

НАУКОВІ ВІСТІ

Національного технічного університету України
"Київський політехнічний інститут"

Науково–технічний журнал

№ 3(59)

2008

Започаткований у вересні 1997 року

Редакційна колегія:

Головний редактор
М.З. Згуровський

Заступник головного
редактора
М.Ю. Льченко

Відповідальний секретар
П.П. Маслянко

Члени редколегії –
координатори
наукових напрямків

М.І. Бобир

С.Г. Бунін

В.Ю. Горчаков

І.А. Дичка

О.В. Збруцький

І.В. Недін

Б.В. Новіков

О.М. Новіков

А.В. Праховник

Є.М. Письменний

Д.Ф. Чернега

О.Г. Юрченко

Ю.І. Якименко

Редакційна рада

Адреса редакції:
03056, Київ-56,
проспект Перемоги, 37,
Національний технічний
університет України
"Київський політехнічний
інститут",
Тел. 454-91-23

У номері:

Інформаційні технології,
системний аналіз та керування

Матеріалознавство
та машинобудування

Приладобудування та
інформаційно-вимірювальна
техніка

Проблеми біотехнології

Проблеми хімії та хімічної
технології

Теоретичні та прикладні проблеми
фізико-математичних наук

Засновник – Національний технічний університет України “Київський політехнічний інститут”
Свідоцтво про державну реєстрацію журналу – серія КВ № 2863, видане 26 вересня 1997 року

Рекомендовано Вченою Радою Національного технічного університету України
“Київський політехнічний інститут”, протокол № 7 від 25.06.08 р.

Члени редакційної ради (за галузями науки)

Фізико-математичні науки

| <i>Математика</i> | <i>Фізика</i> | <i>Механіка</i> | <i>Інформатика і кібернетика</i> |
|-------------------|----------------|-----------------|--------------------------------------|
| В.В. Булдігін | В.Г. Бар’яхтар | А.Е. Бабаєв | Ю.М. Данілін |
| Н.О. Вірченко | Ю.І. Горобець | С.О. Довгий | О.С. Макаренко |
| А.А. Дороговцев | В.М. Локтев | Я.Ф. Каюк | В.В. Остапенко |
| М.М. Кухарчук | С.І. Сидоренко | В.В. Матвеев | Н.Д. Панкратова |
| А.М. Самойленко | А.П. Шпак | Ю.М. Шевченко | В.М. Панін |

| <i>Хімічні науки</i> | <i>Біологічні науки</i> | <i>Технічні науки</i> | <i>Економічні науки</i> | |
|----------------------|-------------------------|-----------------------|-------------------------|------------------|
| О.О. Андрійко | Л.Б. Бондаренко | В.І. Губар | О.А. Павлов | О.Ф. Балацький |
| І.М. Астрелін | П.І. Гвоздяк | В.С. Коваленко | М.Г. Попович | В.Г. Герасимчук |
| А.К. Дорош | О.М. Дуган | В.І. Костюк | В.М. Прохоренко | Є.В. Крикавський |
| Ю.А. Малетін | Л.А. Лившиць | Ю.Ю. Лукач | Н.С. Равська | М.П. Панченко |
| А.А. Фокін | С.С. Малюта | Г.М. Любчик | В.О. Румбешта | Г.К. Яловий |
| | В.С. Підгорський | Є.А. Мачуський | В.І. Сенько | |
| | Ю.М. Сиволап | | В.П. Тарасенко | |
| | С.С. Ставська | | Я.К. Трохименко | |

Секретар редакції Л.Д. Калько

Редактор В.Г. Мельник

Графічний дизайн Б.В. Валуєнка
Комп’ютерна верстка О.М. Нестеренко

Підписано до друку 30.06.2008. Формат 60×84¹/8. Папір офс. Гарнітура Times.
Спосіб друку – ризографія. Ум. др. арк. 18,60. Обл.-вид. арк. 31,68. Зам. № Тираж 200 прим.

НТУУ “КПІ” ВПІ ВПК “Політехніка”. 03056, Київ, вул. Політехнічна, 14, корп. 15.
Тел./факс (044) 241-68-78

ЗМІСТ

Інформаційні технології, системний аналіз та керування

Ємець О.О., Устьян Н.Ю. Ітераційний метод розв'язування ігрових задач на перестановках 5

Кузнєцова Н.В., Бідюк П.І. Системний підхід до аналізу кредитних ризиків з використанням мереж Байєса 11

Маслянюк П.П., Стокоз К.В. Дослідження методів і розробка інтегрованих засобів доступу до інформаційних ресурсів інформаційно-комунікаційної системи 25

Матусов Ю.П. Застосування похідної Ф. Кларка у квазідиференціальних методах стохастичної оптимізації 33

Панкратова Н.Д., Радюк А.М. Розпізнавання позаштатної ситуації в динаміці функціонування техногенно небезпечного об'єкта 43

Повещенко Г.П. Конкуренція ідей за умови паритету 53

Романюк В.В. Тактика перебору чистих стратегій як теоретичне підґрунтя для дослідження ефективності різних способів реалізації оптимальних змішаних стратегій 61

Матеріалознавство та машинобудування

Коноплюк С.М. Композити на основі Ti_3SiC_2 з покращеними механічними властивостями 69

Скрипник С.В., Чернега Д.Ф. Відновлення шатуна гарячештампувального преса LZK 6500-380-960 електрошлаковим зварюванням 76

Приладобудування та інформаційно-вимірювальна техніка

Апостолюк О.С., Апостолюк В.О. До переходу від дискретних до неперервних полюсів лінійної інваріантної в часі динамічної системи за методом Проні 80

Гусинін В.П., Гусинін А.В. Синтез алгоритму оптимального керування рухом аеростатичного літального апарата на етапі зльоту 87

Котлярів В.П., Хамідреза Салаваті. Технічне забезпечення процедур лазерної терапії 96

Янкевич Г.Є., Малярів С.П., Цірук В.Г. Поліпшений метод найшвидшого спуску 104

Проблеми біотехнології

Григор'єва М.А., Клочко В.В., Тодосійчук Т.С. Оптимізація складу поживного середовища для біосинтезу ферментного комплексу продуцентом р. *Streptomyces* 111

Проблеми хімії та хімічної технології

Лавриненко О.М. Утворення ультрадисперсних феритів нікелю, міді та цинку в системі гальваноконтакту залізо–вуглець. 2. Аналіз колоїдно-хімічних механізмів утворення ультрадисперсних феритів у системі гальваноконтакту залізо–вуглець 119

Мельников Б.І., Василенко І.А., Астрелін І.М. Дослідження кінетики гомогенного гідролізу сульфату заліза(II) при наявності карбаміду 130

Теоретичні та прикладні проблеми фізико-математичних наук

Денисенко Н.Л. Асимптотичні властивості неперервних розв'язків систем диференціально-функціональних рівнянь з лінійними перетвореннями аргументу 135

Задоянчук Н.В., Касьянов П.О. Про розв'язність нелінійних еволюційних рівнянь II порядку з некоерцитивними W_{λ_0} -псевдомонотонними відображеннями 142

Кухарчук М.М., Яременко М.І. Квазілінійні рівняння другого порядку з матрицею Гільбарга–Серріна і нелінійні напівгрупи стиску. Частина 2. Побудова нелінійної напівгрупи стиску 150

Реферати 159

Автори номера 162

CONTENTS

Information technology, system analysis and guidance

Yemets O.O., Ustian N.Yu. Iteration Method for Solving Game Problems on the Arrangements..... 5

Kuznyetsova N.V., Bidyuk P.I. The System Approach to the Credit Risk Assessment Using Bayesian Networks 11

Maslyanko P.P., Stokoz K.V. Methods Research and Development of the Integrated Tools for Access to Information Resources of Information Communication System 25

Matusov Yu.P. Application of F. Clarke's Derivation in Quasi-Differential Methods of Stochastic Optimization 33

Pankratova N.D., Radjuk A.M. The Approach to Abnormal Situation Recognition in Dynamics of Man-Caused Dangerous Object Functioning 43

Poveshchenko G.P. Competition of Ideas in the Parity Conditions 53

Romanuke V.V. The Tactics of the Pure Strategies Selecting as a Theoretic Groundwork for Investigating the Efficiency of Diverse Ways of the Optimal Mixed Strategies Realization 61

Materials science and machine building

Konoplyuk S.M. Ti_3SiC_2 – Based Composites With Improved Mechanical Properties..... 69

Skrypnyk S.V., Chernega D.F. Renewal of Hot Stamping Press LZK 6500-380-960 Piston-Rod by Electroslag Welding 76

Instrument manufacturing and information measuring technology

Apostoliuk O.S., Apostoliuk V.O. To the Transition From Discrete to Continuous Poles of a Linear Time-Invariant Dynamic System Based on Prony's Method 80

Gusynin V.P., Gusynin A.V. Optimal Control Algorithm Synthesis of Aerostatic Vehicle Movement on the Take-Off Phase 87

Kotlyarov V.P., Hamidreza Salavati. Maintenance Engineering of Laser Therapy Procedures 96

Yankelevich G.Ye., Malyarov S.P., Tsiruk V.G. Improved Method of the Quickest Descent 104

Problems of biotechnologies

Grygorieva M.A., Klochko V.V., Todosiychuk T.C. Components Content Optimization of Nutrition Medium for Biosynthesis of Enzyme Complex by sp.*Streptomyces* Producer 111

Starovoitova S.O., Oryabinskaya L.B., Gorchakov V.Yu. Lactic Acid Bacteria as Biosorbents of Heavy Metals ... 108

Problems of chemistry and chemical engineering

Lavrynenko O.M. Formation of Ultradisperse Ferrites of Nickel, Copper, and Zinc in the Iron–Carbon Galvanocontact System. 2. Analysis of Colloidal-Chemical Mechanisms of Ultra-Disperse Ferrites Formation in the Iron–Carbon Galvanocontact System 119

Melnykov B.I., Vasylenko I.A., Astrelin I.M. Investigation of the Kinetics to Reactions of Joint Hydrolysis of the ferric Sulphate in Whiteness of Carbamide 130

Theoretical and applied problems of physics and mathematics

Denysenko N.L. Asymptotic Properties of Continuous Solutions for Systems of Differential-Functional Equations with Linear Argument Transformations 135

Zadoyanchuk N.V., Kasyanov P.O. On solvability for the second order nonlinear evolution equations with noncoercive W_{λ_0} -pseudomonotone maps 142

Kukharchuk M.M., Yaremenko M.I. The Second-Order Quasilinear Elliptic Equations with Gilbarg-Serrin Matrix and Nonlinear Contraction Semigroups. Part 2. Construction of Nonlinear Contraction Semigroups ... 150

Reports..... 159

Contributors to the issue..... 162

ІНФОРМАЦІЙНІ ТЕХНОЛОГІЇ, СИСТЕМНИЙ АНАЛІЗ ТА КЕРУВАННЯ

УДК 519.85

О.О. Ємець, Н.Ю. Устьян

ІТЕРАЦІЙНИЙ МЕТОД РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ІГРОВИХ ЗАДАЧ НА ПЕРЕСТАНОВКАХ

Вступ

Необхідність вибору оптимального в деякому розумінні варіанта поведінки в кожній ситуації зумовила створення великої кількості точних і наближених методів для розв'язування задач із різних розділів математики. Якщо визначимо, до якого класу належить та чи інша задача, то зможемо знайти її розв'язки, використовуючи потрібний метод.

Багато ситуацій описуються задачами оптимізації, і тоді для розв'язування таких задач можна використовувати, наприклад, методи дискретної [1–4] чи комбінаторної [5–15] оптимізації. Теорія ігор також використовує методи математичного програмування. Так, матричні ігри [16–20] зводяться до задач лінійного програмування, що дає змогу отримати їх точний розв'язок. При великих вимірностях задач або якщо точний розв'язок непотрібний, використовується наближений ітераційний метод Брауна–Робінсона.

У працях [21–24] було введено новий клас задач – задачі комбінаторної оптимізації ігрового типу, які є специфічними іграми з комбінаторними обмеженнями на використання гравцями своїх стратегій. Було запропоновано методи [21–24] для розв'язування таких задач, як графічний метод для певних вимірностей, метод комбінаторного відсікання для частково комбінаторних задач на перестановках (чи розміщеннях залежно від вигляду комбінаторних обмежень на стратегії гравців) та метод для знаходження оптимальної стратегії гравця в задачах, коли на стратегії другого гравця не накладаються комбінаторні обмеження [25]. Оскільки складність задач комбінаторної оптимізації ігрового типу залежить факторіально від вимірності, то вважається за доцільне досліджувати і модифікувати наближені методи для розв'язування цього класу задач, наприклад, використовувати ідеї ітераційного методу з класичної теорії ігор. Для ігрових задач комбінаторної оптимізації ігрового типу, які можуть реалізовуватись багато разів (наприклад, задача

розвезення хліба потребує розв'язання кожного дня), ітераційний метод дає змогу знаходити ймовірності застосування кожної можливої стратегії (з деякої комбінаторної множини).

Постановка задачі

У статті пропонується і обґрунтовується ітераційний метод, що за ідеєю близький до методу Брауна–Робінсона [17]), для знаходження розв'язків задач комбінаторної оптимізації ігрового типу з обмеженнями, які визначаються перестановками. Цей метод враховує специфіку розглянутих задач. Його робота ілюструється на прикладі.

Задачі комбінаторної оптимізації ігрового типу

У [24] було сформульовано і досліджено таку економічну задачу сільськогосподарського виробництва, яка є задачею комбінаторної оптимізації ігрового типу.

Задача 1. В районі є два фермерських господарства, які конкурують між собою. Вони вирощують сільськогосподарську продукцію і продають її на ярмарку восени. Перше господарство має m полів, на кожному з яких вирощуються різні культури. Поля різної площі, тому кількість кожної вирощеної культури залежить від того, на якому полі вона буде посаджена. Аналогічно, у другого господарства є n полів, на яких вирощується n різних культур. Прибутки обох виробників залежать від того, яку кількість кожної культури виростить кожне господарство. Треба розробити оптимальні обсяги вирощення культур обома господарствами.

Якщо у другого господарства немає обмежень на вирощування культур (тобто, наприклад, всі його поля знаходяться поряд, і можна припустити, що цей виробник може вирощувати таку кількість кожної культури, яку він вважатиме найбільш вигідною), то тоді в такій задачі комбінаторні обмеження на використання стратегій будуть тільки у першого виробника.

Розглянемо побудову математичної моделі такої задачі, як антагоністична гра двох осіб, в якій на стратегії одного гравця накладаються комбінаторні обмеження. Математичну модель будуватимемо таким же чином, як і для ще однієї задачі сільськогосподарського виробництва, яка також була сформульована в [24] і в якій одним гравцем є природа, що була теж названа антагоністичною грою. Єдиною від-

мінністю в нашій математичній моделі буде економічний зміст елементів платіжної матриці, а звідси – і вигляд оптимальних стратегій гравців. Вектори $P^x = (P_1^x, P_2^x, \dots, P_m^x)$ і $X = (x_1, x_2, \dots, x_m)$, останній з яких характеризує обсяги вирощування продукції першим господарством, такі самі, як і в моделі 1 з [24].

Нехай вектор $Y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ – мішана стратегія другого виробника – набір ймовірностей застосування кожної чистої стратегії. Оскільки y_j – ймовірності повної групи подій, то

$$\forall j \in J_n \quad y_j \geq 0; \quad \sum_{j=1}^n y_j = 1.$$

Складемо матрицю

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

У цій матриці елемент a_{ij} – різниця прибутків другого і першого виробників у тому випадку, коли б перше господарство вирощувало на всіх своїх полях тільки культуру типу i , а друге – тільки культуру типу j .

Нехай $F(X, Y)$ – функція прибутків, тобто різниця прибутків другого і першого виробників, якщо $X = (x_1, x_2, \dots, x_m)$ і $Y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$.

Вона буде мати вигляд $F(X, Y) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i y_j$.

Оптимальні стратегії гравців визначатимемо так, як і в класичній теорії ігор, беручи до уваги зміст коефіцієнтів платіжної матриці: другий гравець має мету за рахунок мішаних стратегій максимально збільшити свій мінімальний прибуток $F(X, Y)$, тобто треба знайти такі X і Y , за яких досягається нижня ціна гри:

$$\alpha = \max_{j \in J_n} \min_{i \in J_m} F(X, Y),$$

а перший гравець завдяки зміні компонент вектора $X = (x_1, x_2, \dots, x_m)$ прагне зробити свій максимальний програш мінімальним, тобто знайти верхню ціну гри:

$$\beta = \min_{i \in J_m} \max_{j \in J_n} F(X, Y).$$

Ми отримали таку математичну модель задачі: знайти оптимальні стратегії гравців X_{i_1} і

Y_{j_2} : X_{i_1} з виразу $F(X_{i_1}, Y_{j_1}) = \min_{i \in J_m} \max_{j \in J_n} F(X, Y)$,

а Y_{j_2} з виразу $F(X_{i_2}, Y_{j_2}) = \max_{j \in J_n} \min_{i \in J_m} F(X, Y)$,

де функція $F(X, Y)$ має вигляд $F(X, Y) =$

$$= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i y_j; \quad a_{ij} (\forall i \in J_m \quad \forall j \in J_n) - \text{задані чис-$$

ла, при обмеженнях: 1) $Y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ задо-

вольняє умови $\forall j \in J_n \quad y_j \geq 0, \quad \sum_{j=1}^n y_j = 1$; 2) $X =$

$= (x_1, x_2, \dots, x_m) \in E_m(P^x)$; 3) $P^x = (P_1^x, P_2^x, \dots, P_m^x)$

задовольняє умови $\forall i \in J_m \quad P_i^x \geq 0, \quad \sum_{i=1}^m P_i^x = 1$.

Розглянемо ще одну економічну задачу виробничого типу.

Задача 2. Два конкуруючих підприємства виробляють відповідно m і n сортів сиру. Перше підприємство виробляє продукцію в m цехах, і в кожному цеху вона є тільки одного сорту. В такому разі будемо вважати, що кількість виробленої продукції лінійно залежить від площі цеху. На другому підприємстві продукція виробляється на майже однаковому обладнанні, різні сорти сиру відрізняються тільки складовими та їх кількістю, тобто можна вважати, що підприємство може виробляти таку кількість кожного сорту продукції, яку воно вважатиме найбільш вигідною. Прибутки обох виробників залежать від того, яку кількість кожного сорту продукції виробить кожне підприємство. Треба розробити оптимальні обсяги випуску продукції обома підприємствами.

Дану задачу, як і попередню, можна розглядати як антагоністичну гру, в якій на стратегії одного гравця (першого підприємства) накладаються комбінаторні обмеження. Математична модель задачі 2 матиме такий самий вигляд, як і для задачі 1, відмінність буде лише в змісті елементів векторів P^x і X та елементів матриці A :

- елемент P_i^x вектора P^x – це відношення площі i -го цеху першого підприємства до суми площ всіх цехів першого підприємства;
- $X = (x_1, x_2, \dots, x_m)$ – вектор, який характеризує обсяги виготовлення сиру першим під-

приємством. Його компонента з номером i є відношенням кількості виробленого сиру сорту i до тієї кількості цієї продукції, яка була б вироблена, якщо б в усіх цехах виробляли лише цей сорт сиру, тобто показує, яку частину від максимально можливої кількості сиру сорту i виробили;

- елемент a_{ij} матриці A – це різниця прибутків другого та першого підприємств у тому випадку, якби перше підприємство виробляло в усіх своїх цехах тільки сорт сиру i , а друге – тільки сорт сиру j .

Задачі 1 і 2 мають однакоvu математичну модель (відрізняється лише зміст елементів векторів P^x і X та матриці A). Проте є ще одна відмінність. В задачі 1 сільськогосподарська продукція вирощується цілий рік, тобто оптимальні стратегії гравців потрібно знайти тільки раз. У задачі 2 сир можна вважати достатньо швидко реалізованою продукцією, яку потрібно виробляти постійно, тобто можна вважати, що ця гра може бути зіграна багато разів, а це означає, що оптимальною стратегією кожного з гравців може виявитися не одна стратегія, а деяка їх комбінація (можливо всіх). Для другого гравця поняття мішаної стратегії є відомим. Вектор $Y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ ми і вводили як мішану стратегію – набір ймовірностей застосування кожної чистої стратегії. З першим гравцем є складнощі, адже він не може використовувати чисті стратегії, а лише мішані стратегії з множини перестановок. Але оскільки з означення оптимальної стратегії гравця випливає, що при багатократному повторенні гри вона повинна забезпечувати гравцю максимально можливий середній виграш (чи мінімально можливий середній програш), тому має сенс ввести для першого гравця поняття ймовірностей застосування кожної можливої стратегії з множини перестановок. Отже, тепер замість оптимальної стратегії – вектора $X = (x_1, x_2, \dots, x_m) \in E_m(P^x)$ – будемо шукати вектор $K = (k_1, \dots, k_M)$ ймовірностей повторення кожної стратегії $X \in E_m(P^x)$. Тут $M = |E_m(P^x)|$ – кількість елементів у множині $E_m(P^x)$.

Розглянемо ітераційний метод знаходження оптимальної стратегії першого гравця в задачах 1 і 2. Всі обчислення будуть проводитись однаково для обох задач, відрізнятиметься тільки інтерпретація результату. Цей метод за

ідеєю близький до методу Брауна–Робінсона [17] для розв'язування класичних матричних ігор. Розрахунки робляться виходячи з припущення, що гравці прагнуть збільшити свій виграш (зменшити програш) та роблять ходи за принципом “майбутнє схоже на минуле”, враховують всі зроблені ходи.

Ітераційний метод знаходження оптимальної стратегії гравця, на стратегії якого накладаються комбінаторні обмеження, в задачах комбінаторної оптимізації ігрового типу

Кроки ітерації будемо заносити в таблицю, в якій N – номер кроку, X – вибрана стратегія першого гравця, B_1, B_2, \dots, B_n – стратегії другого гравця, B_1X, B_2X, \dots, B_nX – скалярний добуток векторів, $N\bar{v}$ – максимальний накопичений виграш (максимальне з накопичених скалярних добутків B_1X, \dots, B_nX , які зберігаються в рядку SUM), $\bar{v} = \frac{N\bar{v}}{N}$, j – вибрана стратегія другого гравця, $A_1, A_2, A_3, \dots, A_m$ – програш першого гравця для його чистої i -ї стратегії при вибраній стратегії другого; числа в рядку з назвою SUM – накопичені суми значень у попередньому рядку з назвою sum, Next X – вибрана стратегія першого гравця; $N\underline{v}$ – мінімальний накопичений програш (скалярний добуток елементів векторів SUM і Next X), $\underline{v} = \frac{N\underline{v}}{N}$, $v^* = \frac{\bar{v} + \underline{v}}{2}$.

Спочатку перший гравець вибирає довільно свою першу стратегію. Другий гравець аналізує виграш, який він отримує при кожній своїй стратегії, та вибирає стратегію з метою максимізувати виграш (починаючи з другої ітерації накопичений виграш) – значення в рядку SUM. У наведеному прикладі більший прибуток він отримує, якщо застосує свою першу чисту стратегію (при першій стратегії отримує 5,7, а при другій – 4,7). Перший гравець вибирає свою наступну стратегію Next X , яка б мінімізувала програш (починаючи з другої ітерації накопичений програш) – скалярний добуток елементів векторів SUM і Next X . Такий процес продовжується й далі.

Якщо перший гравець зробив S ходів, то другий вибирає свою стратегію j_S з метою, щоб

максимізувати накопичений виграш – максимальне із значень відповідного рядка SUM. Перший гравець на кроці $S+1$ вибирає свою стратегію $\text{Next } X_{S+1}$ таким чином, щоб мінімізувати накопичений програш – скалярний добуток елементів вектора $\text{Next } X_{S+1}$ і відповідного рядка SUM.

