані паралельно, тому напруги на них однакові в будь-який момент часу, а їх потокозчеплення ψ_1, ψ_2 після закінчення перехідних процесів визначаються так:

$$\psi_1 = \psi_2 = \int_0^t U(\tau)d\tau \Big|_{t\to\infty} = L_1 I_{L1} = L_2 I_{L2}. \tag{14.24}$$

З (14.23) знаходимо $I_{L2} = 2 - I_{L1}$ і підставляємо в (14.24):

$$L_1 I_{L1} = L_2(2 - I_{L1}) \ \to I_{L1} = \frac{2L_2}{L_1 + L_2} = \frac{2\cdot 3\cdot 10^{-3}}{(2+3)\cdot 10^{-3}} = \frac{6}{5}\ A. \tag{14.25}$$

Тоді струм $I_{L2} = 2 - I_{L1} = 0{,}8\ A$. Знаходимо енергію, запасену в магнітному полі кожної індуктивності:

$$\begin{aligned} W_{L1} &= \frac{L_1 I_{L1}^2}{2} = \frac{2\cdot 10^{-3}}{2}\left(\frac{6}{5}\right)^2 = \frac{36}{25}\cdot 10^{-3} = 1{,}44\ мДж; \\ W_{L2} &= \frac{L_2 I_{L2}^2}{2} = \frac{3\cdot 10^{-3}}{2}\left(\frac{4}{5}\right)^2 = \frac{24}{25}\cdot 10^{-3} = 0{,}96\ мДж. \end{aligned} \tag{14.26}$$

Виконаємо перевірку результатів (14.26), знайшовши енергію W_e, запасену в магнітному полі еквівалентної індуктивності L_e:

$$L_e = \frac{L_1 L_2}{L_1 + L_2} = \frac{2\cdot 3\cdot 10^{-3}}{2+3} = \frac{6}{5}\ мГн \quad \to$$

$$W_e = \frac{L_e I_3^2}{2} = \frac{6}{5}\cdot 10^{-3}\cdot \frac{2^2}{2} = \frac{12}{5}\cdot 10^{-3} = 2{,}4\ мДж = W_{L1} + W_{L2}.$$

Загалом у магнітних полях індуктивностей та електричних полях ємностей запасеться $W_{L1} + W_{L2} + W_{C1} + W_{C2} = 110{,}4\ мДж$ енергії.

https://everycircuit.com/circuit/5254932024000512