Розглянемо роботу ітераційного методу на прикладі. Нехай за умовою $m = 3, n = 2$ $P^x =$

$$= \{0, 2; 0, 3; 0, 5\}, \quad A = \begin{pmatrix} 8 & 6 \\ 7 & 4 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}. \quad \text{В таблицю будемо}$$

заносити результати розрахунків на кожній ітерації методу. За першу стратегію першого гравця виберемо стратегію довільно – наприклад, $(0, 2; 0, 5; 0, 3)$.

Можна помітити, що на 36-й ітерації методу максимальний накопичений виграш одна-

Таблиця. Розв'язування ігрової задачі ітераційним методом

| N | X | B_1 | $B_1 X$ | B_2 | $B_2 X$ | $N\bar{v}$ | \bar{v} | j | A_1 | A_2 | A_3 | $N\underline{v}$ | \underline{v} | v^* |
|-----|-----|-------|--------------|-------|--------------|------------|--------------|----------|-------|------------|------------|------------------|-----------------|--------------|
| 1 | 0,2 | 8 | 1,6 | 6 | 1,2 | | | 1 | 8 | 7 | 2 | | | |
| | 0,5 | 7 | 3,5 | 4 | 2 | | | sum | 8 | 7 | 2 | 17 | | |
| | 0,3 | 2 | 0,6 | 5 | 1,5 | | | SUM | 8 | 7 | 2 | 4,7 | 4,7 | 5,2 |
| | sum | | 5,7 | | 4,7 | | | Next X | 0,2 | 0,3 | 0,5 | | | |
| | SUM | | 5,7 | | 4,7 | 5,7 | 5,7 | | | | | | | |
| 2 | 0,2 | 8 | 1,6 | 6 | 1,2 | | | 1 | 8 | 7 | 2 | | | |
| | 0,3 | 7 | 2,1 | 4 | 1,2 | | | sum | 8 | 7 | 2 | 17 | | |
| | 0,5 | 2 | 1 | 5 | 2,5 | | | SUM | 16 | 14 | 4 | 9,4 | 4,7 | 4,95 |
| | sum | | 4,7 | | 4,9 | | | Next X | 0,2 | 0,3 | 0,5 | | | |
| | SUM | | 10,4 | | 9,6 | 10,4 | 5,2 | | | | | | | |
| 3 | 0,2 | 8 | 1,6 | 6 | 1,2 | | | 1 | 8 | 7 | 2 | | | |
| | 0,3 | 7 | 2,1 | 4 | 1,2 | | | sum | 8 | 7 | 2 | 17 | | |
| | 0,5 | 2 | 1 | 5 | 2,5 | | | SUM | 24 | 21 | 6 | 14,1 | 4,7 | 4,867 |
| | sum | | 4,7 | | 4,9 | | | Next X | 0,2 | 0,3 | 0,5 | | | |
| | SUM | | 15,1 | | 14,5 | 15,1 | 5,033 | | | | | | | |
| 4 | 0,2 | 8 | 1,6 | 6 | 1,2 | | | 1 | 8 | 7 | 2 | | | |
| | 0,3 | 7 | 2,1 | 4 | 1,2 | | | sum | 8 | 7 | 2 | 17 | | |
| | 0,5 | 2 | 1 | 5 | 2,5 | | | SUM | 32 | 28 | 8 | 18,8 | 4,7 | 4,825 |
| | sum | | 4,7 | | 4,9 | | | Next X | 0,2 | 0,3 | 0,5 | | | |
| | SUM | | 19,8 | | 19,4 | 19,8 | 4,95 | | | | | | | |
| 5 | 0,2 | 8 | 1,6 | 6 | 1,2 | | | 1 | 8 | 7 | 2 | | | |
| | 0,3 | 7 | 2,1 | 4 | 1,2 | | | sum | 8 | 7 | 2 | 17 | | |
| | 0,5 | 2 | 1 | 5 | 2,5 | | | SUM | 40 | 35 | 10 | 23,5 | 4,7 | 4,8 |
| | sum | | 4,7 | | 4,9 | | | Next X | 0,2 | 0,3 | 0,5 | | | |
| | SUM | | 24,5 | | 24,3 | 24,5 | 4,9 | | | | | | | |
| ⋮ | | | | | | | | | | | | | | |
| 36 | 0,2 | 8 | 1,6 | 6 | 1,2 | | | 2 | 6 | 4 | 5 | | | |
| | 0,3 | 7 | 2,1 | 4 | 1,2 | | | sum | 6 | 4 | 5 | 15 | | |
| | 0,5 | 2 | 1 | 5 | 2,5 | | | SUM | 228 | 162 | 162 | 175,2 | 4,867 | 4,867 |
| | sum | | 4,7 | | 4,9 | | | Next X | 0,2 | 0,5 | 0,3 | | | |
| | SUM | | 175,2 | | 175,2 | 175,2 | 4,867 | | | | | | | |

ковий (175,2) при застосуванні будь-якої стратегії, тому другий гравець може вибирати будь-яку стратегію. Для першого гравця в рядку SUM також стоять два однакових числа (228, 162, 162), а мінімальний накопичений програш дорівнює 175,2, тобто становить максимальний накопичений вигреш другого гравця. На цьому кроці можна зупинити розрахунки – коли всі стратегії супротивника забезпечують приблизно однаковий вигреш (прогреш) для якогось гравця.

Після 36-ї ітерації методу виявилось, що стратегія (0, 2; 0, 5; 0, 3) першого гравця використовувалась шість разів, а стратегія (0, 2; 0, 3; 0, 5) – тридцять разів, тому ймовірність застосування стратегії (0, 2; 0, 5; 0, 3) становить 1/6, а стратегії (0, 2; 0, 3; 0, 5) – 5/6.

Тепер, якщо ми знаходили розв'язок задачі 1, то оптимальною стратегією першого гравця X_{i_1} буде стратегія з максимальною ймовірністю, тобто стратегія (0, 2; 0, 3; 0, 5). Якщо розв'язували задачу 2, то тоді в оптимальній стратегії першого гравця стратегія (0, 2; 0, 5; 0, 3) ви-

користується з ймовірністю 1/6, стратегія (0, 2; 0, 3; 0, 5) – 5/6, а ймовірності застосування всіх інших стратегій дорівнюють 0.

Висновки

У задачах комбінаторної оптимізації ігрового типу для знаходження оптимальної стратегії гравця, на стратегії якого накладаються комбінаторні обмеження, що визначаються перестановками, можна використовувати обґрунтований у цій статті ітераційний метод. Він не тільки враховує специфіку задач комбінаторної оптимізації ігрового типу, а й може використовуватися для задач великої вимірності, що дуже важливо, оскільки складність таких задач факторіально зростає із збільшенням вимірності.

Подальші дослідження можуть бути направлені на розробку наближених методів для знаходження оптимальних стратегій гравців в інших задачах даного класу (наприклад, в задачах, в яких на стратегії одного або обох гравців накладаються комбінаторні обмеження, що визначаються розміщеннями).

О.А. Емец, Н.Ю. Устьян

ИТЕРАЦИОННЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ИГРОВЫХ ЗАДАЧ НА ПЕРЕСТАНОВКАХ

Предлагается и обосновывается метод, который можно использовать в задачах комбинаторной оптимизации игрового типа для нахождения оптимальной стратегии игрока, на стратегии которого накладываются комбинаторные ограничения, определяемые перестановками.

O.O. Yemets, N.Yu. Ustian

ITERATION METHOD FOR SOLVING GAME PROBLEMS ON THE ARRANGEMENTS

This paper proposes a novel method, used to find a player's optimal strategy considering the combinatorial restrictions determined by arrangements in the optimization combinatorial problems of the game type.

1. Сергиенко И.В., Каспищкая М.Ф. Модели и методы решения на ЭВМ комбинаторных задач оптимизации. – К.: Наук. думка, 1981. – 288 с.
2. Сергиенко И.В., Шило В.П. Задачи дискретной оптимизации: проблемы, методы исследования, решения. – К.: Наук. думка, 2003. – 264 с.
3. Панишев А.В., Данильченко О.М., Скачков В.О. Вступ до теорії складності дискретних задач. – Житомир: ЖДТУ, 2004. – 236 с.
4. Панишев А.В., Плечистый Д.Д. Модели и методы оптимизации в проблеме коммивояжера. – Житомир: ЖГТУ, 2006. – 300 с.
5. Емец О.А. Евклидовы комбинаторные множества и оптимизация на них. Новое в математическом программировании: Учеб. пособие. – К.: УМК ВО, 1992. – 92 с.
6. Стоян Ю.Г., Емец О.О. Теорія і методи евклідової комбінаторної оптимізації. – К.: ІСДО, 1993. – 188 с.
7. Стоян Ю.Г., Емец О.О., Емец Є.М. Оптимізація на полірозміщеннях: теорія та методи. – Полтава: РВЦ ПУСКУ, 2005. – 103 с.
8. Емец О.О., Колечкіна Л.М. Задачі комбінаторної оптимізації з дробово-лінійними цільовими функціями. – К.: Наук. думка, 2005. – 118 с.
9. Емец О.О., Роскладка О.В. Задачі оптимізації на полікомбінаторних множинах: властивості та розв'язування. – Полтава: РВЦ ПУСКУ, 2006. – 128 с.

10. Гуляницький Л.Ф. Розробка моделей і наближених методів комбінаторної оптимізації та їх застосування в інформаційних технологіях: Автореф. дис. ...докт. техн. наук (01.05.02). – К.: Ін-т кібернетики ім. В.М.Глушкова НАН України, 2005. – 32 с.
11. Гребеннік І.В. Математичні моделі та методи комбінаторної оптимізації в геометричному проектуванні: Автореф. дис. ...докт. техн. наук (01.05.02). – Харків: Ін-т проблем машинобудування ім. А.М. Підгорного, 2006. – 34 с.
12. Емец О.А. Об одном методе отсечения для задач комбинаторной оптимизации // Экономика и мат. методы. – 1997. – 33, вып. 4. – С. 120–129.
13. Ємець О.О., Ємець Є.М. Відсікання в лінійних частково комбінаторних задачах евклідової комбінаторної оптимізації // Доп. НАН України. – 2000. – № 9. – С. 105–109.
14. Емец О.А., Роскладка Е.В. Решение некоторых евклидовых комбинаторных задач оптимизации методом динамического программирования // Кибернетика и систем. анализ. – 2002. – № 1. – С. 138–146.
15. Барболина Т.Н., Емец О.А. Полностью целочисленный метод отсечения для решения линейных условных задач оптимизации на размещениях // Журн. вычисл. математики и мат. физики. – 2005. – 45, № 2. – С. 254–261.
16. Фон Нейман Дж., Моргенштерн О. Теория игр и экономическое поведение. – М.: Наука, 1970. – 780 с.
17. Вентцель Е.С. Элементы теории игр. Изд. 2-е, стереотип. – М.: Физматгиз, 1961. – 67 с.
18. Зайченко Ю.П. Исследование операций. – К.: Вища шк., 1979. – 392 с.
19. Крушевский А.В. Теория игр. – К.: Вища шк., 1977. – 216 с.
20. Петросян Л.А., Зенкевич Н.А., Семин Е.А. Теория игр. – М.: Высш. шк., 1998. – 304 с.
21. Емец О.А., Устьян Н.Ю. Решение некоторых задач комбинаторной оптимизации на размещениях и перестановках игрового типа // Пробл. управления и информатики. – 2006. – № 3. – С. 37–47.
22. Емец О.А., Устьян Н.Ю. Исследование задач комбинаторной оптимизации игрового типа на размещениях // Там же. – 2007. – № 1. – С. 26–36.
23. Емец О.А., Устьян Н.Ю. Задачи на перестановках игрового типа // Тез. докл. XIV Междунар. конф. "Проблемы теоретической кибернетики". – М.: Изд. мех.-мат. факультета МГУ, 2005. – С. 46.
24. Емец О.А., Устьян Н.Ю. Исследование математических моделей и методов решения задач на перестановках игрового типа // Кибернетика и систем. анализ. – 2007. – № 6. – С. 103–114.
25. Ємець О.О., Устьян Н.Ю. Розв'язування ігрових задач на переставленнях // Наукові вісті НТУУ "КПІ". – 2007. – № 3. – С. 47–52.

Рекомендована Радою
Навчально-наукового комплексу
"Інститут прикладного системного
аналізу" НТУУ "КПІ"

Надійшла до редакції
23 листопада 2007 року

УДК 62-50

Н.В. Кузнєцова, П.І. Бідюк

СИСТЕМНИЙ ПІДХІД ДО АНАЛІЗУ КРЕДИТНИХ РИЗИКІВ З ВИКОРИСТАННЯМ МЕРЕЖ БАЙЄСА

Вступ

Ефективність протікання фінансово-економічних процесів в Україні істотно залежить від раціональності використання і спрямування грошових потоків, накопичення грошових ресурсів, планування та перерозподілу “вільних коштів” між суб’єктами ринку. Все це вирішується на загальнодержавному рівні, однак кожний комерційний банк, який працює з конкретними клієнтами, має розв’язувати цю проблему самостійно в умовах ринкової кон’юнктури. Найважливіші аспекти стратегічної діяльності банків полягають у подоланні ризиків (кредитних, відсоткових, валютних, ліквідності тощо), які постійно виникають у банківській діяльності. Зараз існує потреба в якісному і кількісному аналізі ризиків, розробці інструментарію та методології аналізу, напрацюванні засобів та способів зниження ступеня ризиків. Найбільшу питому вагу в структурі банківських ризиків становлять кредитні ризики. Кредит є необхідним механізмом руху капіталу з одних галузей в інші для підтримки неперервності кругообігу фондів підприємств, обслуговування процесу реалізації товарів та вирішення соціальних проблем.

Окремі аспекти аналізу кредитоспроможності висвітлено в працях Н.І. Валенцева, Г.С. Панова, Г.І. Великоіваненко, В.В. Вітлінського, А.М. Мороза, Я.С. Наконечного, О.В. Пернарівського, М.І. Савлука, В.М. Федоренко. Питання ж аналізу кредитоспроможності індивідуальних позичальників залишаються поки що малодослідженими [1–3].

Постановка задачі

На основі аналізу особливостей процесу надання кредиту індивідуальним позичальникам запропоновані ефективні і раціональні засоби та підходи для прогнозування повернення кредиту. Математична постановка задачі передбачає визначення ймовірності неповернення кредиту PD_i залежно від вибраних характеристик позичальника.

Метою даної статті є проведення аналізу особливостей кредитних ризиків при роботі з індивідуальними позичальниками, дослідження іс-

нуючих підходів до розв’язання задачі зниження ризиків кредитування, з’ясування суттєвих змінних – характеристик клієнта, які впливають на повернення кредиту, побудова методології аналізу кредитного ризику на основі мереж Байєса та формулювання чіткої методики застосування мереж Байєса для конкретних задач, наведення прикладу використання запропонованої методики для конкретної задачі визначення кредитоспроможності позичальника.

Аналіз кредитних ризиків та способи їх зниження

Кредитний ризик (КР) – сукупність ймовірних небажаних подій при здійсненні фінансових угод, суть яких полягає в тому, що контрагент банку не зможе виконати взятих на себе за угодою зобов’язань і при цьому йому не вдасться скористатися наявними засобами захисту. Поняття кредитного ризику асоціюється не лише з процесом кредитування – він має відношення до всіх фінансових угод, для яких характерним є виникнення пари “кредиторська вимога–боргове зобов’язання”, тобто стосується кореспондентських рахунків для комерційного банку в інших банках, ринкових фінансових інструментів (свопи, форварди, ф’ючерси, опціони), операцій з цінними паперами, лізингових і факторингових операцій тощо. Сьогодні потребують аналізу багато чинників, такі, як вплив макроекономічних факторів і ризику кредитування фізичних осіб в Україні, ризики іпотечного кредитування на первинних ринках нерухомості, методи керування ринками портфеля роздрібних кредитів, керування ризиками в споживчому кредитуванні, типологія ризиків кредитного шахрайства тощо.

Методи (способи) зниження ризиків комерційних банків, як правило, поділяють на загальні і часткові. До загальних методів зниження ризиків комерційних банків можна віднести диверсифікацію кредитів, кредитування на консорційних засадах, страхування кредитів і депозитів, введення права застави, розширення переоблікових операцій, періодичну перевірку (контроль) кредитоспроможності позичальника [1]. До часткових методів належать визначення максимальних обсягів позики, яку доцільно надати певному позичальнику, застосування плаваючих відсоткових ставок, забезпечення раціонального рівня показників ліквідності, встановлення питомої ваги коштів одного вкладника в загальній сумі банківських депозитів, введення особливих умов у депозитні договори тощо.

Теоретичне дослідження, а надалі і впровадження конкретних методик керування ризиками в практику дає можливість поліпшувати функціонування комерційних банків та підвищувати ефективність усієї системи банківського менеджменту.

Кожний банк визначає власну кредитну політику із врахуванням всієї множини внутрішніх і зовнішніх ризиків, якими він обтяжений і які впливають на ефективність його діяльності з врахуванням також ставлення керівництва банку до ризику.

До найважливіших внутрішніх чинників, які визначають кредитну політику банку, належать [2]: кредитний потенціал банку; ступінь ризику і прибутковості окремих видів позик; стабільність депозитів; спектр виконуваних операцій і послуг; забезпеченість позик; професійна підготовленість, кваліфікація і досвід персоналу банку; клієнтура банку; цінова політика банку; практичне володіння персоналом банку теорією та інструментарієм економічного ризику.

Аналіз кредитоспроможності клієнтів є складною і досить делікатною справою. Банки використовують кілька джерел інформації: співбесіду з клієнтом банку; ведення банком власної картотеки потенційних та існуючих клієнтів; інспекцію клієнта; аналіз фінансової звітності; аналіз бізнес-планів; використання інформації про клієнтів, яку надають спеціалізовані фірми та інші фактори.

Керування кредитним ризиком має здійснюватися на засадах системного аналізу та адекватного врахування множини керованих і некерованих чинників – спиратися, зокрема, на якісний і кількісний аналіз кредитного ризику, раціонально вибрану (за прийнятною системою гіпотез) множину кількісних показників ступеня ризику та аналіз структури кредитного портфеля.

У сучасній українській банківській практиці неформальний аналіз кредитоспроможності індивідуальних позичальників застосовується дуже рідко. Причин тут кілька. По-перше, практика кредитування індивідуального позичальника ще не отримала значного поширення в нашій країні через відомі економічні причини. По-друге, в Україні донедавна не було практики аналізу кредитоспроможності клієнтів взагалі. По-третє, українські комерційні банки тільки починають розширювати практику кредитування індивідуальних позичальників, водночас вважаючи цю сферу діяльності більш ризикованою і менш при-

бутковою порівняно з кредитуванням юридичних осіб.

Кредитування індивідуальних позичальників насправді має специфічні риси, але рівень банківських ризиків не набагато вищий за ті, які виникають при кредитуванні юридичних осіб [1]. З іншого боку, відсутність достатнього досвіду кредитування населення, достатньо високий рівень виробничих витрат, пов'язаний з оформленням споживчих позичок, а також відсутність необхідної інформаційної бази для належної оцінки кредитоспроможності приватних позичальників не дозволяє сьогодні говорити про велике поширення в Україні практики кредитування індивідуальних позичальників. Важливим кроком у цьому напрямку повинна стати розробка методики аналізу кредитоспроможності індивідуальних позичальників, яка давала б можливість приймати рішення щодо надання чи відмови в кредиті швидко і без зайвих перевірок осіб позичальників.

Незалежно від прийнятої методики оцінки кредитоспроможності індивідуальних позичальників "жодна, навіть найбільш досконала методика аналізу кредитоспроможності позичальника, не дасть надійних результатів, якщо вихідна інформація буде недостатньо повною або ненадійною" [3], тому умовами зменшення ризику при кредитуванні є накопичення великого обсягу інформації, з'ясування того, яка інформація є важливою і доречною щодо позички і позичальника, та аналіз і правильна інтерпретація отриманої інформації.

В Україні певна практика оцінки кредитоспроможності позичальника існує, але переважно вона має формальний (документальний) характер. Робота з аналізу кредитоспроможності індивідуального позичальника передуює укладенню з ним кредитного договору і дає можливість визначити фактори ризику, які можуть призвести до непогашення наданої банком позички в обумовлений термін, і оцінити вірогідність своєчасного повернення позички.

Аналіз сучасної української практики кредитування індивідуальних позичальників показує, що найкращий метод оцінки кредитоспроможності можна визначити, тільки виходячи з специфічних умов кожної угоди. В Україні це проявляється особливо чітко, оскільки загальна нестабільність ринку, унікальність багатьох операцій і відсутність кредитних історій більшої частини позичальників роблять практично неможливим вироблення універсальних методів щодо визначення кредитоспроможності.

Методи оцінки кредитоспроможності

Здебільшого в Україні для задачі оцінки кредитоспроможності позичальника використовується або експертний підхід, або скоринговий. Експертний підхід передбачає, що спеціалісти в галузі кредитування індивідуальних позичальників визначають суттєві характеристики клієнта банку, які можуть впливати на повернення чи неповернення кредиту, співставляють цим характеристикам певні вагові характеристики. Для кожного клієнта по всіх характеристиках проставляються бали відповідно до ваг, встановлених експертами, та підраховується сума всіх балів. Для банку завчасно встановлюється певне порогове значення, яке визначає, що коли сума всіх балів менша цього значення, то клієнту не слід видавати кредит, а якщо більша, то клієнт може отримати кредит. Банком може бути встановлене ще одне значення (верхня межа), яке визначає, що коли сума балів більша встановленого значення, то клієнту можна видавати кредит без застороги. Якщо і верхня, і нижня межа щодо видачі кредиту задані, то значення між цими межами знаходяться в компетенції менеджера банку, який на власний розсуд визначає, чи видавати кредит клієнту чи ні. Зрозуміла суб'єктивність даного підходу як при встановленні балів (для одних експертів одні характеристики є більш важливими і мають більший вплив, для інших експертів – інші характеристики), так і при встановленні порогового та верхнього значення (не протестувавши певний час таку методику, не можна встановити точне порогове значення, та і з часом вплив характеристик, а тому і порогове значення, очевидно, мають змінюватись).

Скоринговий підхід ґрунтується на побудові математичної моделі оцінки кредитоспроможності позичальників на основі кредитних історій банку та оцінці ймовірності дефолту потенційного позичальника, виходячи з його соціально-демографічних характеристик. Маючи статистичні дані “хороших” і “поганих” кредитів за певний період, банк може визначити безпосередньо фактори (причини, характеристики), які створюють передумови для повернення чи неповернення кредиту, та для кожного нового клієнта на основі цих характеристик визначити його можливість повернути кредит. На початковому етапі скоринговий підхід ґрунтується все ж таки на експертному підході, адже необхідно насамперед визначити, які саме характеристики щодо клієнта потрібно збирати, як перевірити надані клієнтом дані та в процесі застосування скорингової моделі змінювати дані про клієнта, які збирає банк. Очевидно, що скорингову модель необхідно коригувати в процесі роботи (кожні два-три роки), оскільки ситуація в країні динамічно змінюється, з'являються певні зловмисники, які можуть прорахувати, які саме фіктивні дані потрібно надати банку, щоб скорингова модель визначила, що йому можна надати кредит. Саме тому вважаємо, що сумісне використання обох підходів дало б можливість полегшити процес прийняття рішення щодо видачі кредиту клієнту банком.

Використовуючи досвід у процесі підготовки і реалізації кредитної політики щодо індивідуальних позичальників, кожний комерційний банк може розробити власну бальну методику оцінки кредитоспроможності індивідуальних позичальників (табл. 1) [3].

Таблиця 1. Оцінка кредитоспроможності індивідуального позичальника українськими комерційними банками

| Показник | Значення (межа) | Бал | |
|---|-----------------|-----------------------------|----------------------------------|
| | | Рівень критеріїв | Фактичний |
| Сукупний річний доход, тис. грн | Менше 10 | 5 | Визначається для кожного клієнта |
| | 10–20 | 15 | |
| | 20–40 | 30 | |
| | 40–60 | 45 | |
| | Більше 60 | 60 | |
| у тому числі: річний доход одного члена родини (або число утриманців) | | Диференційовано по регіонах | Визначається для кожного клієнта |

Продовження табл. 1

| Показник | Значення (межа) | Бал | |
|--|--|------------------|----------------------------------|
| | | Рівень критеріїв | Фактичний |
| Щомісячні відрахування на погашення позички, % | Більше 40 | 0 | Визначається для кожного клієнта |
| | 30–40 | 5 | |
| | 20–30 | 20 | |
| | 10–20 | 35 | |
| | Менше 10 | 50 | |
| Борги потенційного позичальника | Більше 10% розміру позички | –20 | Визначається для кожного клієнта |
| | Менше 10% | –10 | |
| Період обслуговування в даному банку | До 1 року | 0 | Визначається для кожного клієнта |
| | 1–2 роки | 5 | |
| | 2–3 роки | 10 | |
| | 3–5 років | 25 | |
| | 5–10 років | 40 | |
| | 10 і більше років | 50 | |
| | Немає відповіді | 0 | |
| | Немає рахунку в даному банку | 0 | |
| Історія кредитних відносин | Будь-які порушення протягом останніх трьох років | –10 | Визначається для кожного клієнта |
| | Немає відомостей | 0 | |
| | Немає порушень | +30 | |
| Наявність банківських рахунків | Є тільки рахунок до запитання | 3 | Визначається для кожного клієнта |
| | Рахунок до запитання і ощадний | 50 | |
| | До запитання та інші рахунки | 40 | |
| | Тільки ощадний рахунок | 30 | |
| | Немає рахунків | 0 | |
| | Немає відповіді | 0 | |
| Володіння пластиковими картками (кредитними, дебетовими) | Немає | 0 | Визначається для кожного клієнта |
| | Одна або більше | 30 | |
| | Немає відповіді | 0 | |

Кінець табл. 1

| Показник | Значення (межа) | Бал | |
|---|--------------------------------------|------------------|----------------------------------|
| | | Рівень критеріїв | Фактичний |
| Вік позичальника | До 50 років | 5 | Визначається для кожного клієнта |
| | Більше 50 років | 25 | |
| | Немає відповіді | 0 | |
| Статус резидента | Власник квартири чи будинку | 50 | Визначається для кожного клієнта |
| | Купує квартиру чи будинок на виплату | 40 | |
| | Орендар | 15 | |
| | Проживає з батьками | 10 | |
| | Немає відповіді та інші варіанти | 5 | |
| Термін проживання за останньою адресою | До 1 року | 0 | Визначається для кожного клієнта |
| | 1–2 роки | 15 | |
| | 2–4 роки | 35 | |
| | Більше чотирьох років | 50 | |
| | Немає відповіді | 0 | |
| Термін роботи на одному підприємстві (посаді) | До 1 року | 5 | Визначається для кожного клієнта |
| | 1–2 роки | 20 | |
| | 2–4 роки | 50 | |
| | Більше чотирьох років | 70 | |
| | Пенсіонер | 70 | |
| | Непрацюючий | 5 | |
| | Немає відповіді | 0 | |
| Підсумок | Надання позички | Більше 300 | Визначається для кожного клієнта |
| | Експертна оцінка | 200–299 | |
| | Відмова надати позичку | Менше 200 | |

На основі наведеної методики будь-який комерційний банк має можливість створити єдиний інтегральний показник, в якому буде відображено зважене значення показників оцінки кредитоспроможності потенційних позичальників із врахуванням специфіки функціонування і власного бачення клієнтів. До того ж, можливе розширення списку показників за рахунок введення додаткових, важливих при наданні цільових кредитів (наприклад, на купівлю автомобіля – із врахуванням стажу водін-

ня, на купівлю квартири – із врахуванням вартості вже наявної нерухомості або цінного майна).

У разі необхідності банк може не визначати верхню межу для автоматичного надання кредиту і аналізувати всі кредитні заявки, які не були відхилені ним на етапі автоматичної відмови щодо надання індивідуальних позичок, застосовуючи при цьому експертну оцінку кредитоспроможності індивідуальних позичальників.

Ймовірнісні оцінки ризиків

Наш аналіз показав, що в Україні необхідно продовжити роботу щодо впровадження іноземного досвіду в частині мінімізації кредитного ризику через впровадження єдиних підходів до оцінки: а) кредитоспроможності індивідуальних позичальників; б) якості споживчих позичок; в) ділового ризику приватного клієнта.

Для оцінки кредитного ризику і фактичних втрат банку, які він зазнає внаслідок реалізації цього ризику, часто на практиці застосовується так званий IRB-підхід (IRB-approach – internal rated based approach) – оцінки втрат внаслідок дефолтів у рамках підходу на основі внутрішніх кредитних рейтингів. Даний підхід дає змогу розробити досить гнучкі математичні механізми вимірювання як очікуваних, так і неочікуваних втрат та оцінювати індивідуальний і портфельний кредитний ризик.

Основними показниками, якими характеризується обсяг потенційних втрат у рамках IRB-підходу [4], є:

- ймовірність дефолту позичальника (PD – probability of default), що набуває значень від 0 до 1, і чим більше значення матиме ймовірність дефолту, тим більша ймовірність неповернення клієнтом кредиту;
- експозиція під ризиком (CE – credit exposure) – сума кредитної заборгованості;
- покриття кредиту заставою (LGD – loss given default). Покриття кредиту набуває значень від 0 (кредит повністю покритий заставою) до 1 (кредит повністю не покритий заставою);
- строк кредиту (M – maturity).

Найбільш цікавим показником є *ймовірність дефолту*. Переважно всі дослідження щодо оцінки кредитного ризику ведуться саме в напрямку розробки механізму розрахунку ймовірності дефолту. На основі певних параметрів позичальника і кредиту x_i^j необхідно розробити процедуру оцінки ймовірності дефолту PD_i [4]:

$$PD_i = F(w^j, x_i^j),$$

де w^j – ваги параметрів x_i^j ; i – кількість позичальників; j – кількість параметрів кредиту.

Для розв'язання даної задачі можливим є використання двох підходів:

1) скорингового підходу (побудови математичної моделі на основі статистики дефолтів за попередні періоди);

2) експертного методу.

Більш адекватним, звичайно, є підхід на основі статистики дефолтів за попередні періоди, тобто побудова скорингової моделі. Проте даним підходом висуваються досить високі вимоги до статистики дефолтів:

- вибірка має бути одноманітною (позичальники повинні бути досить схожими);
- вибірка має складатися з певної кількості випадків – чим більше дефолтів, тим краще. За різними оцінками, для адекватності моделі найменший обсяг вибірки – не менше 2000 випадків;
- вибірка для побудови моделі має накопичуватися за досить обмежений час. Ця вимога викликана фактом зміни макроекономічного середовища. Позичальник із певними параметрами в одному макроекономічному середовищі без проблем виплачує кредит, а в іншому середовищі – виявиться дефолтом. Вважається, що в умовах країн, які розвиваються, модель оцінки ймовірності дефолту необхідно змінювати кожні два-три роки;
- необхідно накопичувати не лише кредитну історію позичальників (дефолт/недефолт), а й параметри цих позичальників – вік, стать, місце роботи, посаду, сім'ю тощо. Проблема полягає в тому, що спочатку невідомо, які саме параметри виявляються значущими в моделі. Тому на етапі побудови моделі необхідно накопичувати максимальну кількість параметрів по кожному позичальнику;
- вибірка має вміщувати в себе інформацію по кредитах, цикл кредитування яких вже закінчився. Ця вимога необхідна, оскільки обов'язковою є інформація про те, чи був цей кредит повернений чи ні;
- історія має накопичуватися в рамках кредитних продуктів (споживчий кредит, кредит на авто, іпотечний кредит). Скорингова модель теж повинна будуватися для кожного кредитного продукту.

Дані щодо процесу кредитування фізичних осіб задовольняють практично всі ці вимоги. Для фізичних осіб параметрами скорингової моделі можуть бути вік, сімейний стан, кількість дітей, освіта, місце проживання, робота, посада, власність, кредитна історія та ін. Вибір саме цих параметрів склався історично на основі знань експертів і світового досвіду із врахуванням українських реалій перехідного періоду.

Для аналізу кредитоспроможності кожного індивідуального позичальника варто запропонувати метод, який поєднував би можливості використання знань експертів (менеджерів банку), врахування факторів, які найбільше впливають на кредитоспроможність потенційних клієнтів, прогнозування кредитоспроможності і ймовірності повернення кредиту. На сьогодні, крім експертного оцінювання, банки використовують такі методи, як логістична регресія, лінійний дискримінантний аналіз, кластерний аналіз, мережі Байєса, ТУЙ-моделі, шумові моделі (Noisy-Max), нечіткі моделі, нейронні мережі, експоненційні моделі та ін. [4].

Застосування мереж Байєса для оцінки кредитних ризиків

Не наводячи тут повний аналіз зазначених вище методів, відзначимо переваги саме мереж Байєса для нашої прикладної галузі. По-перше, нам важливо прогнозувати характеристику “ймовірність повернення кредиту”, що залежить від багатьох чинників, з яких треба вибрати найістотніші. По-друге, обчислення ймовірності має ґрунтуватися на врахуванні вже відомих подій, які впливають на уточнення наших знань. І, нарешті, потрібний зручний і зрозумілий інструмент для менеджерів банку, які не є спеціалістами-аналітиками.

Байєсівський підхід є одним із можливих способів формалізації тези: “ступінь нашої розумної впевненості в деякому твердженні (наприклад, оцінки невідомого числового значення параметра, що нас цікавить) зростає і коригується в міру поповнення наявної в нас інформації щодо події, яка досліджується”.

Специфіка байєсівського способу підтвердження цієї тези базується на двох припущеннях. По-перше, ступінь нашої розумної впевненості в справедливості деякого твердження кількісно виражена у вигляді ймовірності. Однак у байєсівському підході ймовірність виходить за межі статистичного ансамблю, коли наявною є практична можливість багаторазового відтворення основного комплексу умов, при яких відбувалися вимірювання даних, але ймовірність належить до однієї з категорій суб’єктивної школи теорії ймовірностей. По-друге, при прийнятті рішень як вихідна інформація використовується одночасно інформація двох типів: апіорна і та, яка міститься у вихідних статистичних даних. При цьому апіорна інформація зображена у вигляді деякого апі-

орного розподілу ймовірностей невідомого параметра, що аналізується, і розподіл описує ступінь упевненості в тому, що цей параметр набуває того чи іншого значення ще до початку збору вхідних статистичних даних. В міру надходження вхідних статистичних даних уточнюється цей розподіл – переходить від апіорного до апостеріорного розподілу.

Вибір апіорного розподілу параметра залежить від передісторії функціонування процесу, що аналізується, якщо така існує, і від професійних теоретичних міркувань про його сутність, специфіку та особливості.

Мережі Байєса (МБ) – це математичний апарат, який дозволяє поєднати досить просте графічне зображення деякого процесу з його імовірнісним характером, проаналізувати можливі варіанти розвитку ситуації, відстежити правильність встановлення причинно-наслідкового зв’язку між окремими подіями і завдяки цьому підвищити обґрунтованість рішень при аналізі складних проблемних ситуацій [5].

Формально, мережа Байєса – це трійка $N = \langle V, G, J \rangle$, першою компонентою якої є множина змінних V ; другою – спрямований ациклічний граф G , вузли якого відповідають випадковим змінним модельованого процесу; J – спільний розподіл ймовірностей змінних $V = \{X_1, X_2, \dots, X_n\}$. Виконується марковська умова: кожна змінна мережі не залежить від усіх інших змінних, за винятком батьківських попередників цієї змінної.

Таким чином, мережа Байєса – це модель зображення ймовірнісних залежностей (взаємозв’язків) між вершинами графа. Зв’язок $A \rightarrow B$ називається причинним, якщо подія A є причиною виникнення B , тобто якщо існує механізм впливу значень змінної A на значення, які набуває змінна B . Мережу Байєса називають причинною (каузальною) тоді, коли всі її зв’язки є причинними.

При побудові мереж Байєса можливі випадки, коли попередня структура мережі задана емпірично (отримана від експертів або за допомогою інших методів чи алгоритмів). Якщо структура невідома, то її потрібно побудувати. В обох випадках при наявності статистичної інформації зручно використовувати евристичний алгоритм побудови мережі Байєса, який у першому випадку скоригує структуру мережі, а у другому – побудує структуру мережі, яку потім можна буде модифікувати, використовуючи знання експертів.

Евристичний метод [6] побудови мереж Байеса складається з двох етапів. На першому етапі виконується обчислення значень сумісної інформації між усіма вершинами, на другому – здійснюється цільовий пошук, що як оцінювальну функцію використовує оцінку мінімальної довжини (ОМД), яка ґрунтується на принципі опису, що застосовується на кожній ітерації алгоритму навчання [7].

Вхідні дані: множина навчальних даних $D = \{d_1, \dots, d_n\}$, $d_i = \{x_i^{(1)}x_i^{(2)} \dots x_i^{(N)}\}$ (нижній індекс – номер спостереження, а верхній – номер змінної), n – кількість спостережень, N – кількість вершин (змінних).

Перший етап. Для всіх пар вершин обчислюються значення сумісної інформації $\text{Set_MI} = \{MI(x^i, x^j) \forall i, j\}$ за формулою

$$MI(x^i, x^j) = \sum_{x^i, x^j} P(x^i, x^j) \log \left(\frac{P(x^i, x^j)}{P(x^i)P(x^j)} \right).$$

Далі елементи множини Set_MI розміщуються в порядку зростання $\text{Set_MI} = \{MI(x^{m_1}, x^{m_2}), MI(x^{m_3}, x^{m_4}), MI(x^{m_5}, x^{m_6}), \dots\}$.

Другий етап. Крок 1. Із множини значень сумісної інформації Set_MI вибираються перші два максимальних значення $MI(x^{m_1}, x^{m_2}), MI(x^{m_3}, x^{m_4})$ і будується множина моделей G у вигляді

$$\{(m_1 \rightarrow m_2; m_3 \rightarrow m_4), (m_1 \rightarrow m_2; m_3 \leftarrow m_4),$$

$$(m_1 \leftarrow m_2; m_3 \leftarrow m_4), (m_1 \leftarrow m_2; m_3 \rightarrow m_4),$$

$$(m_1 \leftarrow m_2; m_3 \text{ не залежить від } m_4),$$

$$(m_1 \rightarrow m_2; m_3 \text{ не залежить від } m_4),$$

$$(m_1 \text{ не залежить від } m_2; m_3 \rightarrow m_4),$$

$$(m_1 \text{ не залежить від } m_2; m_3 \leftarrow m_4),$$

$$(m_1 \text{ не залежить від } m_2;$$

$$m_3 \text{ не залежить від } m_4)\}.$$

Запис $m_i \rightarrow m_j$ означає, що вершина x^{m_i} є попередником вершини x^{m_j} .

Крок 2. Потім серед усіх моделей множини G здійснюється пошук. У параметрі g^* зберігається оптимальна мережена структура. Оп-

тимальною буде та структура, в якій найменше значення функції $L(g, x^n)$. $L(g, x^n)$ – це опис мінімальної довжини структури моделі $g \in G$ при заданій послідовності спостережень з n спостережень $x^n = d_1 d_2 \dots d_n$, обчислюється за формулою

$$L(g, x^n) = H(g, x^n) + \frac{k(g)}{2} \log(n),$$

де $k(g)$ – кількість незалежних умовних ймовірностей у мережній структурі g ; $H(g, x^n)$ – емпірична ентропія:

$$H(g, x^n) = \sum_{j \in J} H(j, g, x^n), \quad k(g) = \sum_{j \in J} k(j, g),$$

де ОМД j -ї вершини визначається за формулою

$$L(j, g, x^n) = H(j, g, x^n) + \frac{k(j, g)}{2} \log(n);$$

$k(j, g)$ – кількість незалежних умовних ймовірностей j -ї вершини:

$$k(j, g) = (\alpha^{(j)} - 1) \prod_{k \in \phi(j)} \alpha^k,$$

де $\phi(j) \subseteq \{1, \dots, j-1, j+1, \dots, N\}$ – така множина, що $\Pi^{(j)} = \{X^{(k)}: k \in \phi(j)\}$.

Емпірична ентропія j -ї вершини обчислюється за формулою

$$H(j, g, x^n) = \sum_{s \in S(j, g)} \sum_{q \in A^{(j)}} -n[q, s, j, g] \log \frac{n[q, s, j, g]}{n[s, j, g]},$$

де $n(s, j, g) = \sum_{i=1}^n I(\pi_i^{(j)} = s)$; $n[q, s, j, g] = \sum_{i=1}^n I(x_i = q, \pi_i^{(j)} = s)$, а $\pi^{(j)} = \Pi^{(j)}$ означає, що $X^{(k)} = x^{(k)} \forall k \in \phi(j)$, функція $I(E) = 1$, коли $E = \text{true}$, в іншому випадку – $I(E) = 0$.

Алгоритм навчання МБ з використанням ОМД має такий вигляд.

1. $g^* \leftarrow g_0 (g_0 \in G)$.

2. Для $\forall g \in G - \{g_0\}$, якщо $L(g, x^n) < L(g^*, x^n)$, маємо $g^* \leftarrow g$.

3. На вихід як рішення подається g^* .

Крок 3. Після знаходження оптимальної структури (структур) g^* із G , з множини значень сумісної інформації Set_MI вибирається наступне максимальне значення $MI(x^{i_{\text{next}}}, x^{j_{\text{next}}})$. За отриманим значенням $MI(x^{i_{\text{next}}}, x^{j_{\text{next}}})$ і

структурою (структурами) g^* будується множина моделей G виду $\{(g^*; i_{next} \rightarrow j_{next}), (g^*; i_{next} \leftarrow j_{next}), (g^*; i_{next} \text{ не залежить від } j_{next})\}$, після чого виконується крок 2.

Умова закінчення роботи алгоритму. Евристичний метод буде застосовуватися доти, доки не буде проаналізоване певне число елементів множини або всі $\frac{N(N-1)}{2}$ елементи множини Set_MI . Як показує практика, у більшості випадків немає сенсу виконувати аналіз більше ніж половини, (тобто $\frac{N(N-1)}{4}$) елементів множини Set_MI .

Вихідні дані. В результаті роботи евристичного алгоритму отримується оптимальна структура (структури) g^* .

Після побудови мережі Байєса, потрібно застосувати метод виведення. Якщо задано ймовірності певних подій, то висновок здійснюється перерахуванням ймовірностей за допомогою теореми Байєса. Якщо ж ймовірності подій не задано, але є певна статистика (дані), то можна використати алгоритм ймовірнісного висновку на основі навчальних даних. Цікаво, що саме цей метод, очевидно, дасть кращі результати, оскільки ймовірності, задані завчасно, можуть змінюватись і коригуватись навіть до самого процесу висновку, але це не буде ніяк відображено в мережі. Цього дозволяє уникнути алгоритм ймовірнісного висновку на основі навчальних даних, запропонований у [8].

Методика побудови МБ і приклад аналізу кредитоспроможності індивідуального позичальника

При побудові мережі Байєса з метою розв'язання конкретної задачі, необхідно [9]:

- виконати аналіз проблеми і зробити формалізовану постановку задачі; сформулювати питання, на яке має бути отримана ймовірнісна відповідь у результаті формування ймовірнісного висновку за допомогою побудованої мережі. Для нашої задачі необхідно визначити ймовірність неповернення кредиту (ймовірність дефолту) клієнтом-позичальником;

- визначити множину даних, що належать до змінних задачі, отримати їх експертні оцінки та/або статистичні дані. В задачі кредитування найкращими даними для цього будуть статистичні дані банку, тобто кредитні істо-

рії, які є в банку. Слід зауважити, що необхідна статистика саме по тих клієнтах, строк кредиту яких закінчився, тобто є інформація про те, чи були вони повернуті чи ні;

- поставити у відповідність усім отриманим даним взаємовиключаючі змінні. Нам потрібно визначити характеристики клієнта, які впливають на ймовірність повернення кредиту і співставити їм відповідні змінні;

- побудувати ациклічний граф, що відображає істотні умови незалежності змінних та існування причинно-наслідкових зв'язків. На основі вхідних навчальних даних побудувати початкову структуру мережі Байєса;

- визначити апріорні ймовірності та оптимізувати топологію мережі на основі наявної інформації. На основі знань експертів чи за середньостатистичними даними (або за допомогою певних математичних методів) визначити суттєві змінні, можливі значення, які вони набувають та їх ймовірності, зв'язки між цими змінними, та скоригувати початкову структуру мережі Байєса;

- виконати навчання мережі і провести формування висновку відносно відповідних станів процесу. В результаті навчання мережі (навчання структури і навчання ймовірностей) перераховуються ймовірності всіх змінних;

- обробити результати: проаналізувати отримані результати і зробити висновки щодо ймовірності очікуваної події. В результаті наявної інформації можна: а) визначити ймовірність неповернення кредитів у банку; б) за наявними даними щодо неповернення кредитів визначити групи людей, які не повертають кредити, та певні закономірності щодо їх характеристик; в) отримати швидко інформацію щодо того, яка ймовірність дефолту для нового клієнта, який прийшов до банку, після введення його характеристик у систему; г) надати рекомендації банку щодо подальшої кредитної політики (необхідність додаткових даних, коригування певних правил щодо видачі кредитів, встановлення/зняття певних обмежень для клієнтів).

Побудуємо мережу Байєса для розв'язання значно спрощеної задачі видачі кредиту. Припустимо, що на ймовірність повернення кредиту впливають такі змінні, як сума кредиту та вік позичальника. Відповідну мережу Байєса для даного прикладу наведено на рис. 1 (рисунок взято з екрана монітора).

За вихідні дані для побудови цієї мережі було взято статистичні дані банку. Оскільки сума кредиту і вік позичальника можуть набувати багато різних значень, то вони були розбиті на проміжки. Для більш компактного подання процентного розподілу клієнтів на рис. 2 наведено ту саму мережу Байеса у вигляді гістограм.

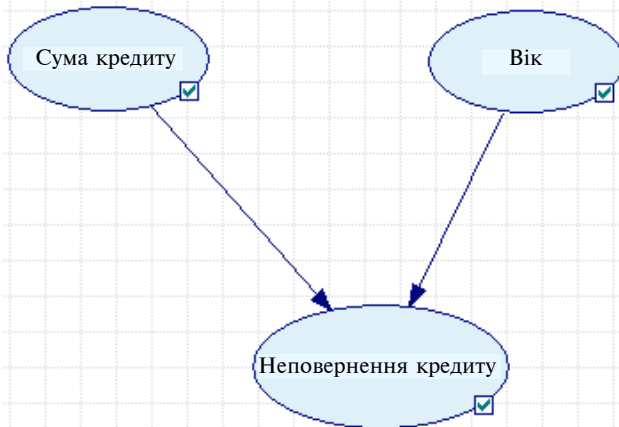


Рис. 1. Структура мережі Байеса для аналізу повернення кредитів

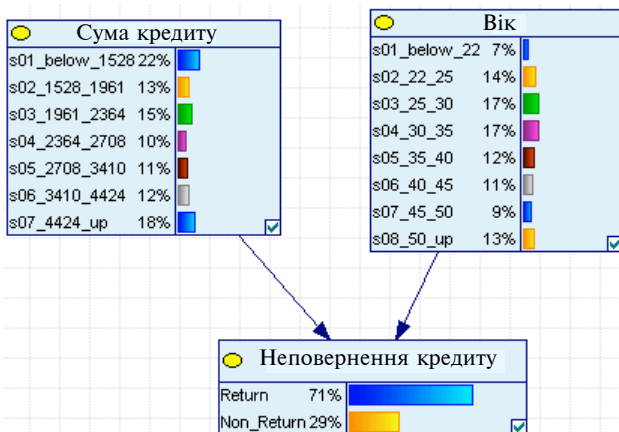


Рис. 2. Структура мережі Байеса у вигляді гістограм

Як видно з рисунка, статистичні дані цілком відображають ситуацію з кредитними позиками в Україні. Для обчислення ймовірності неповернення кредиту в цілому по банку застосовується теорема Байеса. Введемо такі змінні: S – сума кредиту; A – вік позичальника; NR – неповернення кредиту. Змінні “вік позичальника” та “сума кредиту” можуть набувати багато різних значень, тому вони розбиті на певні проміжки. Ймовірності значень цих змінних наведені в табл. 2. Табл. 2–6 взято з програми, тому позначення даних подано в комп’ютерному вигляді.

Таблиця умовних ймовірностей (табл. 4) буде досить великою, оскільки змінна S має сім станів-значень, а змінна A – вісім станів-значень, змінна неповернення кредиту NR має лише два значення $P(NR = \text{Non_Return})$.

Ймовірність події неповернення кредиту $P(NR = \text{Non_Return})$ можна обчислити за формулою повної ймовірності, використовуючи всі можливі значення S, A з табл. 2 і 3, а також значення умовної ймовірності з табл. 4:

$$P(NR = \text{Non_Return}) = \sum_{j=1}^8 \sum_{i=1}^7 P(S = s_i) P(A = a_j) P(NR | S = s_i, A = a_j),$$

де s_i – стани змінної “сума кредиту” S , а a_j – стани змінної “вік позичальника” A . Підставивши дані з таблиць, отримаємо $P(NR = \text{Non_Return}) = 0,293849$. Таким чином, ймовірність неповернення кредиту становить 29,385%.

Нехай тепер нас цікавить ймовірність того, що велика сума (більше 4424 грн) буде неповернута. Це означає, що змінна “сума кредиту” дорівнює $s07_4424_up$. Тоді ймовірність становить

$$P(NR = \text{Non_Return} | S = s07_4424_up) = \sum_{j=1}^8 P(A = a_j) P(NR | S = s07_4424_up, A = a_j).$$

Для нашого прикладу вона дорівнює 0,466128. Цікавою для банку є інформація: яку саме частину неповернутих кредитів становлять суми більше 4424 грн. Для цього необхідно обчислити апостеріорну ймовірність за формулою Байеса

$$P(S = s07_4424_up | NR = \text{Non_Return}) = \frac{p(NR = \text{Non_Return} | S = s07_4424_up) P(S = s07_4424_up)}{P(NR = \text{Non_Return})}.$$

Ймовірність того, що неповернений кредит більше 4424 грн, становить 0,284287. В результаті обчислень неповернутих кредитів отримаємо результати, наведені в табл. 5.

З табл. 5 видно, що більше всього не повертають саме кредити, сума яких становить більше 4424 грн. Це свідчить про те, що найбільш відповідальними позичальниками є люди з невеликим рівнем доходу, які беруть у кредит невеликі суми для купівлі дрібної побутової техніки, мобільних телефонів тощо.

Таблиця 2. Можливі значення змінної “сума кредиту” S та їх ймовірності P

| Сума кредиту S | $P(S)$ |
|------------------|----------|
| s01_below_1528 | 0,219042 |
| s02_1528_1961 | 0,126322 |
| s03_1961_2364 | 0,146857 |
| s04_2364_2708 | 0,096453 |
| s05_2708_3410 | 0,112632 |
| s06_3410_4424 | 0,119477 |
| s07_4424_up | 0,179216 |

Таблиця 3. Можливі значення змінної “вік позичальника” A та їх ймовірності P

| Вік позичальника A | $P(A)$ |
|----------------------|-----------|
| s01_below_22 | 0,0715174 |
| s02_22_25 | 0,136816 |
| s03_25_30 | 0,174129 |
| s04_30_35 | 0,172264 |
| s05_35_40 | 0,123756 |
| s06_40_45 | 0,107587 |
| s07_45_50 | 0,0883085 |
| s08_50_up | 0,125622 |

Таблиця 4. Таблиця умовних ймовірностей для змінної “неповернення кредиту” NR

| Сума кредиту S | Вік позичальника A | Return | Non_Return |
|------------------|----------------------|----------|------------|
| s01_below_1528 | s01_below_22 | 0,789474 | 0,210526 |
| | s02_22_25 | 0,763636 | 0,236364 |
| | s03_25_30 | 0,892857 | 0,107143 |
| | s04_30_35 | 0,844828 | 0,155172 |
| | s05_35_40 | 0,875 | 0,125 |
| | s06_40_45 | 0,871795 | 0,128205 |
| | s07_45_50 | 0,903226 | 0,0967742 |
| | s08_50_up | 0,904762 | 0,0952381 |
| s02_1528_1961 | s01_below_22 | 0,5 | 0,5 |
| | s02_22_25 | 0,647059 | 0,352941 |
| | s03_25_30 | 0,771429 | 0,228571 |
| | s04_30_35 | 0,756757 | 0,243243 |
| | s05_35_40 | 0,863636 | 0,136364 |
| | s06_40_45 | 0,8 | 0,2 |
| | s07_45_50 | 0,846154 | 0,153846 |
| | s08_50_up | 0,894737 | 0,105263 |
| s03_1961_2364 | s01_below_22 | 0,454545 | 0,545455 |
| | s02_22_25 | 0,580645 | 0,419355 |
| | s03_25_30 | 0,615385 | 0,384615 |
| | s04_30_35 | 0,787879 | 0,212121 |
| | s05_35_40 | 0,862069 | 0,137931 |
| | s06_40_45 | 0,9 | 0,1 |
| | s07_45_50 | 0,863636 | 0,136364 |
| | s08_50_up | 0,90625 | 0,09375 |

Кінець табл. 4

| Сума кредиту S | Вік позичальника A | Return | Non_Return |
|------------------|----------------------|----------|------------|
| s04_2364_2708 | s01_below_22 | 0,714286 | 0,285714 |
| | s02_22_25 | 0,315789 | 0,684211 |
| | s03_25_30 | 0,689655 | 0,310345 |
| | s04_30_35 | 0,677419 | 0,322581 |
| | s05_35_40 | 0,684211 | 0,315789 |
| | s06_40_45 | 0,789474 | 0,210526 |
| | s07_45_50 | 0,777778 | 0,222222 |
| | s08_50_up | 0,809524 | 0,190476 |
| s05_2708_3410 | s01_below_22 | 0,5 | 0,5 |
| | s02_22_25 | 0,25 | 0,75 |
| | s03_25_30 | 0,666667 | 0,333333 |
| | s04_30_35 | 0,888889 | 0,111111 |
| | s05_35_40 | 0,642857 | 0,357143 |
| | s06_40_45 | 0,764706 | 0,235294 |
| | s07_45_50 | 0,85 | 0,15 |
| | s08_50_up | 0,90625 | 0,09375 |
| s06_3410_4424 | s01_below_22 | 0,588235 | 0,411765 |
| | s02_22_25 | 0,333333 | 0,666667 |
| | s03_25_30 | 0,447368 | 0,552632 |
| | s04_30_35 | 0,615385 | 0,384615 |
| | s05_35_40 | 0,68 | 0,32 |
| | s06_40_45 | 0,73913 | 0,26087 |
| | s07_45_50 | 0,75 | 0,25 |
| | s08_50_up | 0,882353 | 0,117647 |
| s07_4424_up | s01_below_22 | 0,4 | 0,6 |
| | s02_22_25 | 0,333333 | 0,666667 |
| | s03_25_30 | 0,382979 | 0,617021 |
| | s04_30_35 | 0,461538 | 0,538462 |
| | s05_35_40 | 0,609756 | 0,390244 |
| | s06_40_45 | 0,575758 | 0,424242 |
| | s07_45_50 | 0,74359 | 0,25641 |
| | s08_50_up | 0,878788 | 0,121212 |

З цього простого прикладу можна також отримати інформацію: які саме вікові групи людей найчастіше не повертають кредити, а які є найбільш сумлінними. Для цього необхідно перерахувати апостеріорні ймовірності змінної "вік позичальника" A . Наприклад, нас цікавить вікова група позичальників від 22 до 25 років. Спочатку обчислюємо ймовірність:

$$\begin{aligned}
 P(NR = \text{Non_Return} \mid A = s02_22_25) &= \\
 &= \sum_{i=1}^7 P(S = s_i) P(NR \mid A = \\
 &= s02_22_25, S = s_i).
 \end{aligned}$$

Вона становить 0,50754. Аналогічно, за теоремою Байєса маємо

$$P(A = s02_22_25 | NR = \text{Non_Return}) = \frac{p(NR = \text{Non_Return} | S = s02_22_25) \cdot P(S = s02_22_25)}{P(NR = \text{Non_Return})} = 0,23631.$$

Отже, 23,631% неповернених кредитів становлять саме кредити, взяті позичальниками віком від 22 до 25 років. Перерахувавши ймовірності також і для інших вікових груп, отримаємо табл. 6.

Таблиця 5. Апостеріорні ймовірності змінної “сума кредиту” S

| Сума кредиту S | $P(S NR = \text{Non_Return})$ |
|------------------|----------------------------------|
| s01_below_1528 | 0,106263 |
| s02_1528_1961 | 0,0992836 |
| s03_1961_2364 | 0,125715 |
| s04_2364_2708 | 0,10797 |
| s05_2708_3410 | 0,118858 |
| s06_3410_4424 | 0,157623 |
| s07_4424_up | 0,284287 |

Результати в табл. 6 показують, що найбільш сумлінними є позичальники старшого віку – вони здебільшого повертають кредити. Цікавою є закономірність, що з віком процент неповернення кредитів поступово зменшується і найменший він для людей старше 50 років. Скоріше за все, це можна пояснити тим, що люди старшого віку виховувалися в радянській системі і привчені бути дисциплінованими і не жити в борг. Тому саме таким відповідальним вкладникам банки можуть видавати кредити без зайвої застороги. Можна знайти й інші пояснення, інтерпретуючи отримані результати: наприклад, врахувати, що банки взагалі намагаються не кредитувати вікову категорію старше 50 років, але важливим для конкретної ситуації є саме висновки щодо вікових категорій, яким можна надавати кредити, і рекомендація банкам підняти поріг вікових обмежень при видачі кредитів старшим групам населення, враховуючи сумлінність вікової групи старше 50 років.

Наведений приклад показав, наскільки складнішими стають обчислення ручним способом навіть для трьох змінних-вершин мережі, коли кіль-

Таблиця 6. Апостеріорні ймовірності змінної “вік позичальника” A

| Вік позичальника A | $P(A NR = \text{Non_Return})$ |
|----------------------|----------------------------------|
| S01_below_22 | 0,104649 |
| S02_22_25 | 0,23631 |
| S03_25_30 | 0,209128 |
| S04_30_35 | 0,165288 |
| S05_35_40 | 0,102643 |
| S06_40_45 | 0,0812952 |
| S07_45_50 | 0,052534 |
| S08_50_up | 0,0481527 |

кість їх станів більше двох. Побудова ймовірнісної мережі для заданої галузі знань із більшою кількістю змінних і їх станів є задачею, розв’язання якої потребує багато часу. Знання одного чи більше експертів щодо предметної області повинні бути подані формалізмом ймовірнісної мережі, і, як тільки початкова структура мережі побудована, вона має бути перевірена і досліджена з метою подальшого поліпшення характеристик. Цей процес повторюється до тих пір, поки подальше поліпшення характеристик стає неможливим. Автоматична побудова ймовірнісних мереж за допомогою баз даних допомагає істотно скоротити побудову і цикл тестування мережі. У нашому прикладі всі ці довгі обчислення можна було б виконати автоматично (наприклад, у програмі GeNIe 2.0). Більше того, результати обчислень можна було побачити як у вигляді таблиці, так і у вигляді гістограм.

Висновки

Досліджуючи та порівнюючи різні підходи до аналізу кредитних ризиків, вважаємо доцільним використання математичного апарату мереж Байєса для оцінки кредитних ризиків. Запропонована в статті покрокова методика розв’язання задачі за допомогою мереж Байєса та на простому і зрозумілому прикладі видачі кредитів показала доцільність використання ймовірнісних мереж для аналізу кредитних ризиків та оцінки ймовірності дефолту окремих позичальників.

Застосування мереж Байєса при розв’язанні кредитних задач дає значні переваги порівняно з іншими методами: 1) оскільки в моделі визначені залежності між усіма змінними, то легко обробляються ситуації, коли значення деяких

змінних невідомі; 2) побудовані мережі Байєса легко інтерпретуються і дають можливість на етапі прогностичного моделювання легко проводити аналіз за сценарієм “що, якщо...”; 3) підхід дає можливість природно поєднувати закономірності, що виведені з даних, і фонові знання, отримані в явному вигляді, наприклад від експертів; 4) застосування мереж Байєса дозволяє уникнути проблеми перепідгонки, тобто надмірного ускладнення моделі, що є недоліком багатьох моделей (наприклад, дерева рішень і індукції пра-

вил) при занадто буквальному слідуванні розподілу зашумлених даних [10].

Вважаємо, що мережі Байєса можуть бути основою для створення досить простих і швидких інформаційних технологій побудови прогностичних економічних оцінок, зокрема при розв'язанні задач кредитування. У подальших дослідженнях плануємо дослідити вплив множини змінних, що характеризують фізичну особу, на величину відповідного кредитного ризику за допомогою гібридних мереж.

Н.В. Кузнецова, П.И. Бидюк

СИСТЕМНЫЙ ПОДХОД К АНАЛИЗУ КРЕДИТНЫХ РИСКОВ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ СЕТЕЙ БАЙЕСА

Рассмотрены основные аспекты анализа кредитных рисков и способы их снижения, обоснована целесообразность использования сетей Байеса (СБ) для анализа кредитных рисков и оценки вероятности дефолта заемщика. На основе анализа предложена и обоснована методика построения и применения СБ для решения задачи анализа кредитоспособности заемщика.

N.V. Kuznyetsova, P.I. Bidyuk

THE SYSTEM APPROACH TO THE CREDIT RISK ASSESSMENT USING BAYESIAN NETWORKS

In this paper, we consider the basic facets of the credit risks assessment and the methods of their decreasing. The reasonability of Bayesian Networks (BN) application for the credit risk analysis and estimation of the client's default probability is grounded. The methodology of BN building and using is proposed and tested for solving the problem of the credit capacity analysis.

1. *Кредитний ризик комерційного банку: Навч. посібник* / В.В. Вітлінський, О.В. Пернарівський, Я.С. Наконечний, Г.І. Великоіваненко; За ред. В.В. Вітлінського. – К.: Знання, КОО, 2000. – 252 с.
2. *Вітлінський В.В., Наконечний С.І.* Ризик у менеджменті. – К.: Борисфен-М, 1996. – 336 с.
3. *Краснов С.О.* Неформальний аналіз кредитоспроможності індивідуальних позичальників комерційних банків // Наукові записки. – Тернопіль: Економічна думка ТДЕУ, 2006. – Вип. 15. – 4 с., available at www.library.tane.edu.ua/images/nauk_vydannya/ivVEx8.pdf
4. *Матрос Є.О.* Впровадження системного підходу до прогнозування обсягів втрат внаслідок реалізації банківських ризиків // Наукові вісті НТУУ “КПІ”. – 2006. – № 3. – С. 37–44.
5. *Бідюк П.І., Кузнецова Н.В.* Використання імовірнісних мереж Байєса при створенні систем підтримки прийняття рішень // 36. наук. праць. Матер. Сьомої міжнар. конф. “Інформаційні технології і безпека”. – К.: НАН України, 2007. – Вип. 10. – С. 157–159.
6. *Терентьев А.Н., Бидюк П.И.* Эвристический метод построения байесовских сетей // Мат. машины и системы. – 2006. – № 3. – С. 12–23.
7. *Терентьев А.Н., Бидюк П.И.* Методы построения байесовских сетей // Адаптивные системы автоматического управления (межведомственный научно-технический сборник). – 2005. – № 8. – С. 130–141.
8. *Терентьев А.Н., Бидюк П.И.* Метод вероятностного вывода в байесовских сетях по обучающим данным // Кибернетика и системный анализ. – 2007. – № 3. – С. 93–99.
9. *Бідюк П.І., Кузнецова Н.В.* Основні етапи побудови і прикладу застосування мереж Байєса // Системні дослідження та інформаційні технології. – 2007. – № 4. – С. 26–39.
10. *Heckerman D.* Bayesian Networks for Data Mining // Data Mining and Knowledge Discovery. – 1997. – N 1. – P. 79–119.

Рекомендована Радою навчально-наукового комплексу “Інститут прикладного системного аналізу” НТУУ “КПІ”

Надійшла до редакції
21 травня 2008 року

УДК 004.75

П.П. Маслянюк, К.В. Стокоз

ДОСЛІДЖЕННЯ МЕТОДІВ І РОЗРОБКА ІНТЕГРОВАНІХ ЗАСОБІВ ДОСТУПУ ДО ІНФОРМАЦІЙНИХ РЕСУРСІВ ІНФОРМАЦІЙНО-КОМУНІКАЦІЙНОЇ СИСТЕМИ

Вступ

Донедавна ІТ-аналітики були дещо песимістично налаштовані щодо розвитку порталних технологій як окремого класу ІТ-технологій. Багато фахівців стверджували, що порталні технології будуть інтегровані в інші, більш потужні ІТ-технології, наприклад у сервери додатків, операційні системи або у великомасштабні програмні продукти інформаційно-комунікаційних систем (ІКС) [1]. Але застосування сервіс-орієнтованої архітектури як основи для комплексних застосувань у проєктах інформатизації швидко розширили сферу застосування порталних технологій.

У зв'язку з цим *об'єктом дослідження* є портал – як інтегрований інтерфейс з персоналізацією доступу до корпоративної системи, систематизованих інформаційних технологій та інформаційних ресурсів ІКС.

Предмет дослідження – бізнес-процеси створення порталу: аналіз, проєктування, конструювання та розгортання.

Корпоративний портал – це програмний продукт, який за допомогою браузера забезпечує безпосередній доступ до розподілених інформаційних ресурсів: файлових систем, інтегрованих баз даних, інформаційних сховищ та інформаційних колекторів [1, 2]. Він є функціонально повною частиною ІКС організації, яка надає користувачам єдину точку доступу до внутрішніх та зовнішніх інформаційних ресурсів, необхідних для прийняття обґрунтованих управлінських рішень.

На сьогодні порталні технології є важливою частиною стратегій організацій і використовуються як основа для побудови комплексних застосувань за рахунок великої кількості системних властивостей, притаманних будь-якому сучасному порталу.

Постановка задачі

Мета статті – дослідження існуючих підходів до проєктування порталів, проведення їх порівняльного аналізу і застосування сервіс-орієнтованої архітектури для розробки корпора-

тивних порталів на основі прикладного системного аналізу та компонентного процесу розробки.

Технології проєктування порталу

З точки зору прикладного системного аналізу, корпоративний портал – це компонент ІКС. В [1–3] детально розглянуто класифікацію, функціональність, призначення, основні принципи і технології проєктування порталів. На сьогодні основними підходами до проєктування порталів є такі:

- проєктування порталу як єдиного цілого із вбудованими технологіями, сервісами та без динамічного розширення;
- проєктування порталу на базі певної стабільної платформи – так званого ядра, в яке динамічно додаються і інтегруються всі необхідні сервіси;
- проєктування порталу на основі окремих компонент, коли всі технології або сервіси являють собою окремі, цілком закінчені, здатні самостійно функціонувати компоненти, об'єднання яких надає користувачам порталу доступ до необхідної кількості вбудованих різноманітних сервісів.

Переваги і недоліки процесу проєктування порталів на основі стабільної платформи [4–6]. Для вибору конкретної технології для проєктування порталу слід обрати оптимальні характеристики, спираючись на вимоги (вартість, час впровадження тощо), які має задовольняти портал [4].

До переваг технології проєктування порталів на основі певної платформи можна віднести те, що у всіх існуючих та нових сервісах використовуються вбудовані в платформу можливості та функції, що зменшує час на їх реалізацію і впровадження. Це може істотно впливати на час розробки готового рішення. Але незважаючи на це, можливі випадки, коли з появою нових технологій, якісно кращих від існуючих, які необхідно впровадити в платформу, не всі програмні компоненти коректно працюватимуть. Тут треба мати на увазі, що можуть виникнути проблеми із впровадженням даних технологій, розширенням функціональності та з інтеграцією відповідних рішень у наявну платформу.

Переваги і недоліки процесу проєктування порталів на основі окремих компонентів [6–8]. Необхідно зазначити, що на відміну від попереднього підходу тут не виникають проблеми із впровадженням нових технологій в міру їх появи, оскільки кожний компонент цілком завершений та здатний самостійно функціонувати, що скорочує час на впровадження нових техноло-

гій через просту заміну компонентів. У зв'язку з їх "самодостатністю" вони можуть самостійно обробляти запит та подавати потрібну інформацію чи дані у необхідній формі, що зменшує навантаження на портал в цілому і сприяє швидшому відгуку на запит. Такий підхід рекомендується використовувати при проектуванні розподіленого, розширюваного, масштабованого порталу, оскільки:

1) за рахунок наявності так званих віддалених портлетів можна отримувати інформацію, дані й знання з віддалених ресурсів, сховищ даних інших порталів. Для забезпечення взаємодії різних серверів порталів і постачальників інформації, даних і знань необхідно мати стандартизовану модель взаємодії порталу та віддаленого портлету. Нині над стандартом для віддалених портлетів працює організація OASIS (Organization for the Advancement of Structured Information Standards);

2) за рахунок гнучкості при впровадженні нових технологій і сервісів даний підхід характеризується можливістю "гарячої заміни" портлетів. Всі портлети порталу знаходяться у спеціальній бібліотеці – репозитарії портлетів (portlet repository), доступній користувачу з відповідними правами;

3) за рахунок можливості побудови готового рішення за короткий проміжок часу у зв'язку з наявністю великої кількості готових портлетів, розроблених спеціалізованими компаніями, навіть при розробці нового портлету можливе використання повною мірою елементів інфраструктури Common Portal Services, яка забезпечує:

а) персоналізацію;

б) збережені сесії, вбудований механізм збереження та відновлення сесії роботи користувача;

в) журнали, надання портлетам єдиного механізму фіксування подій;

г) безпеку, надання можливості використання механізму SSO (Single Sign-On);

д) обробку помилок [7].

Таким чином, портал можна подати як закінчену множину компонентів (сервісів), які отримують інформацію, дані та знання з різних інформаційних ресурсів, що не тільки задовольняє всі концепції, необхідні для побудови сучасного порталу, а й позитивно впливає на показники ефективності за рахунок розподіленої архітектури та можливості проектування і реалізації в найкоротші терміни.

В результаті застосування SOA при проектуванні і реалізації порталів організація отримує можливість підвищення швидкості, з якою вона

може впроваджувати нові продукти і процеси або змінювати наявні, зменшувати кошти на розробку та володіння, спростити інтеграцію при злитті чи поглинанні, спрощувати корпоративну архітектуру і комп'ютерну модель та ін.

Провідні компанії у сфері розробки програмного забезпечення – Microsoft, Oracle, IBM, Sybase та інші – пропонують своє рішення порталу, кожне з яких має свої переваги і недоліки [5].

У [1, 2, 8, 9] детально розглянуто переваги й недоліки кожної з технологій проектування, проведено їх порівняльний аналіз, в результаті чого можна стверджувати, що на сьогодні є доцільною розробка якісно нової технології автоматизованого проектування порталів, яка може об'єднувати кращі характеристики та рішення обох технологій, а саме: за рахунок компонентної структури забезпечити необхідні показники ефективності, а за рахунок наявних методів доступу до функціонала кожного окремого компонента чи сервісу та інформаційних ресурсів ІКС скоротити час отримання готового рішення.

Модифікована технологія проектування порталів

Нами пропонується модифікована технологія проектування порталів (рис. 1), яка дасть можливість значно підвищити ефективність функціонування Орг. С та зменшить час і вартість розробки готового рішення. Основною ідеєю цієї технології є застосування стабільної платформи для забезпечення утилітних або спільних функцій та подання бізнес-процесів Орг. С у вигляді окремих компонентів – сервісів, спроможних самостійно функціонувати.

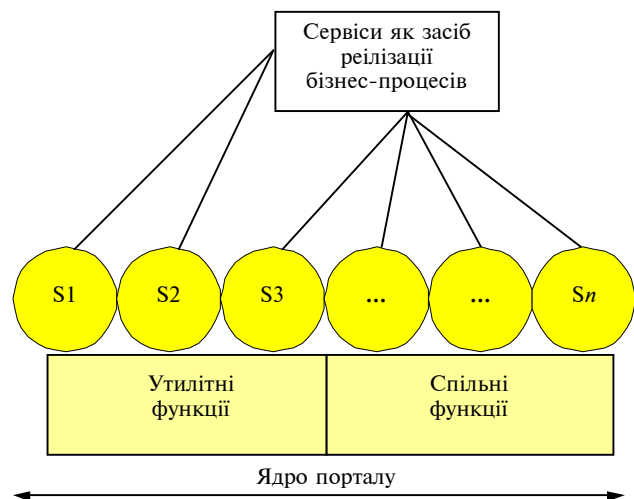


Рис. 1. Модель модифікованої технології проектування порталів

Принципи проектування порталів на основі модифікованої технології. Модифікована технологія – це підхід для побудови розподілених систем і досягнення інтеграції, забезпечення функціональності застосування сервісу для кінцевих користувачів та інших сервісів [4]. Вона дає можливість:

- визначати архітектуру portalу, що використовує відкриті стандарти для подання активів програмного забезпечення як сервісів;
- подати окремі програмні активи фундаментальними блоками (сервісами або винесеними в ядро portalу), які можуть бути повторно використані в розробці порталів або інших розподілених застосувань;
- зосередитися на складанні нових застосувань із вже готових компонентів, а не на деталях реалізації кожного компонента;
- користуватися зовнішніми інформаційно-комунікаційними системами, що належать клієнтам, партнерам та ін. (рис. 2).

Одним з основних понять у модифікованій технології є поняття сервісу. Сервіси забезпечують реалізацію окремих загальносистемних і прикладних функцій portalу, максимальну гнуч-

кість та повторне використання [5]. Сервіси portalів можна класифікувати відповідно до сфери застосування (таблиця) (ступінь або рівень абстракції бізнес-функціональності) і мети (програмного забезпечення або інфраструктури).

Основні переваги порталів, в яких при проектуванні застосовується модифікована технологія.

1. *Сервіс-інкапсульований чітко визначений інтерфейс*, який описує бізнес-функцію чи технічну функцію, операцію тощо. Такий інтерфейс застосовується для відокремлення публічно доступної поведінки сервісу від прихованої для споживача та її реалізації (рис. 3). Ця перевага використовується для досягнення гнучких і придатних для повторного використання компонентів в OOAD (Object Oriented Analysis and Design). У цьому випадку сервіси порталів дають можливість створювати інтерфейси для мережних застосувань і, таким чином, забезпечують доступ користувачів до мережних ресурсів та інформаційних ресурсів різних типів (файлових систем, баз даних, інформаційних сховищ, інформаційних колекторів, веб-ресурсів) за допомогою стандартних мов програмування та мережних протоколів.

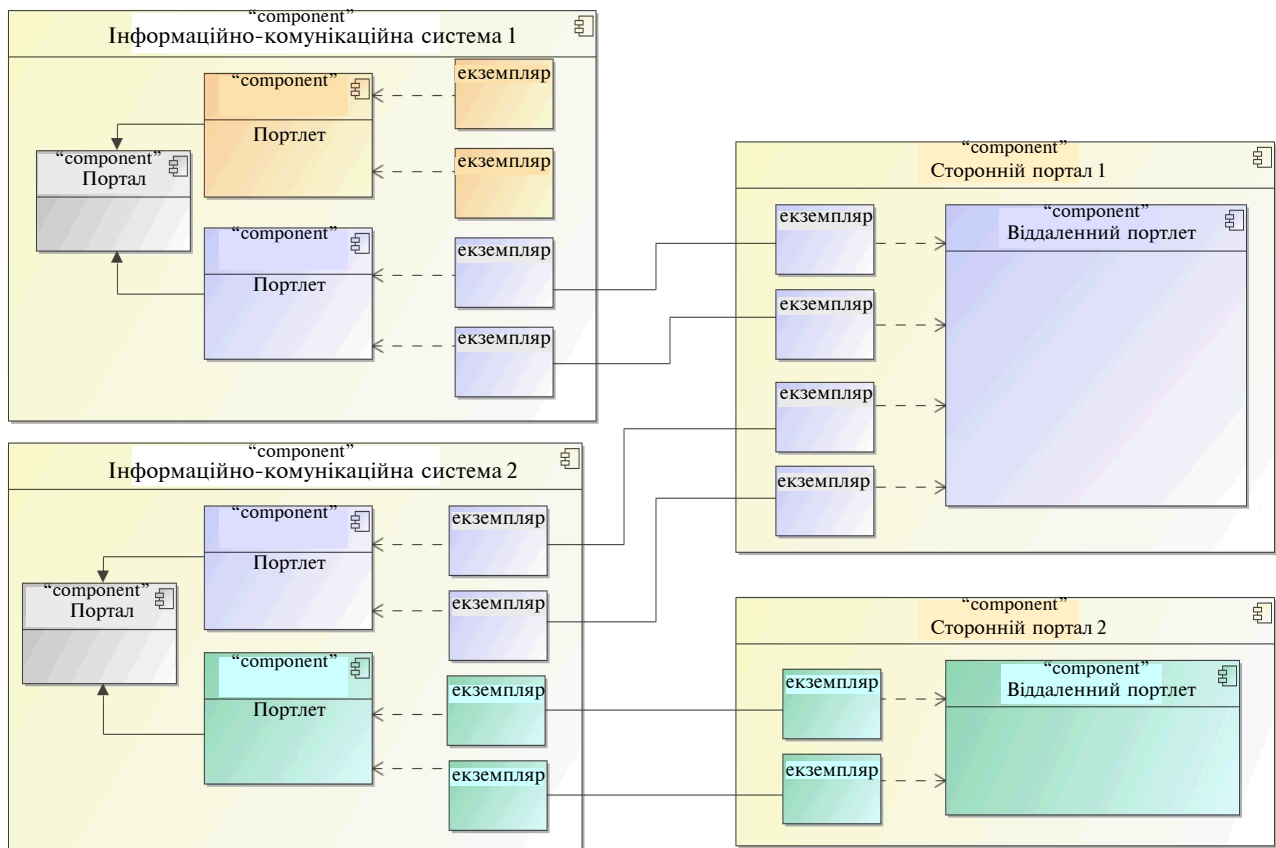


Рис. 2. Модель інтеграції порталів із зовнішніми ІКС. Діаграма компонентів у нотатції UML

Таблиця. Класифікація сервісів порталів за критерієм сфери застосування

| Сервіси | Сфера застосування |
|---------------------------|---|
| Сервіси бізнес-процесів | Бізнес-процес – це послідовність дій, при якій досягається певна мета або розв’язується задача. Цей процес може бути поданий як сервіс. Сервіси бізнес-процесів можуть складатися з інших сервісів і самі по собі групуватися в більш складні |
| Сервіси бізнес-операцій | Сервіси бізнес-операцій – бізнес-функції, які змінюють стан бізнесу деякою мірою |
| Сервіси бізнес-функцій | Сервіси бізнес-функцій – це бізнес-функції, які повертають дані або виконують прості розрахунки, але які самі по собі не міняють стан бізнесу |
| Сервіси технічних функцій | Сервіси повторно використовуються, надаючи технічну інфраструктуру або функції, необхідні для підтримки взаємодії сервісів |

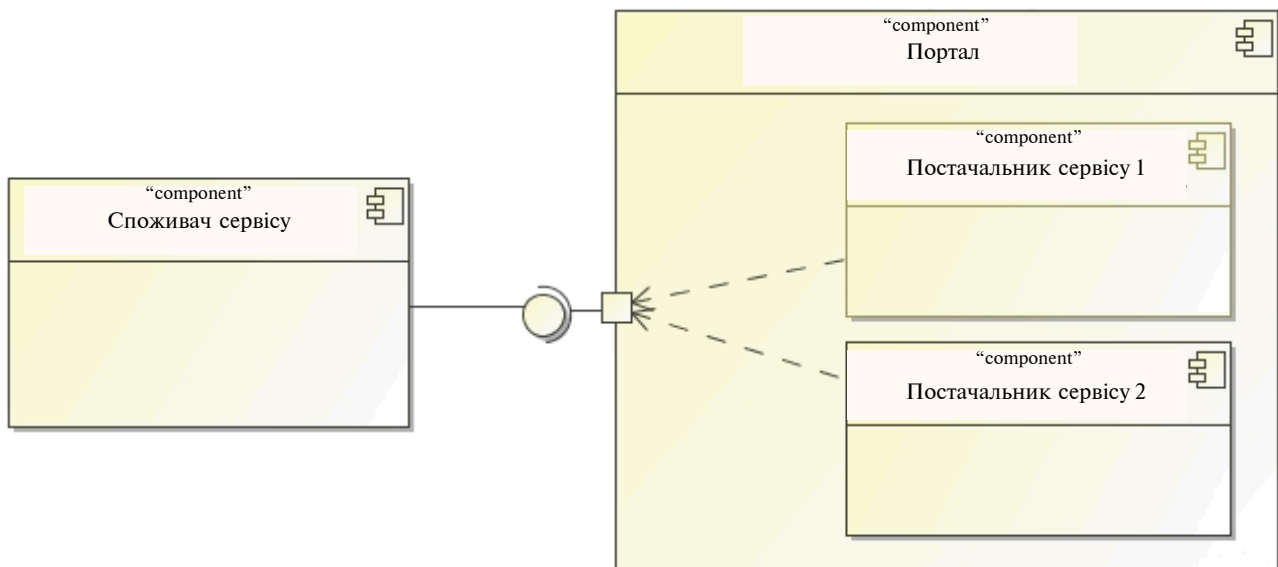


Рис. 3. Модель сервісу. Діаграма компонентів у нотатції UML

2. *Самостійними та модульними сервісами.* Споживачі використовують інтерфейси сервісів, які не зв'язані з конкретною реалізацією, так само і реалізації кожного сервісу мають бути незалежними одна від одної. Наприклад, можна реалізувати сервіс, який залежатиме від виконання іншого сервісу через обмін кодами, доступом до даних або іншим чином. Це може тісно зв'язати сервіси, що спричинить втрату гнучкості та можливості повторного використання. На відміну від традиційного компонентного підходу сервіси в такій технології є самостійними та модульними інтерфейсами для забезпечення бізнес-функціональності (рис. 4).

При використанні інтерфейсу сервісу можна виділити три основних рівні взаємодії сервісів:

- **сильно (жорстко) зв'язані** – це такий вид зв'язку, коли сервіс керується як постачальником сервісу, так і споживачем.

- **слабо (гнучко) зв'язані** – у цьому разі сервіс може вільно змінюватись на запит споживача сервісу без зміни поведінки;

- **декларативно (віртуально) зв'язані** – коли постачальник і споживач сервісу залежать від нього, проте не безпосередньо у вихідному коді. Декларативні зв'язки включають безпеку, якість обслуговування, час відгуку тощо.

3. *Сервіси, спрямовані на досягнення правильної компонентності і задоволення потреб споживачів.* Можливості бізнес-функцій, які мають великий потенціал для повторного використання, є одним із ключових рушіїв визначення компо-

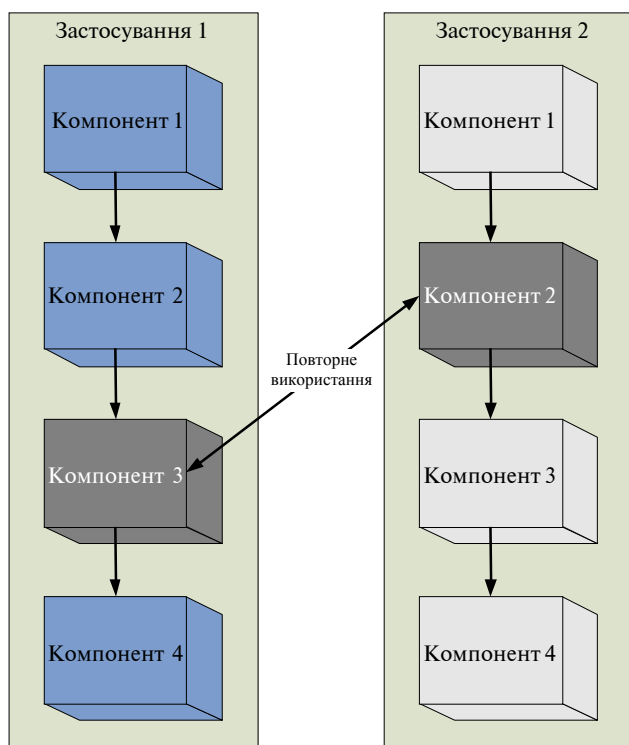


Рис. 4. Можливість повторного використання

нентності сервісу. Сервіс може виконувати всі функції банківської системи і через це буде жорстким. Він буде більш гнучким, якщо підтримує лише кілька функцій. Запропонувавши набори таких сервісів і зон їх реалізації, можна організувати більш гнучке та стабільне рішення за коротший проміжок часу. Але якщо їх неправильно зкомпонувати чи вибрати хибну область реалізації, споживачі дістануть доступ до зайвої функціональності, що може викликати проблему із безпекою на рівні обслуговування.

Як правило, портали мають відкриту архітектуру, що сприяє розширенню їх функціональності через додавання застосувань, які розробляються спеціалізованими компаніями в певній галузі та легко впроваджуються, вбудовуються в портал.

Стадії проектування порталу. Основними стадіями проектування є: системний аналіз, системне проектування, системне конструювання та системне розгортання. Опишемо основні результати, які досягаються на кожній стадії при проектуванні порталу на основі модифікованої технології.

1. **Системний аналіз.** Основним завданням на цій стадії є формулювання мети, формалізація задач проектування порталу, проведення сис-

темного аналізу бізнес-процесів функціонування Орг. С та її ресурсів. Мета може бути поділена на окремі та/або інкапсульовані частини.

Формалізація задач проектування порталу має бути конкретною і такою, що вимірюється і досягається. Мета повинна мати необхідний набір показників ефективності, значення яких відображають рівень її досягнення. Формулювання мети і формалізацію задач проектування порталу можна реалізувати на структурованій природній мові та на мові графічного моделювання UML.

2. **Системне проектування.** Розробка моделі порталу починається з ідентифікації сервісів, якими описуються бізнес-процеси. Далі розробляється початкова модель взаємодії сервісів. (На цьому етапі нас не цікавлять конкретні деталі функціонування сервісів та їх специфікації.)

Після ідентифікації сервісів проводиться класифікація і категоризація сервісів в ієрархію, яка відображає компонентну і функціональну природу сервісу. Класифікація допомагає визначити структуру та ієрархію сервісів, а також встановлює відношення між ними.

Основні системні властивості, притаманні будь-якому порталу, наведені на рис. 5.

3. **Системне конструювання.** На стадії конструювання проводиться ідентифікація і специфікація компонентів порталу, визначаються основні бізнес-правила, обмеження та специфікації сервісів.

Розробляються також сервіси або "з нуля", або (в разі наявності готових рішень), можуть бути використані повторно [8]. Далі розв'язуються задачі трансформації і забезпечення інтероперабельності сервісів і застосувань.

Для безпосередньої реалізації сервісів передбачається розробка відповідних функцій безпеки, керування та моніторингу роботи сервісів, які можуть бути винесені в ядро порталу.

4. **Системне розгортання.** На цій стадії реалізується перехід системи в дослідно-промислово експлуатацію. В разі необхідності проведення синдикації рішення на кілька інсталяцій, то це також реалізується на стадії розгортання.

Інтероперабельність. В результаті застосування модифікованої технології досягається ряд переваг. Зокрема, використання її спрямоване на забезпечення інтероперабельності інформаційних ресурсів і застосувань.

Нині Орг. С стикаються з проблемою комунікації між застосуваннями, побудованими на різних платформах, реалізованими на різних мовах програмування тощо, а отже, з проблемою ін-

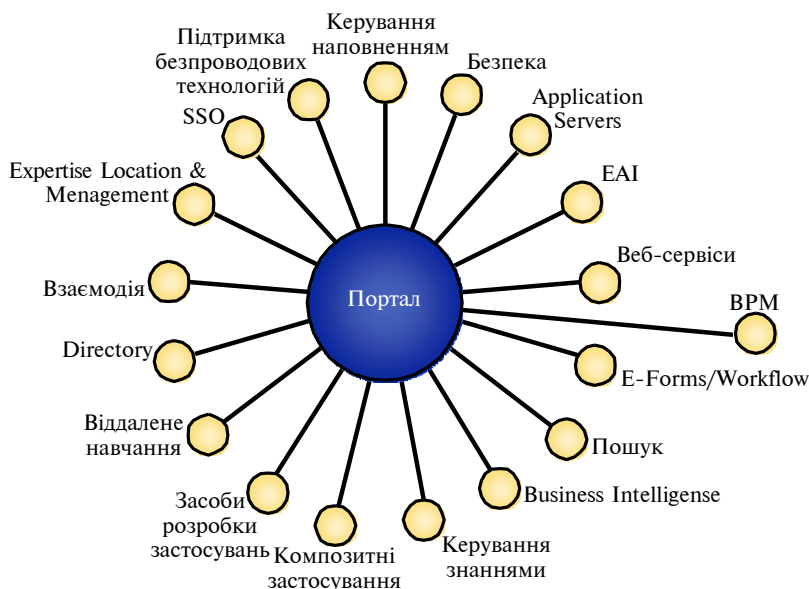


Рис. 5. Системні властивості порталу

тероперабельності програмного і технічного забезпечення ІКС. Розв'язання цієї проблеми є важливою часткою успіху в процесі прискорення бізнес-процесів та побудови внутрішньої інфраструктури Орг. С.

Протягом багатьох років було випробувано безліч методів і шляхів розв'язання проблеми інтеграції гетерогенного програмного забезпечення [9]. І врешті-решт рішенням, яке довело свою ефективність, стала інтерооперабельність. Це означає, що різні застосування і системи здійснюють свої функції, дотримуючись при цьому загального стандарту в області комунікації і обміну даними.

Портальні технології, побудовані на принципах SOA, значно спрощують взаємодію і, як наслідок, – інтеграцію застосувань корпоративної гетерогенної мережі [5].

Сервіси порталів дають можливість створювати інтерфейси для мережних застосувань і, таким чином, забезпечують доступ користувачів до мережних ресурсів за допомогою стандартних мов програмування та мережних протоколів [10].

Замість гетерогенних систем, кожна з яких має власний транспортний протокол, формат даних, протокол взаємодії тощо, можлива взаємодія застосувань через сервіси порталу у віртуальній гомогенній ІКС.

Інтерооперабельність означає спроможність сервісів, реалізованих із використанням різних технологій та платформ, взаємодіяти один з одним (рис. 6). Такої взаємодії в межах SOA мож-

на досягнути кількома способами, один з яких полягає в тому, щоб вибрати реалізацію технології, яка є відкритим стандартом та має широкую сферу застосування. Інший підхід полягає в тому, що потрібно забезпечити зв'язки різних типів (де кожний тип призначений для конкретного протоколу та формату даних) [11].

SOA зорієнтована на інтеграцію застосувань та інформаційних ресурсів на основі обміну інформації, яка базується на застосуванні спільної семантики чи опису, що використовуються для визначення структури інформації на мережному рівні.

Сервіси, які спираються на відкриті стандарти, роблять застосування більш гнучким і значною мірою підвищують інтерооперабельність.

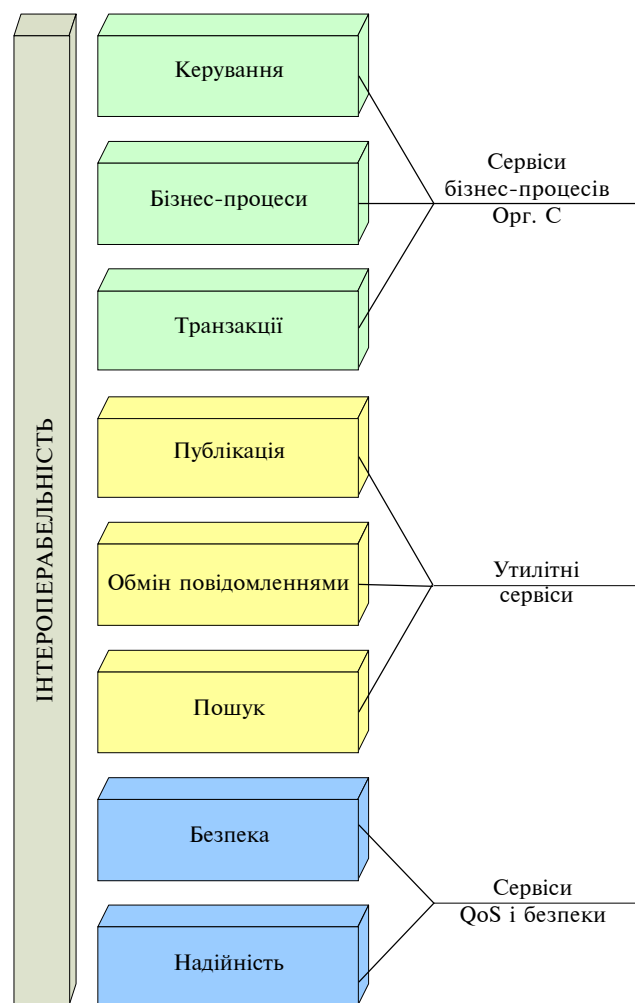


Рис. 6. Інтерооперабельність

Проектування порталів на основі модифікованої технології надає компаніям ряд економічних та виробничих переваг. Основною перевагою даної технології є застосування ітеративно-інкрементного процесу проектування порталу, який передбачає створення моделі порталу у вигляді необхідної і достатньої сукупності діаграм, як правило, в нотатції UML (Unified Modeling Language), створення компонентної моделі порталу та розробки специфікацій для його фізичної реалізації. Цей підхід дозволяє описати бізнес-процеси у зрозумілому вигляді на всіх рівнях абстракції та надати системне розуміння процесів, які функціонують в Орг. С.

Виконуючи проектування всіх сервісів порталу за допомогою UML-діаграм, RSA (Rational Software Architect) забезпечує автоматичну генерацію вихідних кодів та необхідної документації, що значно зменшує ризики і час розробки готового рішення.

Приклад застосування модифікованої технології проектування. Ця технології була використана при розробці корпоративного порталу Державної податкової адміністрації України. При застосуванні цієї технології спільні сервіси, такі, наприклад, як безпека застосування, були внесені в ядро порталу, що скоротило час на розробку безпеки кожного сервісу. А бізнес-процеси реалізувались як окремі компоненти, що зробило рішення гнучким.

Проектування сервісу, яке проводилось за допомогою UML та при застосуванні RSA, дало змогу генерувати вихідні коди та продукувати технічну документацію, що також скоротило час розробки.

Впровадження порталу для ДПА України надало такі переваги:

- прискорило підготовку довідок, звітів, оглядів, рішень (включаючи розгорнуті обґрунтування);

- зменшило час на прийом відвідувачів, виправлення помилок і розбір конфліктних ситуацій;

- скоротило кількість документів, які необхідно друкувати на паперових носіях і видавати відвідувачам або розсилати поштою.

Висновки

Портали продовжують залишатися важливим компонентом майже всіх SOA-стратегій розробки, заснованих на таких загальносистемних характеристиках, як здатність змінювати архітектуру, інтегрувати різноманітні складні, розподілені системи, забезпечувати віддалений доступ, давати окремим учасникам можливість створювати власні ресурси і керувати ними, сприяти on line-співробітництву та обміну інформацією.

Таким чином, в результаті дослідження пропонується:

- 1) застосовувати прикладний системний аналіз для виділення компонентів корпоративного порталу;

- 2) видавати рекомендації щодо застосування прикладного системного аналізу для вибору сфери застосування сервісів як засобу реалізації бізнес-процесів;

- 3) вдосконалювати технологію проектування корпоративного порталу із застосуванням компонентного процесу розробки.

В результаті використання принципів SOA і застосування вдосконаленої технології проектування і реалізації корпоративних порталів організація отримує можливість підвищення швидкості, з якою вона може впроваджувати нові продукти і процеси або змінювати існуючі, зменшувати повну вартість володіння, спростувати інтеграцію при злитті або поглинанні, спростувати корпоративну архітектуру і комп'ютерні моделі тощо.

П.П. Маслянюк, К.В. Стокоз

ИССЛЕДОВАНИЕ МЕТОДОВ И РАЗРАБОТКА ИНТЕГРИРОВАННЫХ СРЕДСТВ ДОСТУПА К ИНФОРМАЦИОННЫМ РЕСУРСАМ ИНФОРМАЦИОННО-КОММУНИКАЦИОННОЙ СИСТЕМЫ

Представлены результаты сравнительного анализа существующих технологий проектирования порталов, предложена усовершенствованная тех-

P.P. Maslyanko, K.V. Stokoz

METHODS RESEARCH AND DEVELOPMENT OF THE INTEGRATED TOOLS FOR ACCESS TO INFORMATION RESOURCES OF INFORMATION COMMUNICATION SYSTEM

This study considers the comparative analysis results of the existing portal design technologies and introduces an advanced corporate portal design

нологія проєктування корпоративного портала. Сформулировані рекомендації относительно применения прикладного системного анализа и компонентного процесса разработки корпоративных порталов.

technology. Provided are the recommendations on the system analysis application and a component process of the corporate portal development.

1. *Масляно П.П., Стокоз К.В.* Розробка та дослідження технологій автоматизованого проєктування корпоративних порталів // Сучасні проблеми прикладної математики та інформатики. – Львів, 2006. – С. 161.
2. *Масляно П.П., Стокоз К.В.* Проблеми проєктування та застосування порталів // Сучасні тенденції розвитку інформаційних технологій в науці, освіті та економіці: Матер. Всеукр. наук.-практ. конф., 11–13 грудня 2006 р., м. Луганськ. – Луганськ: Альма-матер, 2006. – С. 188–190.
3. *Молчанов А.А., Масляно П.П., Белицкий Б.Р.* Корпоративные порталы // Искусственный интеллект. – К., 2002. – С. 510–525.
4. *Technologies and Standards for Service-Oriented Architecture Project Implementation // IBM Course SW719*
5. *Fielding R.Th.* Architectural Styles and the Design of Network-based Software Architectures: Dissertation. – 2000. – P. 180.
6. *Масляно П.П., Стокоз К.В.* Дослідження та аналіз методів та технологій проєктування корпоративних порталів // Сучасні проблеми радіоелектроніки, телекомунікацій та комп'ютерної інженерії. – Львів, 2008. – С. 208–301.
7. *Design SOA Solutions and Apply Project. Technical and Operational Governance // IBM Course SW718*
8. *Масляно П.П., Стокоз К.В.* Технології та системи автоматизації проєктування порталів // Вісник КУЕІТУ. Нові технології. – 2007. – № 1-2 (15-16). – С. 119–124.
9. <http://www.microsoft.com/Ukraine/News/Issues/2005/02/Gates.aspx>
10. *Chandran Anup* Architecting Portal Solutions // IBM Redbooks, 2003. – С. 508.
11. *Service Oriented Architecture Design Patterns // IBM Course SW708*

Рекомендована Радою факультету прикладної математики НТУУ "КПІ"

Надійшла до редакції
19 червня 2008 року

УДК 681.3

Ю.П. Матусов

ЗАСТОСУВАННЯ ПОХІДНОЇ Ф. КЛАРКА У КВАЗІДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ МЕТОДАХ СТОХАСТИЧНОЇ ОПТИМІЗАЦІЇ

Вступ

Проблема вибору методів стохастичної оптимізації залишається актуальною, оскільки необхідно розв'язувати реальні неопуклі задачі оптимізації чи керування [1–5]. Використання чистого прогнозування (екстраполяції чи інтерполяції) або з фільтрацією для побудови оптимальних оцінок перетворень випадкових функцій не завжди допомагає розв'язанню задачі, оскільки в задачах наявні невизначеність і похибки в спостереженнях за складною цільовою функцією в умовах досить складного математичного апарату підрахунків [3].

Поєднання прогнозування окремих характеристик із стохастичною оптимізацією переводить неопуклу задачу в локально опуклу в результаті дії відомих методів [4, 5, 7–10].

Стаття присвячена оцінкам лінійних перетворень випадкових функцій у стохастичній оптимізації в ході аналізу додаткової інформації про “яри” неопуклої цільової функції. Розглянуто використання прогнозувань наближення і похідної Ф. Кларка [1, 6] як альтернативний підхід у побудові відомих квазідиференціальних методів стохастичної оптимізації на прикладі таких методів, як проєкції стохастичних квазіградієнтів, стохастичної лінеаризації, стохастичних еліпсоїдів і стохастичних відсікань [7–11].

Збіжність вказаних процедур оптимізації доводиться за допомогою розгляду квазіфейєровських послідовностей значень цільової функції або її квазіградієнтів [6, 11].

Постановка задачі

У задачах опуклого стохастичного програмування імовірнісна природа цільової функції і обмежень дає можливість будувати стохастичні квазіградієнти за Ф. Кларком і використовувати їх у прямих методах пошуку екстремуму [6]. Дана стаття і присвячується цьому.

Умови дослідження

Нехай у заданому імовірнісному просторі (Ω, Ξ, P) шукається випадкова функція $x(\omega)$: $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathfrak{R}^n$, $\omega \in \Omega$, вимірна відносно B (σ -підалгебри Ξ), яка мінімізує цільову функцію $F^0(x)$. Якщо виконати всі умови, достатні для диференціювання під знаком математичного сподівання, то можна розраховувати на розв'язок задачі $x^*(\omega)$ і тоді запишемо

$$\begin{aligned} F(x^*(\omega) + \alpha g(\omega)) &= \\ &= F(x^*(\omega)) + \alpha(\partial F(x^*(\omega))/\partial g(\omega)) + o(\alpha, g(\omega)), \\ \frac{o(\alpha(g))}{\alpha} &\xrightarrow{\alpha \rightarrow +0} 0, \\ (\partial F(x^*(\omega))/\partial g(\omega)) &= M[\partial f(x^*(\omega), \omega)/\partial g(\omega)]. \end{aligned} \quad (1)$$

У квазіградієнтних методах оптимізації послідовність $x^0, x^1, \dots, x^n, \dots$ будується без точних значень функцій $F^i(x) = M[f^i(x, \omega)]$, $i = 0, 1, 2, \dots, m$, та їх субградієнтів $g^i(x)$. Замість значень $F^i(x)$ і $g^i(x)$, $i = 0, 1, 2, \dots, m$, на s -му кроці беруться випадкові величини $\xi^i(s)$ та випадкові вектори $\eta^i(s)$, зафіксовані в розумінні Ф. Кларка [10] як статистичні зміщені оцінки значень $F^i(x^s)$ і $g^i(x^s)$, відповідно. Оцінкою $g^i(x^s)$ виступає квазіградієнт $\eta^i(s)$ за Ф. Кларком. Таким чином, матимемо

$$\begin{aligned} F^0(x) &= M[f^0(x, \omega)] \rightarrow \min \rightarrow \\ &\rightarrow M[\xi^0(s) | x^0, x^1, \dots, x^s] = F^0(x^s) + a^0(s) \rightarrow \min, \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} F^i(x) &= M[f^i(x, \omega)] \leq 0, \quad i = 1, 2, \dots, m, \rightarrow \\ &\rightarrow M[\xi^i(s) | x^0, x^1, \dots, x^s] = F^i(x^s) + a^i(s) \leq 0, \end{aligned} \quad (3)$$

$M[\eta^i(s) | x^0, x^1, \dots, x^s] = g^i(x^s) + b^i(s)$, $i = 0, 1, 2, \dots, m$, для квазіградієнта

$$g^i(x^s) \in D(F^i(x^s)), \quad (4)$$

де $a^i(s)$ – випадкові величини; $b^i(s)$, $i = 0, 1, 2, \dots, m$ – випадкові вектори, залежні від попередніх спостережень і вимірні за σ -підалгеброю B_s , яка індукована серією (x^0, x^1, \dots, x^s) . Якщо

$b^i(s) = 0$, то замість квазідиференціала D беруть стохастичні субградієнти $g^i(x^s) \in \partial F^i(x^s)$, а в гладкому випадку – стохастичні градієнти $g^i(x^s)$. Отже, поставлена задача оптимізації (1)–(4).

З точки зору прогнозування всяка стаціонарна послідовність випробувань над цільовою функцією $g(n)$ задається у вигляді ортогональної суми регулярної $g(n)_R$ та сингулярної $g(n)_S$ послідовностей. Сингулярна послідовність екстраполюється безпомилково, тому найменш сприятливою є послідовність $g(n)_R$, яка допускає канонічне зображення

$$g(n)_R = \sum_{m=-\infty}^n c(n-m)b(m), \quad \sum_{m=0}^{\infty} c^2(m) < \infty, \quad (5)$$

$$M[|g(n)|^2] = 1, \quad \sum_{m=0}^{\infty} c^2(m) = 1,$$

де $b(m)$ – послідовність випадкових некорельованих величин з одиничною дисперсією. Канонічне зображення $g(n)_R$ характерно тим, що можна за його допомогою записати оцінки $D(\hat{g}, g)$ -перетворень:

$$\hat{g}(n) = \sum_{m=-\infty}^{-1} c(n-m)b(m), \quad \min D(\hat{g}, g) =$$

$$= M \left[\sum_{j=0}^{\infty} a(j)(g(j) - \hat{g}(j)) \right]^2 = \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{q=0}^{\infty} c(p)c(q)K(p, q), \quad (6)$$

$$\hat{g}(n) \in \hat{G}, \quad K(p, q) = \sum_{m=0}^{\infty} a(m+p)a(m+q),$$

де $K(p, q)$ – оператор у гільбертовому просторі l_2 з відповідною матрицею K , $p, q = 0, 1, 2, \dots$. Оператор K має вигляд $K = A^2$, де A – симетричний і неперервний оператор у просторі l_2 з матрицею, елементи якої становлять $a_{i,j} = a(i+j-2)$, $i, j = 1, 2, \dots$. Тоді $\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} a_{i,j}^2 = \sum_{m=0}^{\infty} (m+1)a^2(m) < \infty$, і оператор K буде неперервним. Власними векторами оператора $K \in \{c(k)\}$, власними значеннями – $\lambda_1^2 \geq \lambda_2^2 \geq \dots$, де λ_k – власне значення оператора A . І розв’язок задачі екстраполяції буде такий:

$$\max_{g(n) \in G} \min_{\hat{g}(n) \in \hat{G}} D(\hat{g}, g) = D(\hat{g}^*, g^*) = \lambda_1^2,$$

$$g^*(n) = \sum_{m=-\infty}^n c(n-m)b(m),$$

$$\hat{g}^*(n) = \sum_{m=-\infty}^{-1} c(n-m)b(m), \quad (7)$$

$$A \hat{g}^* = \sum_{j=0}^{\infty} a(j) \hat{g}^*(j),$$

де $c(n)$, $n = 0, 1, 2, \dots$, – власний вектор оператора K , який відповідає максимальному власному значенню λ_1^2 оператора K . Тоді усереднена оцінка наближення x^{s+1} на $s+1$ -му кроці ітерації зв’язана таким співвідношенням:

$$x^{s+1} = x^s - \alpha_s \rho_s R_{\alpha_s}(D(F^i(x^s)))g^i(x^s) / \|g^i(x^s)\|,$$

де $\rho_s R_{\alpha_s}(D(F^i(x^s)))$ – напрямок руху на мінімум за квазіградієнтом $g^i(x^s)$ з $D(F^i(x^s))$; $\alpha_s g^i(x^s) / \|g^i(x^s)\|$ – крок руху на мінімум, коли випадкові функції $a^i(s)$ та $b^i(s)$ в (2)–(4) знайдені в задачі екстраполяції (5)–(7).

Квазіградієнтні методи оптимізації з екстраполяцією

Метод проєкції стохастичних квазіградієнтів. В оптимізації (1)–(4) розглядається альтернативний метод проєкції стохастичних квазіградієнтів, який визначається іншим проектуванням:

$$x^{s+1} = \pi_X(x^s - \alpha_s \rho_s \eta^i(s)), \quad s = 0, 1, \dots, \quad (8)$$

$$i = 0, 1, 2, \dots, m,$$

де $\pi_X(\bullet)$ – оператор проектування x на квазідиференційовну множину X ; ρ_s – крок s -ї ітерації; $\eta^i(s) = R_{\alpha_s}(D(F^i(x^s)))$ – стохастичний квазіградієнт в розумінні (4); α_s – нормуючий множник. Проєкція $\pi_X(y)$ у на X задовольняє вираз

$$\pi_X(y) \in X, \quad \|x - \pi_X(y)\|^2 \leq \|x - y\|^2 \quad \forall x \in X. \quad (9)$$

Як і у відомому методі проекцій стохастичних квазіградієнтів, реалізація операції проектування зв'язана з мінімізацією квадратичної функції в допустимій області. Якщо (Ω, B, P) – деякий ймовірнісний простір, то послідовність випадкових точок $x^s(\omega)$, $s = 0, 1, \dots$, $\omega \in \Omega$, визначається за формулою (8) і випадковий вектор $\eta^i(s)$ має умовне математичне сподівання у вигляді

$$M[\eta^i(s) | x^0, x^1, \dots, x^s] = c^i(s)g^i(x^s) + b^i(s), \quad (10)$$

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in X \subset \mathfrak{R}^n,$$

де $s = 0, 1, \dots$, $i = 0, 1, 2, \dots, m$; X – обмежена множина; $c^i(s)$ – невід'ємна випадкова величина; $g^i(x^s)$, $b^i(s)$, $i = 0, 1, 2, \dots, m$, – випадкові вектори, які залежать від спостережень (x^0, x^1, \dots, x^s) ; вектор $\eta^i(s) = (\eta_1^i, \eta_2^i, \dots, \eta_n^i)$ – стохастичний квазіградієнт у розумінні Ф. Кларка.

Стохастичний метод лінеаризації. За наявності апроксимації складних функцій простими в альтернативному стохастичному методі лінеаризації розглядається підзадача мінімізації (або максимізації) в допустимій області лінійної функції, утвореної квазіградієнтом $g^i(x^s)$ (4). Нехай цільова функція $F^0(x)$ має неперервні похідні, X – опукла замкнена множина. Якщо є градієнт $F_x^0(x)$, то метод лінеаризації полягає в тому, що для деякого початкового наближення x^0 і для наближення після s -ї ітерації x^s розв'язується підзадача, наприклад, мінімізації лінійної функції вигляду

$$(F_x^0(x^s), x), \quad (11)$$

за наявності обмежень $x \in X$. Якщо \bar{x}^s – розв'язок цієї задачі, то нове наближення знаходиться за допомогою рекурентної формули адаптації

$$x^{s+1} = x^s + \rho_s(\bar{x}^s - x^s), \quad s = 0, 1, \dots, \quad (12)$$

де $\rho_s \in [0, 1]$; X – опукла замкнена множина; $\rho_s \in [0, 1]$, тому $x^{s+1} \in X$.

Коли відомі значення функції $F^0(x)$, крок ρ_s вибирається таким, щоб у напрямку руху $\bar{x}^s - x^s$ функція спадала, наприклад, за умови

$$F^0(x^{s+1}) = \min_{\rho \in [0, 1]} F(x^s + \rho_s(\bar{x}^s - x^s)). \quad (13)$$

Ідея цього методу впливає з визначення рухів на мінімум по $g^i(x^s)$. Лінеаризовані випадкові напрямки пошуку отримуються в результаті розв'язання задачі екстраполяції (5)–(7).

Метод проекції стохастичних квазіградієнтів в умовах шуму. Випадкові функції $a^i(s) + \delta_s^*$ (δ_s^* – шум) та $b^i(s)$ в такій оптимізації (2)–(4) отримуються вже в результаті розв'язання відповідних задач фільтрації з прогнозом. Зауважимо, що дія шуму аналогічна адитивній дії деякої невизначеності рухів на мінімум. Отже, розв'язання задачі фільтрації з прогнозуванням показує багаторазове застосування (5)–(7), бо в цьому випадку відбувається сценарна імітація над умовними математичними сподіваннями складових, які входять у цільову функцію. Постановка ж задачі в цілому відповідає (1)–(4).

В оптимізації (1)–(4) розглядається альтернативний метод проекції стохастичних квазіградієнтів в умовах дії адитивного шуму h^s , який теж визначається проектуванням:

$$x^{s+1} = \pi_X(x^s - \alpha_s \rho_s(\eta^i(s) + h^s)), \quad s = 0, 1, \dots, \quad (14)$$

$$i = 0, 1, 2, \dots, m,$$

де $\pi_X(\bullet)$ – оператор проектування x на квазідиференційовну множину X ; ρ_s – крок s -ї ітерації; $\eta^i(s) = R_{\alpha_s}(D(F^i(x^s)))$ – стохастичний квазіградієнт у розумінні (4); α_s – нормуючий множник. Проекція $\pi_X(y)$ у на X задовольняє вираз (9), в якому x відповідає (14) з шумом h^s .

У методі проекцій стохастичних квазіградієнтів в умовах шуму реалізація операції проектування виконується аналогічно, як і в методі (8)–(10). Випадковий вектор $\eta^i(s)$ у вигляді (10) має випадкові вектори з адитивним шумом $h^s - g^i(x^s)$, $b^i(s)$, $i = 0, 1, 2, \dots, m$, які залежать від спостережень (x^0, x^1, \dots, x^s) . Вектор $\eta^i(s) = (\eta_1^i, \eta_2^i, \dots, \eta_n^i)$ – стохастичний квазіградієнт у розумінні (4), який теж залежить від послідовності (x^0, x^1, \dots, x^s) спостережень в умовах шуму. На практиці випадкові послідовності $x^s(\omega)$ обмежені, бо мають “зрізані” закони розподілу, а шум вважається “білим”. Тоді вибирається оптималь-

на проекція за оптимальною лінійною оцінкою вектора $\eta^i(s) = (\eta_1^i, \eta_2^i, \dots, \eta_n^i)$ стохастичного квазіградієнта в розумінні (4). Якщо $\eta^i(x^s) =$

$$= \sum_{j=1}^n \frac{F^i(x^s + \Delta_s e^j, \omega^{sj}) - F^i(x^s, \omega^{s_0})}{\Delta_s} e^j, \text{ де } e^j -$$

орт j -ї осі координат змінних, а $\|b^i(s)\| \leq C^i \Delta_s$, $i = 0, 1, 2, \dots, m$, C^i – сталі, Δ_s – точність s -го кроку, то вказаний метод перетворюється в метод стохастичної апроксимації з шумом, окремим випадком якої є лінеаризація з шумом.

Якщо X утворене нелінійними нерівностями при наявності адитивного шуму, то відбуваються модифікації методу (14): операція проектування виконується наближено за допомогою нескінченних процедур, які перериваються через деяку кількість ітерацій, щоб уточнити цільову функцію і зробити фільтрацію. Ефективно $\pi_X(\bullet)$ будується для квазідиференційовних множин спеціального вигляду. Якщо множина $X = \{x: \alpha_i \leq x_i \leq \beta_i, i = 1, \dots, n\}$, то i -а компонента проекції $\pi_X(y)$ матиме вигляд $(\pi_X(y))_i = \max(\min(\alpha_i, y_i), \beta_i)$.

Екстраполяція кроків α_s в методі (14), (9) виконується, коли з'ясовано напрямку руху ρ_s . При фіксації вибраного напрямку на мінімум розв'язується одновимірна задача умовної мінімізації для визначення кроку руху α_s уздовж даного напрямку. Задача має багато локальних мінімумів при наявності шуму (рис. 1), що зумовлено випадковістю площини функції перетину даного напрямку із загальною цільовою функцією, яка має стохастичні складові з шумом (рис. 2). Неоднозначність реалізації методу (14), (9) пов'язана з неоднозначністю вибору вектора $\eta^i(s)$, який задовольняє (10). Процес (14) нерелаксаційний – цільова функція не обов'язково спадає. Тому хоча й можуть бути відомі значення $F^0(x^s)$, все одно існують труднощі, пов'язані з вибором ρ_s та α_s , особливо при наявності шуму. Найкраще робиться екстраполяція рухів за відомими спостереженнями відфільтрованих значень функції. Тоді маємо мінімум тренду $f_1(x)$.

При розв'язанні задачі фільтрації і усереднення $\bar{F}^0(s) = \frac{1}{s} \sum_{k=0}^s F^0(x^k)$ характер функції бу-

де більш гладким, отже, величини $\bar{F}^0(s)$ перестають суттєво змінюватися. У цьому випадку зменшується і крок α_s .

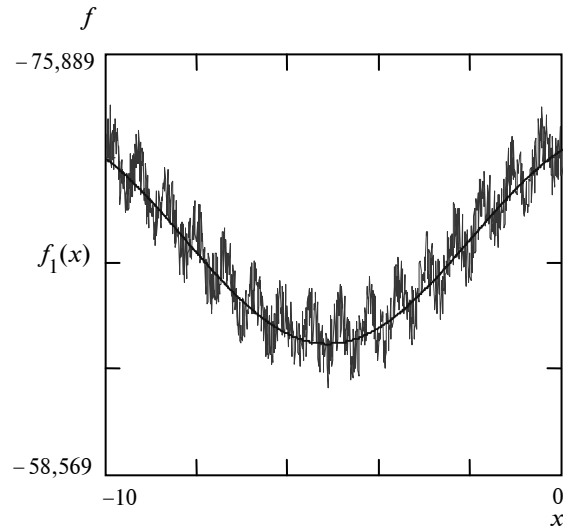


Рис. 1. Цільова функція $f(x)$ з шумом і тренд $f_1(x)$ для екстраполяції α_s

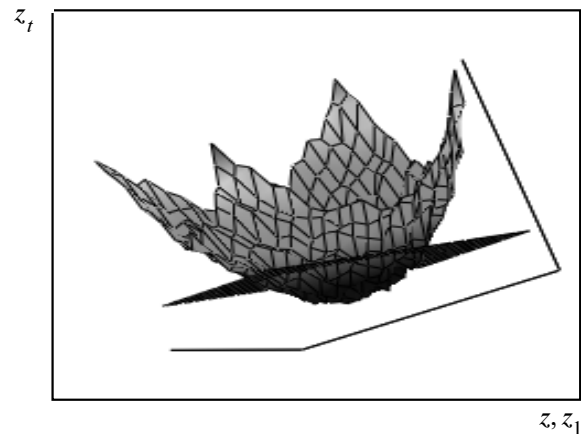


Рис. 2. Використання значень $f^0(x, \omega)$ цільової функції для екстраполяції рухів α_s

Якщо в задачах стохастичної оптимізації немає можливості знайти значення $F^0(x^s)$, то замість них обчислюються значення $f^0(x, \omega)$, які стоять під знаком математичного сподівання. На рис. 2 показано типовий графік поведінки цільової функції $z_t(t, \omega)$ з шумом h^s , який адитивно входить у коливання складових z, z_1 . Оскільки для шуму $M[h^s] = 0$, то усереднення має вигляд $\bar{F}^0(s+1) = \bar{F}^0(s) - \frac{1}{s+1} \times$

$\times (f^0(x^s, \theta^s) - \bar{F}^0(s))$. І для обчислення $\bar{F}^0(s)$ не потрібно тримати в пам'яті всю послідовність $F^0(x^s)$. Достатньо використовувати послідовність $f^0(x^s, \theta^s)$ і розв'язувати задачу екстраполяції після того, як відфільтровано шум.

Для того щоб мати можливість "проскакувати" локальні екстремуми, проводиться процедура: замість кроків $\alpha_s \rho_s f'_k(x^s)$ розглядається додатковий доданок з випадковим вектором h^s з $M[h^s] = 0$. Щоб надати процедурі спрямованість пошуку одного мінімуму, вводиться "білий" шум $h^s = (h_1^s, h_2^s, \dots, h_n^s)$, $M[h^s] = 0$ в напрямку пошуку мінімуму:

$$x^{s+1} = x^s - \alpha_s \rho_s (f'_k(x^s) + h^s), \quad s = 0, 1, \dots \quad (15)$$

Випадкова складова h^s дає можливість продовжити рух у тих випадках, коли $f'_k(x^s) = 0$. Вектори $\eta^i(s) = g^i(x^s) + h^s$, $i = 0, 1, 2, \dots, m$, задовольняють основне співвідношення (14). І якщо довжини кроків ρ_s обмежені, а коефіцієнт кроку α_s прямує до $+0$, то процес збігається [11].

Квазіградієнтні методи оптимізації з інтерполяцією

Постановка задачі в цілому відповідає (1)–(4). Для об'єкта (1)–(4) в умовах кроків руху як для стаціонарного випадкового процесу $\xi(t)$ із заданою спектральною щільністю $f(\lambda) = \{f_{k,j}(\lambda)\}_{k=1, \dots, n}^{j=1, \dots, n}$ оцінювання похибки інтерполяції показано в середньоквадратичному для проекції $\hat{\xi}_k(t)$ значень $\xi_k(t)$, $t \in T_k$, на лінійне замикання $\hat{H}(T)$ відомих величин $\xi_k(t)$, $t \in T_k$, $k = 1, \dots, n$, в межах сітки спостережень. Це відповідає побудові квазіфейєровських послідовностей $g(n)$ за типом (5)–(7) в межах сітки, що гарантує збіжність пошуку мінімуму. Мінімізується похибка оцінки в середньо квадратичному у вигляді

$$D(\hat{g}, g) = \|Ag - \hat{A}g\|^2 = M[Ag - \hat{A}g], \quad (16)$$

при цьому знаходяться мінімальна похибка цієї оцінки $D(\hat{g}^*, g^*) = \min D(\hat{g}, g)$, найменш сприятлива послідовність $g^*(n)$ і оптимальна для неї лінійна інтерполяція $\hat{g}^*(n)$, що виявляє оптимальну оцінку $\hat{A}g^*$ в умовах заданого перетворення A в межах сітки спостережень. Процес пошуку мінімуму контролюється в межах вікна сітки спостережень, доки не з'явиться нова сітка спостережень.

Для відомих значень $\xi_k(t)$ стаціонарного процесу $\xi(t) = \{\xi_k(t)\}_{k=1, \dots, n}$ розташування центрів еліпсоїдів за раніше спостережуваними значеннями, крім лише скінченної кількості значень $\xi_k(t_k)$ у моменти часу $t_k \in T_k$, інтерполюються невідомі значення $\xi_k(t_k)$ в межах сітки спостережень.

Для мінімальності стаціонарного процесу $\xi(t) = \{\xi_k(t)\}_{k=1, \dots, n}$ із спектральною щільністю $f(\lambda) = \{f_{k,j}(\lambda)\}_{k=1, \dots, n}^{j=1, \dots, n}$ необхідно і достатньо, щоб виконувалося співвідношення

$$\int_{-\pi}^{\pi} \text{Sp} f^{-1}(\lambda) d\lambda < \infty, \quad (17)$$

де $\text{Sp} A$ – слід матриці перетворення A :

$$A = \{A_k l\}, \quad k = 1, \dots, n, \quad l = 1, \dots, n; \quad \text{Sp} A = \sum_{k=1}^n A_{kk}.$$

Величини $\hat{\xi}_k(t)$ дають найкращий прогноз для лінійної інтерполяції. Умова ортогональності величини $\hat{\xi}_k(t_0)$ до ΔT еквівалентна такій:

$$M \hat{\xi}_k(t_0) \bar{h}^{l,t} = \int_{-\pi}^{\pi} e^{-i\lambda t} [\hat{\varphi}_k(\lambda) f(\lambda) p_l^*(\lambda)] d\lambda = 0, \quad (18)$$

$$t \in T_l, \quad l = 1, \dots, n,$$

де $p_k(\lambda) = \{p_{k,j}(\lambda)\}_{j=1, \dots, n}$ – k -й рядок матриці $f^{-1}(\lambda) = \{p_{k,j}(\lambda)\}_{k=1, \dots, n}^{j=1, \dots, n}$, оберненої до $f(\lambda)$.

У випадку мінімальності одновимірного процесу $\xi(t)$ і $T = \{t_0\}$ впливає формула найкращої інтерполяції центрів t_0 еліпсоїдів:

$$\hat{\xi}(t_0) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda t_0} \left[1 - \frac{2\pi}{\int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\mu}{f(\mu)}} \frac{1}{f(\lambda)} \right] \Phi(d\lambda),$$

$$\sigma = [M |\xi(t_0) - \hat{\xi}(t_0)|^2]^{\frac{1}{2}} = \frac{2\pi}{\left(\int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\lambda}{f(\lambda)} \right)^{\frac{1}{2}}}. \quad (19)$$

Таким чином, у виразі (19) визначено i -й напрямку руху $x_i^{s+1} = x_i^s - \alpha_s \rho_s B_s R \beta(\xi_s)$, $i = 1, \dots, m$; $s = 0, \dots, n$: $\|A_s(x_s - x)\| \leq n\rho_s$, де $x_s = x_s(V_{\Phi_s})$ – центр стохастичного еліпсоїда Φ_s , який інтерполюється за стаціонарним випадковим процесом $\xi(t)$ із заданою спектральною щільністю $f(\lambda)$. Усереднена оцінка наближення x^{s+1} відповідає (16) з обмеженням: $g^i(x^s) \in A$; $\rho_s R_{\alpha_s}(D(F^i(x_s)))$ – напрямку руху на мінімум у межах сітки спостережень A ; $\alpha_s g^i(x^s) / \|g^i(x^s)\|$ – крок руху на мінімум в умовах інтервального обмеження A . Випадкові функції $a^i(s)$ і $b^i(s)$ в (2)–(4) в цьому випадку отримуються в результаті розв'язання відповідних задач інтерполяції (5)–(7), (16)–(19).

У загальному випадку стохастичні методи оптимізації з інтерполяцією, в яких вводяться функції обмежень, виступають як штрафні функції і мають вигляд таких ітерацій:

$$x^{s+1} = x^s - \alpha_s \rho_s (R_{\alpha_s}(D(F^i(x_s))) g^i(x^s) / \|g^i(x^s)\| +$$

$$+ C \sum_{i=1}^n \min\{0, \beta_i^s\} \eta^i(s)), \quad s = 0, 1, \dots,$$

або

$$x^{s+1} = x^s - \alpha_s \rho_s (\eta^0(s) - C \sum_{i=1}^n \min\{0, \beta_i^s\} \chi_i(s) \eta^i(s)),$$

$$s = 0, 1, \dots, \quad \eta^i(s) \in D(F^{i*}(x_s^*)), \quad (20)$$

де $\beta_i^{s+1} = \beta_i^s + \delta_s (\chi_i(s) - \beta_i^s)$; $F^{i*}(x_s^*)$ – значення на сітці спостережень, $s = 0, 1, \dots$, $i = 1, \dots, n$.

Процедура усереднення випадкових величин β_i^{s+1} виконується з ваговою функцією $\chi_i(s)$, C – велике число, або парна степенева функція вигляду c^B . Коли ставиться задача

уточнювання положення екстремуму в деякому об'ємі, то інтерполюються параметри $\rho_s, \delta_s, \alpha_s$ в умовах обмежень сіткою значень і функція c^B вибирається як внутрішній штраф для ефективності обмеження.

Метод стохастичних еліпсоїдів. Нехай у детермінованому випадку, коли доведено з інших джерел існування мінімуму $\{0\} \in D(F(x_0))$, маємо обмеження $x^* \in S(x_0, R)$, або $\|x - x_0\| \leq R$, де існуюча точка мінімуму x^* розташована в кулі $S(x_0, R)$ радіусом R із центром в x_0 . Домен з x^* розміщується у внутрішній частині кулі S . Випробування з $F(x_0)$ проводиться в сферичному околі значень початкової сітки наближень.

Ітеративний алгоритм детермінованого методу еліпсоїдів полягає в тому, що вибирається початкове наближення $x_0 \in X^{n-1} \subset \mathfrak{R}^n$, неособлива матриця B_0 (B_0 збігається з одиничною матрицею E_{n-1}) і робиться початковий крок $\rho_0 = R/n$ руху. Субградієнт $g_0 = g_0(x_0) \in \partial F(x_0)$ нормується, тобто $\xi_0 = g_0 / \|g_0\|$, і перший крок алгоритму проводиться за формулою $x_1 = x_0 - \alpha_0 \rho_0 B_0 \xi_0$, де $\alpha_0 > 0$ – деякий кроковий множник, який при $B_0 = E_{n-1}$ збігається з ітерацією звичайного субградієнтного процесу з α_0 -розтягом простору, а взагалі кроковий множник вибирається з умови існування в точці x_1 субградієнта $g_1 = g_1(x_1) \in \partial F(x_1)$, $(g_1(x_1), \rho_0) \leq 0$.

Нехай у результаті обчислень після S ($S = 1, 2, \dots$) кроків процесу отримані значення $x_s \in X^{n-1}$ і матриці B_s розмірності $(n-1) \times (n-1)$, $\rho_s > 0$.

Запишемо $s+1$ -й крок процесу.

1. Обчислюємо значення субградієнта $g_s = g_s(x_s) \in \partial F(x_s)$, нормуємо його, щоб отримати напрямку руху (якщо $g_s(x_s) = 0$, то x_s – шукана точка): $\xi_s = B_s^* g_s(x_s) / \|B_s^* g_s(x_s)\|$.

2. Записуємо $s+1$ -у точку: $x_{s+1} = x_s - \alpha_s \rho_s B_s \xi_s$, причому $B_{s+1} = B_s R \beta(\xi_s)$, де $R \beta(\xi_s)$ – оператор розтягу простору із сталим коефіцієнтом β в напрямку нормованого субградієнта ξ_s . Коефіцієнт β буде таким: $\beta = \sqrt{(n-2)/n}$, а на-

ступний крок руху матиме вигляд $\rho_{s+1} = \rho_s r(n)$, де $r(n-1) = \frac{n-1}{\sqrt{(n-1)^2 - 1}}$. Послідовність точок $\{x_s\}$, $s = 0, 1, \dots, N$, яка генерується вказаним алгоритмом, задовольняє нерівність $\|A_s(x_s - x^*)\| \leq \rho_s n$, а $A_s = B_s^{-1}$, $s = 0, 1, \dots, N$, де N – велике число, при якому алгоритм збігається до шуканого розв'язку x^* , коли $g_N(x^*) = 0$ або $|g_N(x^*)| = \varepsilon > 0$ – із заданою точністю ε . Множина точок x згідно з нерівністю $\|A_s(x_s - x^*)\| \leq n\rho_s = R \left(\frac{1}{\sqrt{(n-1)^2 - 1}} \right)$ – це еліпсоїд Φ_s , об'єм якого $V(\Phi_s)$ при $k = n-1$ матиме вигляд

$$V(\Phi_s) = V_0 R^k (k/\sqrt{k^2 - 1})^{ks} / \det A_s,$$

де V_0 – об'єм одиничної k -вимірної кулі.

Об'єм еліпсоїда 2 на рис. 3, в якому локалізується точка мінімуму як центр цього еліпсоїда, зменшується за геометричною прогресією із знаменником q_k :

$$\begin{aligned} V(\Phi_{s+1})/V(\Phi_s) &= \det A_s (k/\sqrt{k^2 - 1})^k / \det A_{s+1} = \\ &= \det A_s (k/\sqrt{k^2 - 1})^k / \det A_s \det R_{\beta}(\xi_s) = \quad (21) \\ &= \beta (k/\sqrt{k^2 - 1})^k = q_k < 1. \end{aligned}$$

У стохастичному випадку процес локалізації мінімуму змінюється, що показує, що деформований еліпсоїд 1 на рис. 3, – стохастична адитивна сукупність недеформованих еліп-

соїдів 3 з різним розташуванням центрів, які інтерполюються. Щоб виконати один крок оптимізації, достатньо в задачі інтерполяції отримати одну інтерполяційну точку.

Стохастичний метод відсікань. Розглядається лінійний статистичний метод оцінок дотичних до ліній рівня за квазіградієнтами в розумінні (4). Розв'язується підзадача мінімізації (або максимізації) цільової функції в допустимій області змінних і допустимій області розташування дотичних, які обмежують область, що відсікається.

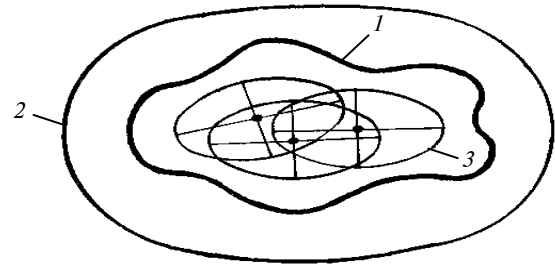


Рис. 3. Локалізація мінімуму за методом еліпсоїдів

Нехай цільова функція $F^0(x)$ має неперервні похідні, X – опукла замкнена множина. Якщо градієнт $F_x^0(x)$ відомий, то звичайний метод відсікань полягає в тому, що для деякого початкового наближення x^0 і для наближення після s -ї ітерації x^s розв'язується підзадача мінімізації лінійної функції вигляду (11)–(13), як і при лінеаризації за наявності обмежень $x \in X$.

Загальна ідея методу впливає з аналізу рухів на мінімум (рис. 4).

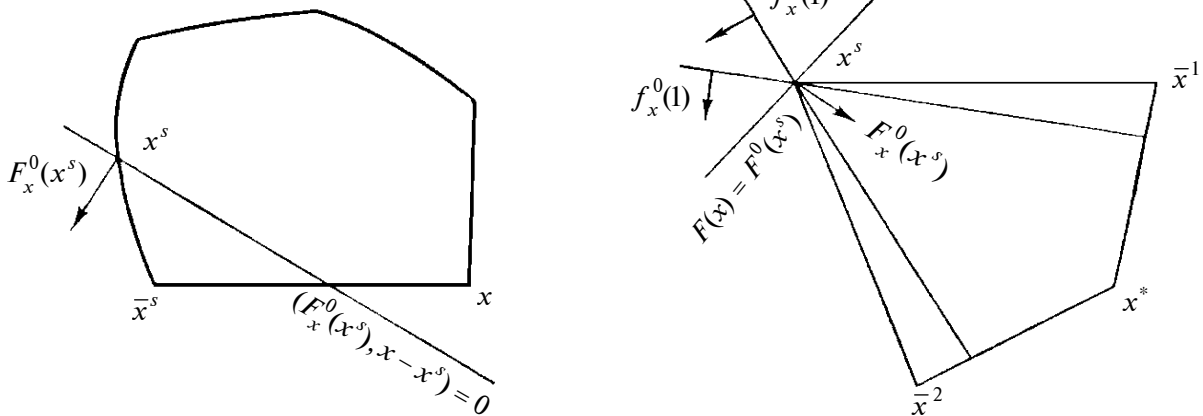


Рис. 4. Відкидання області за методом відсікань

Напрямок антиградієнта $F_x^0(x^s)$ може виходити з області X , а напрямок $\bar{x}^s - x^s$ веде до спадання $F^0(x)$, і коли $\rho_s \in [0,1]$, то не виводить точку з X , показуючи, що область, яка веде до зростання цільової функції, відкидається. А оскільки загальна область пошуку обмежена, то в ході процесу область невизначеності мінімуму стягується в точку. Градієнт $F_x^0(x^s)$ лінійної функції (11) зображується як сума доданків $f_x^0(x)$ на рис. 4: $F_x^0(x^s) = p_1 f_x^0(1) + p_2 f_x^0(2)$, де $f_x^0(1)$ і $f_x^0(2)$ не залежать від x для множини $\Omega = \{1,2\}$, $\eta^0(s) = f_x^0(\omega^s)$, $\omega^s = 1$ або $\omega^s = 2$ з ймовірностями p_1, p_2 . Точка мінімуму $F^0(x)$ є x^* . А розв'язком підзадач $(f_x^0(\omega^s), x)$, коли $\omega^s \in \Omega = \{1,2\}$ будуть інші точки \bar{x}^1, \bar{x}^2 , тому рух за формулою (13) за будь-яких ρ_s можливий тільки вздовж напрямків до точок \bar{x}^1, \bar{x}^2 і ніколи не буде руху до точки x^* . Якщо ж примусово зробити рух до точки x^* , то можна відсікти "гарну" область і не знайти область мінімуму. Щоб була збіжність, усереднюється вектор $\bar{F}_x^0(s) = \frac{1}{s+1} \sum_{k=0}^s f_x^0(x^k, \omega^k)$, який визначається рекурентно: $\bar{F}_x^0(s+1) = \bar{F}_x^0(s) - \frac{1}{s+1} (f_x^0(x^{s+1}, \omega^{s+1}) + \bar{F}_x^0(s))$. Дійсно, нехай $\eta^0(s)$ – стохастичний квазіградієнт $F^0(x)$ в розумінні (4), $x^0 \in X$, x^s – наближення після s -ї ітерації. Розглянемо послідовність точок

$$z^{s+1} = z^s + \delta_s (\eta^0(s) - z^s), \quad s = 0, 1, \dots, \quad (22)$$

де z^0 – довільна початкова точка. Якщо $\eta^0(s) = f_x^0(x^{s+1}, \omega^{s+1})$, $\delta_s = \frac{1}{s+1}$, то $z^s = \bar{F}_x^0(s)$. Тепер запишемо послідовність наближень x^s у вигляді

$$x^{s+1} = x^s + \rho_s (\bar{x}^s - x^s), \quad (23)$$

$$s = 0, 1, \dots, \quad (z^s, \bar{x}^s) = \min_{x \in X} (z^s, x),$$

де $x^0 \in X$. По лінії рівня (23) відкидаються зайві області, а за умов $\delta_s = 1$, $\eta^0(s) = F_x^0(x^{s+1})$ метод перетворюється в метод (12), (13).

Замість (22) розглянемо співвідношення

$$z^{s+1} = \pi_z(z^s + \delta_s (\eta^0(s) - z^s)), \quad s = 0, 1, \dots, \quad (24)$$

де $\pi_z(\bullet)$ – оператор, ортогональний до лінеаризації (11)–(13) точок на X ; z належить опуклій множині $Z: Z \supseteq \{F_x^0(x); x \in \text{Arg min}_{x \in X} F^0(x)\}$;

$$\|\eta^0(s)\| + \|F_x^0(x^s)\| \leq C.$$

Процедури (11)–(13), (24) і (23) збігаються з ймовірністю 1 за такою теоремою.

Теорема. Нехай для деякого числа $0 < L < \infty$ знайдеться таке число $0 < C_L < \infty$, що $M[\|\eta^i(s)\|^2 | x^0, \dots, x^s] \leq h_s^2$, $(x^0, x^1, \dots, x^s) \leq C_L$, $i = 0, 1, 2, \dots, m$, при $\|x^k\| \leq L$, $k = 0, 1, \dots, s$, та існують числа $\gamma_s > 0$, $\gamma_s (h_s + \tau_s \|x^s\|) \leq \text{const}$, де $\tau_s = 1$, коли $\|b^i(s)\| \neq 0$, і $\tau_s = 0$, коли $\|b^i(s)\| = 0$, а $\rho_s \geq 0$, $\delta_s \geq 0$, $\rho_s / \delta_s \rightarrow 0$ майже ймовірно (м.й.), $\sum_{s=0}^{\infty} \alpha_s \rho_s = \infty$, $\sum_{s=0}^{\infty} M[\rho_s^2 + \delta_s^2] < \infty$, $\sum_{s=0}^{\infty} M[\rho_s \|b^i(s)\|] < \infty$.

Тоді знайдеться [11] підпослідовність x^{sk} , для якої $\lim_{k \rightarrow \infty} F(x^{sk}) = F(x^*)$ м.й., $\lim_{s \rightarrow \infty} \min_{k \leq s} F(x^{sk}) = F(x^*)$ м.й., а $\inf_{x^*} M[\|x^* - x^s\|^2] \rightarrow 0$, де x^* – розв'язок задачі, що задовольняє початкові умови, тобто кожна гранична точка $\{x^{sk}\}$ належить множині $X^* = \{x^* : \min_{x \in X} (F_x^0(x^*), x - x^*) = 0\}$. А ортогональне доповнення до знайденої множини відкидається як таке, що не містить розв'язку.

Метод стохастичних еліпсоїдів в умовах шуму. Метод еліпсоїдів у стохастичному випадку задається формулою (21) і його можна розглядати, з одного боку, як окремий випадок методу узагальненого градієнтного спуску з розтягом простору в напрямку субградієнта із сталим коефіцієнтом розтягу простору і кроковим множником, який зменшується за геометричною прогресією, а з іншого боку, як метод послідовних відсікань, в якому домен локалізації розв'язку апроксимується на кожному кроці еліпсоїдом з об'ємом, що зменшується в геометричній прогресії. Це справедливо для усередненого випадку, коли шум відфільтровано. У загальному стохастичному випадку з шумом процес локалізації мінімуму відбувається за та-

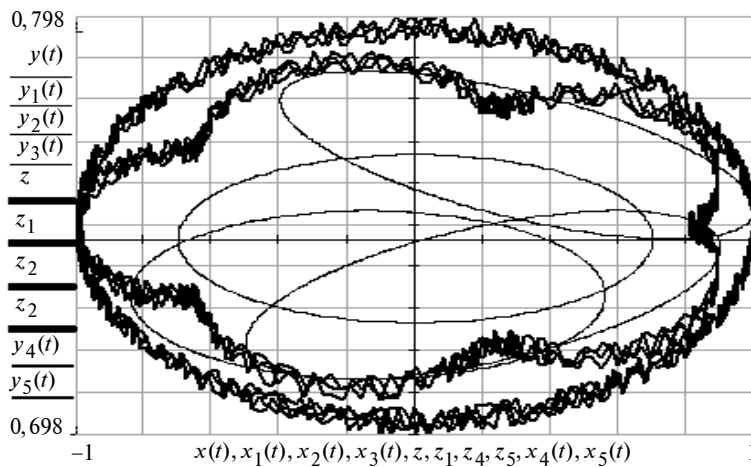


Рис. 5. Локалізація мінімуму за методом еліпсоїдів в умовах шуму

ким же алгоритмом багаторазово, що показано деформованим еліпсоїдом на рис. 5.

Деформований еліпсоїд (коли шум відфільтровано) розглядається як стохастична адитивна сукупність деякої кількості недеформованих еліпсоїдів із різною дислокацією центрів, які невідомі, і знаходяться з розв'язання відповідної задачі інтерполяції без шуму.

Висновки

Локальний аналіз поведінки резонансної “ярової” цільової функції та прогнозування

початкових значень її в околі “яру” дають змогу розв'язувати клас негладких і неопуклих задач оптимізації та керування, які не розв'язуються звичайними методами. Умови, які знаходяться за допомогою вилучення додаткової інформації про “яр” неопуклої цільової функції, доведені в теоремах. Вони забезпечують перетворення неопуклої задачі в локально опуклу в околі “яру”, що узагальнює відомі методи – проектувань, лінеаризації, еліпсоїдів і відсікань – на вказаний клас негладких неопуклих задач із резонансними “яровими” функціями.

Квазидиференціальні процедури і усереднення для утримання в “яру” цільової функції в умовах чистого прогнозу значень (без шуму) та в умовах прогнозу з фільтрацією наближень (з шумом) є альтернативою узагальнень відомих методів проектування та відсікань.

У подальшому доцільно дослідити вказані процедури і для стохастичних методів проектування та відсікань.

Ю.П. Матусов

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ПРОИЗВОДНОЙ Ф. КЛАРКА В КВАЗИДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ МЕТОДАХ СТОХАСТИЧЕСКОЙ ОПТИМИЗАЦИИ

Исследуются некоторые стохастические методы оптимизации, построенные на основе квазидифференциального исчисления с элементами оценочного прогнозирования. Сходимость методов рассматривается на основе сходимости случайной квазифейеровской последовательности значений целевой функции.

Yu.P. Matusov

APPLICATION OF F. CLARKE'S DERIVATION IN QUASI-DIFFERENTIAL METHODS OF STOCHASTIC OPTIMIZATION

The paper describes stochastic optimization methods, based on the quasi-differential calculations with some estimated prediction elements. Specifically, the convergence of these methods is discussed in light of the convergence of a random quasi-Feyer row of the target function values.

1. Михалевич В.С., Гунал А.М., Норкин В.И. Методы невыпуклой оптимизации. – М.: Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит.-ры, 1987. – 280 с.
2. Мордухович Б.Ш. Методы аппроксимаций в задачах оптимизации и управления. – М.: Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит.-ры, 1988. – 360 с.
3. Немировский А.С., Юдин Д.Б. Сложность задач и эффективность методов оптимизации. – М.: Наука, 1979. – 384 с.
4. Пономаренко А.И. Лекции по теории и методам оптимизации. – К.: Вища шк., 1979. – 48 с.
5. Пономаренко А.И. Стохастические задачи оптимизации: Текст лекций. – К.: КГУ, 1980. – 50 с.

6. *Ермольев Ю.М.* Методы стохастического программирования. – М.: Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит.-ры, 1976. – 240 с.
7. *Матусов Ю.П.* Про стохастичну квазіградієнтну оптимізацію і екстраполяцію кроків деяких випадкових функцій в інституціональних задачах // Наукові праці ДонНТУ. Сер. Економіка. – 2003. – Вип. 56. – С. 211–217.
8. *Матусов Ю.П.* Стохастична градієнтна оптимізація на деяких випадкових функціях з обмеженнями // Вісник Київ. ун-ту. Сер. Математика і механіка. – 2002. – Вип. 7-8. – С. 89–94.
9. *Демьянов В.Ф., Васильев Л.В.* Недифференцируемая оптимизация. – М.: Наука, 1981. – 384 с.
10. *Матусов Ю.П.* Застосування квазідиференціального аналізу до детермінованих та стохастичних задач оптимізації // Зб. праць Ін-ту математики НАН України. – 2006. – 3, № 1. – С. 139–152.
11. *Матусов Ю.П.* До питання збіжності квазіградієнтних стохастичних методів оптимізації // Там же. – 2007. – 5, № 1. – С. 109–122.

Рекомендована Радою
факультету менеджменту і маркетингу
НТУУ "КПІ"

Надійшла до редакції
11 лютого 2008 року

УДК 303.732.4:681.518.5

Н.Д. Панкратова, А.М. Радюк

РОЗПІЗНАВАННЯ ПОЗАШТАТНОЇ СИТУАЦІЇ В ДИНАМІЦІ ФУНКЦІОНУВАННЯ ТЕХНОГЕННО НЕБЕЗПЕЧНОГО ОБ'ЄКТА

Вступ

Запропонований підхід базується на загальних принципах і основних прийомах стратегії системного забезпечення гарантованої безпеки складних технічних систем, багатокритеріального оцінювання і прогнозування ситуацій ризику та математичній постановці загальної задачі системного аналізу ризиків у динаміці керування безпекою складних систем [1–3]. На підставі принципу декомпозиції загальна задача аналізу багатofакторних ризиків реалізується у вигляді послідовності таких системно узгоджених, інформаційно взаємопов'язаних задач: системної багатofакторної класифікації виявлених і прогнозованих ситуацій ризиків; системного багатofакторного розпізнавання виявлених і прогнозованих ситуацій ризиків; системного багатокритеріального ранжування ситуацій; багатocільової мінімізації ризиків прогнозованої множини позаштатних ситуацій; раціональної багатocільової оптимізації рівня інформованості під час розпізнавання позаштатних ситуацій у процесі функціонування складної системи; раціонального узгодження ресурсів допустимого ризику прогнозованої множини позаштатних ситуацій; визначення раціонального рівня інформованості для порогового обмеження часу в процесі функціонування складної системи; системного оцінювання ресурсів допустимого ризику в динаміці позаштатного режиму. Такий прийом зумовлений складністю загальної задачі системного аналізу і орієнтацією на комп'ютерну реалізацію основних процедур системного аналізу ризиків, що, у свою чергу, визначає потребу, можливість і доцільність використання модульного принципу організації процесу паралельного розв'язання задачі.

Практичну реалізацію стратегії системного забезпечення гарантованої безпеки складних систем зорієнтовано на своєчасне виявлення і ліквідацію причин можливих несправностей і відмов [4]. Головною метою запропонованої стратегії є гарантування раціонально обгрунто-

ваного ресурсу живучості складної системи в реальних умовах принципово неусунених інформаційних і часових обмежень. У даному випадку живучість розуміємо як властивість складної системи в її спроможності зберегти штатний режим функціонування і усунути можливість аварії або катастрофи в прогнозованих і непрогнозованих умовах впливу дестабілізуючих, неруйнівних факторів ризику.

Конкретизація кожної процедури стратегії і її взаємозв'язків має здійснюватися для кожної предметної області у формі відповідного інформаційного, математичного і програмного забезпечення. Необхідність такого підходу до реалізації стратегії визначається принциповими відмінностями динаміки ситуацій ризику в різних сферах практичної діяльності. Наприклад, критична ситуація на промисловому підприємстві при недостатній кількості палива і її наслідки відрізняються від критичної ситуації і викликаних нею наслідків при виявленій недостатці палива в динаміці польоту літака. Звідси впливає істотна різниця пріоритетів в оцінюванні причин і умов дії ситуацій ризику і, як наслідок, відмінність формалізації і алгоритмізації однотипних процедур для різних практичних додатків.

Постановка задачі

Мета даної статті – постановка і реалізація задачі розпізнавання позаштатної ситуації в динаміці функціонування техногенно небезпечних складних технічних систем (СТС).

Розглянемо особливості основних властивостей ситуацій ризиків. Серед ситуацій ризику, які виникають у процесі функціонування техногенно небезпечного об'єкта, будемо розрізняти позаштатні, критичні, надзвичайні, аварійні та катастрофічні ситуації [5, 6], які виникають у результаті переходу із штатного до позаштатного режиму функціонування складного технічного об'єкта, коли деякі його параметри знаходяться поза апріорно заданими інтервалами. Позаштатна ситуація – це такий позаштатний режим функціонування, в якому окремі показники якості системи чи зовнішнього середовища знаходяться поза інтервалами штатного режиму в таких межах, коли не існує загрози аварії чи катастрофи. Критична ситуація – це такий позаштатний режим функціонування, в якому показники якості системи чи зовнішнього середовища знаходяться поза інтервалами штатного режиму в таких межах,

коли з'являється реальна погроза аварії чи катастрофи. Надзвичайна ситуація – це такий позаштатний режим функціонування, в якому показники якості системи чи зовнішнього середовища знаходяться поза інтервалами штатного режиму в межах, коли майже неминуче відбувається аварія чи катастрофа. Аварійна ситуація – це такий позаштатний режим функціонування, в якому технічна система переходить із працездатного стану в непрацездатний, наприклад аварійний, коли для переходу до працездатного стану необхідно здійснити ремонт. Катастрофічна ситуація – це такий позаштатний режим функціонування, впродовж якого технічна система переходить із працездатного стану в катастрофічний непрацездатний стан, коли перехід до працездатного принципово неможливий.

Наведені різноманітні ситуації позаштатного режиму свідчать про практичну необхідність раціональних дій в умовах невизначеностей різної природи і багатофакторних ризиків. Основна ідея стратегії дії полягає в забезпеченні в реальних умовах функціонування складної системи своєчасного та вірогідного виявлення і розпізнавання, оцінювання факторів ризиків, прогнозування їх розвитку впродовж визначеного режиму експлуатації і на цій основі забезпечення своєчасного усунення причин ризиків до появи відмов та інших небажаних наслідків.

Наведемо *математичну постановку* задачі розпізнавання позаштатної ситуації в динаміці функціонування техногенно небезпечного об'єкта [3].

Задано: для кожної ситуації $S_k^\tau \in S_\tau$ формується множина $M_k^\tau \in M_\tau$ факторів ризику у вигляді $M_k^\tau = \{\rho_{q_k}^\tau \mid q_k = \overline{1, n_k}^\tau\}$. Для кожного фактора ризиків множини M_k^τ відомий нечіткий інформаційний вектор $I_q^\tau = \{I_{q_k}^\tau \mid q_k = \overline{1, n_k}^\tau; k = \overline{1, K_\tau}\}$ та його компоненти у вигляді

$$I_{q_k}^\tau = \{\tilde{x}_{q_k j_k p_k}^\tau \mid q_k = \overline{1, n_k}^\tau; j_k = \overline{1, n_{q_k}^\tau}; p_k = \overline{1, n_{q_k j_k}^\tau}\},$$

$$\tilde{x}_{q_k j_k p_k}^\tau = \langle x_{q_k j_k p_k}^\tau, \mu_{H_{q_k j_k p_k}}(x_{q_k j_k p_k}^\tau) \rangle;$$

$$x_{q_k j_k p_k}^\tau \in H_{q_k j_k p_k}^\tau; \mu_{H_{q_k j_k p_k}} \in [0, 1],$$

$$H_{q_k j_k p_k}^\tau = \langle x_{q_k j_k p_k}^\tau \mid x_{q_k j_k p_k}^- \leq x_{q_k j_k p_k}^\tau \leq x_{q_k j_k p_k}^+ \rangle.$$

Потрібно: для кожної ситуації $S_k^\tau \in S_\tau$ і кожного фактора ризику $M_k^\tau \in M_\tau$ забезпечити розпізнавання позаштатної ситуації в динаміці функціонування техногенно небезпечного об'єкта та живучість складної технічної системи під час її експлуатації.

Підхід до розв'язання задачі

Для більшої наглядності і практичної направленості роботи доцільно штатний і позаштатний режими описувати таким чином, щоб це відповідало фізичній сутності реальних процесів визначеного класу складних технічних систем. Найбільш наглядно динаміка реального процесу буде описуватися в тому випадку, коли ці процеси мають змінюватися під дією системи керування в досить широких межах за досить короткий режим часу. Такі умови задовольняє функціонування СТС, таких, як авіаційні двигуни, режими яких у стадіях зльоту, крейсерського польоту, посадки суттєво відрізняються між собою, а також реактори атомних електростанцій, хімічні виробництва тощо. При цьому ряд параметрів функціональних залежностей y_i , $i = \overline{1, n}$, в послідовності різних етапів $p = 1, 2, \dots, P$ функціонування СТС змінюються синхронно в динаміці переходу від одного режиму до другого і в динаміці відповідних режимів.

При побудові підходу до розв'язання задачі всі вхідні та вихідні дані нормуються до інтервалу $[0; 1]$. Тому при побудові моделей тривалість кожного етапу $p = 1, 2, \dots, P$ функціонування СТС нормується до загальної тривалості роботи досліджуваного об'єкта. Можливі два варіанти нормування. У першому з них (позначимо його A_1) виконується загальне нормування для всіх етапів функціонування на основі співвідношення

$$\tau = 1 - \frac{t_0^+ - t}{t_0^+ - t_0^-}, \quad t \in [t_0^-, t_0^+]. \quad (1)$$

Для залежностей, що мають місце для різних етапів функціонування, отримати єдину модель, яка б забезпечила прийнятну точність апроксимації для всіх режимів, досить складно. У цьому випадку доцільно будувати систему

погоджених моделей. Погодження відбувається на межах етапів функціонування і полягає в тому, що початкове значення наступного етапу повинно дорівнювати кінцевому значенню попереднього етапу, яке визначається наближеною функцією. Тоді, відповідно до цього для етапу 1 маємо такі значення на межі:

$$\begin{aligned}\tau_1 &= 1 - \frac{t_0^+ - t}{t_0^+ - t_0^-}, \quad t \in [t_0^-, t_1], \quad \tau_1^- = 0, \\ \tau_1^+ &= 1 - \frac{t_0^+ - t_1}{t_0^+ - t_0^-},\end{aligned}\quad (2)$$

а для етапу 2 маємо

$$\begin{aligned}\tau_2 &= 1 - \frac{t_0^+ - t}{t_0^+ - t_0^-}, \quad t \in [t_1, t_2], \\ \tau_2^- &= 1 - \frac{t_0^+ - t_1}{t_0^+ - t_0^-}, \quad \tau_2^+ = 1 - \frac{t_0^+ - t_2}{t_0^+ - t_0^-}.\end{aligned}\quad (3)$$

Це означає, що якщо в точці t_1 побудована модель дає значення, яке не збігається із заданим дискретним значенням, що визначається вибірками (2) або (3), то для етапу 2 за вихідне значення береться така величина, яка визначена кінцевим значенням моделі для етапу 1. Аналогічно знаходимо значення на межах для всіх інших етапів функціонування СТС. У цьому випадку формула (1) є загальною, а формули (2), (3) і подібні співвідношення для інших етапів необхідні для перевірки збігу умов на межах зміни режимів у випадку, коли дані дискретних значень y_i задаються для кожного етапу окремо. Необхідно в такому випадку обов'язково мати дані для всіх y_i на межах всіх етапів функціонування СТС.

Для залежностей, що мають місце для різних етапів $p = 1, 2, \dots, P$ функціонування, доцільно виконувати нормування окремо до тривалості кожного етапу на основі таких співвідношень (варіант нормування позначимо A_2):

$$\tau_1 = \frac{t - t_0^-}{t_1 - t_0^-}, \dots, \tau_p = \frac{t - t_{p-1}}{t_p - t_{p-1}}, \dots, \tau_P = \frac{t - t_{P-1}}{t_P - t_{P-1}}.$$

Аналогічно нормування виконується для всіх інших етапів функціонування СТС. Для кожного етапу τ змінюється в інтервалі $[0, 1]$.

Такий підхід дає змогу підвищити точність за рахунок збільшення кількості точок для кожного інтервалу при складанні відповідної системи рівнянь.

У випадку варіанта нормування A_1 при тій же кількості рівнянь для кожного етапу загальна кількість рівнянь збільшується у вісім разів, оскільки у варіанті A_1 складається єдина система рівнянь для всіх етапів функціонування СТС, а у варіанті A_2 – система складається для кожного етапу окремо і знаходиться своя наближена функція вигляду (4).

Нормування змінних y_i для кожного показника p етапів функціонування СТС необхідно виконувати для варіантів A_1 і A_2 на основі співвідношень

$$Z_i = Z_i(\tau_k) = \frac{y_i(t_k^p) - y_i(t_k^{p-1})}{y_i^+ - y_i^-},$$

$$y_i^+ = \max_{t_k \in [t_0^-, t_0^+]} y_i(t_k), \quad y_i^- = \min_{t_k \in [t_0^-, t_0^+]} y_i(t_k), \quad i = \overline{1, n}.$$

Нормування керованих дій U_j виконується на основі співвідношень

$$U_j = U_j(t_k) = \frac{U_j(t_k^p) - U_j(t_k^{p-1})}{U_j^+ - U_j^-},$$

$$U_j^+ = \max_{t_k \in [t_0^-, t_0^+]} U_j(t_k), \quad U_j^- = \min_{t_k \in [t_0^-, t_0^+]} U_j(t_k), \quad j = \overline{1, m}.$$

Штатний режим функціонування для досліджуваного об'єкта будемо описувати системою моделей функціонування СТС при таких припущеннях і твердженнях.

1. Кожний етап функціонування СТС характеризується тривалістю, початковим та кінцевим значеннями кожного показника y_i , який визначається за моментами початку і закінчення етапу. Зміни y_i в межах етапу визначаються відповідною функціональною моделлю.

2. Всі показники y_i є динамічно синхронними і синфазними в тому розумінні, що під дією керування вони одночасно, без часу затримки, збільшуються або зменшуються.

3. Керована дія $U = (U_j, j = \overline{1, m})$ є безінерційною, тобто відсутня тимчасова затримка між дією керування та реакцією об'єкта на керування.

4. Фактори ризику $\rho_{q_k}^\tau | q_k = \overline{1, n_k}^\tau$ змінюють величину дії на об'єкт в часі, і із зростанням тривалості дії ризик збільшується або зменшується.

5. Керована дія може сповільнювати вплив факторів ризику або припинити їх негативний вплив на керований об'єкт при умові, що темпи керованого впливу перевищують зростання впливу факторів ризику. Припинення негативного впливу факторів ризику забезпечується при умові, що рішення прийнято і реалізовано до початку T_{cr} , де T_{cr} – критичний момент часу, при настанні якого вплив факторів ризику веде до негативних наслідків у вигляді аварії або катастрофи.

На основі прийнятних припущень будемо будувати систему моделей, кожна з яких описує визначений режим функціонування СТС. Моделі для етапів $p = 1, 2, \dots, P$ знаходитимемо в штатному режимі на основі співвідношення

$$y_i = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m b_{ij} \sum_{r=0}^{R_j} a_{jr} T_r^*(U_j). \quad (4)$$

Зокрема, для етапу 1 модель визначається співвідношенням

$$y_{i_1} = \frac{1}{m} \sum_{j_1=1}^m b_{i_1 j_1} \sum_{r_1=0}^{R_{j_1}} a_{j_1 r_1} T_{r_1}^*(U_{j_1}). \quad (5)$$

Тут коефіцієнти $b_{i_1 j_1}$ визначають ступінь впливу керування U_{j_1} на y_{i_1} відповідно для $j_1 = \overline{1, m}$ на основі виборки B_0 при $t_k \in [t_0, t_1]$, $k = \overline{0, k_0}$.

Якщо U_{j_1} для всіх $j_1 = \overline{1, m}$ є лінійними функціями t (згідно з припущенням 1), то вираз (5) можна спростити і записати у вигляді

$$y_{i_1} = \frac{1}{m} \sum_{j_1=1}^m [a_{i_1 j_0} T_0^* + a_{i_1 j_1} T_1^*(U_{j_1})]. \quad (6)$$

У співвідношенні (4) у загальному випадку залежність керованого впливу U_j є нелінійною функцією часу

$$U_j(t) = d_{j_0} + d_{j_1} t + d_{j_2} t^2 + \dots + d_{j_l} t^l + \dots + d_{j_{l_0}} t^{l_0},$$

або

$$U_j(t) = \sum_{l=0}^{l_0} d_{j_l} t^l. \quad (7)$$

Враховуючи, що початковий момент t^0 відповідає непрацюючому стану об'єкта, то d_{j_0} слід розглядати як величину керованого впливу в усталеному режимі, d_{j_1} – як швидкість зміни керування, а d_{j_2} – як прискорення зміни керування і т.д.

Із врахуванням формули (7) загальну залежність показників y_i від часу можна отримати, підставивши (7) у вираз (4). Але в цьому випадку ускладнюється задача визначення шуканих коефіцієнтів a_{ir}, b_{ij}, d_{jl} . Для усунення цих труднощів доцільно побудувати ієрархічну систему моделей [7].

Для штатного режиму (без врахування дії зовнішніх факторів ризику) масив дискретних значень вибірок результатів випробувань надається у вигляді таблиці.

На основі даних таблиці визначення пошукових коефіцієнтів доцільно виконувати в такій послідовності:

- знайти коефіцієнти d_{j_l} для кожного керованого U_j на основі системи рівнянь

$$U_j[t_0] = d_{j_0} + d_{j_1} t_0 + \dots + d_{j_l} t_0^l + \dots + d_{j_{l_0}} t_0^{l_0}, \quad (8)$$

$$U_j[t_{k_0}] = d_{j_0} + d_{j_1} t_{k_0} + \dots + d_{j_l} t_{k_0}^l + \dots + d_{j_{l_0}} t_{k_0}^{l_0},$$

де невідомими є коефіцієнти d_{j_l} , $l = \overline{0, l_0}$;

Таблиця. Масив дискретних значень вибірок результатів випробувань

| | | | | | | | | | | | |
|-------|-----------|----------------|-----|----------------|-----|----------------|----------------|-----|----------------|-----|----------------|
| № п/п | t_k | $y_1[t_k]$ | ... | $y_i[t_k]$ | ... | $y_n[t_k]$ | $U_1[t_k]$ | ... | $U_j[t_k]$ | ... | $U_m[t_k]$ |
| 1 | t_0 | $y_1[t_0]$ | ... | $y_i[t_0]$ | ... | $y_n[t_0]$ | $U_1[t_0]$ | ... | $U_j[t_0]$ | ... | $U_m[t_0]$ |
| ⋮ | ⋮ | ⋮ | | ⋮ | | ⋮ | ⋮ | | ⋮ | | ⋮ |
| k_0 | t_{k_0} | $y_1[t_{k_0}]$ | | $y_i[t_{k_0}]$ | | $y_n[t_{k_0}]$ | $U_1[t_{k_0}]$ | | $U_j[t_{k_0}]$ | | $U_m[t_{k_0}]$ |

• знайти коефіцієнти a_{ir} для кожного показника y_i . Покладаємо, для прикладу, що значення $y_i[t_k]$ визначається тільки одним керованим впливом $U_1[t_k]$. Тоді маємо систему рівнянь

$$\begin{aligned} y_i[t_0] &= \sum_{r_1=0}^{R_1} a_{ir_1} T_{r_1}^*(U_1[t_0]); \\ &\vdots \\ y_i[t_{k_0}] &= \sum_{r_1=0}^{R_1} a_{ir_1} T_{r_1}^*(U_1[t_{k_0}]). \end{aligned} \quad (9)$$

Тут невідомими є коефіцієнти $a_{ir_1}, r_1 = \overline{1, R_1}$. Системи типу (9) складаються для всіх $i = \overline{1, n}$, $j = \overline{1, m}$; загальна кількість систем дорівнює $n \times m$;

• знайти коефіцієнти b_{ij} для кожного показника y_i . Покладаємо, що значення $y_i[t_k]$, $i = \overline{1, n}$, визначаються всіма керованими впливами $U_j, j = \overline{1, m}$. Для розв'язання цієї задачі складемо систему рівнянь

$$\begin{aligned} y_i[t_0] &= \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m b_{ij} \psi_j(U_j[t_0]), \\ &\vdots \\ y_i[t_{k_0}] &= \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m b_{ij} \psi_j(U_j[t_{k_0}]), \end{aligned} \quad (10)$$

де $\psi_j(U_1[t_{k_0}]) = \sum_{r=0}^{R_1} a_{jr} T_r^*(U_j[t_{k_0}])$. Тут невідомими є коефіцієнти b_{ij} для $i = \overline{1, n}$, $j = \overline{1, m}$; $T_r^*(\cdot)$ – зміщений поліном Чебишева.

Системи (8), (9), (10) визначають моделі для випадку, коли моделі для всіх y_i будуються для всього інтервалу $t \in [t_0^-, t_0^+]$. Коли ж моделі будуються окремо для кожного етапу $p = 1, 2, \dots, P$ функціонування, то в цих системах з'являється допоміжний індекс, яким позначається номер етапу, для якого будується система моделей. Наприклад, для етапу 2 система (9) матиме вигляд

$$\begin{aligned} y_{i_2}[t_2^-] &= \sum_{r_2=0}^{R_{i_2}} a_{1r_2} T_{r_2}^*(U_{12}[t_2^-]), \\ &\vdots \\ y_{i_2}[t_2^+] &= \sum_{r_2=0}^{R_{i_2}} a_{1r_2} T_{r_2}^*(U_{12}[t_2^+]), \end{aligned}$$

де t_2^- і t_2^+ – значення на межі етапу 2. Аналогічно змінюються інші системи рівнянь для других етапів.

При дослідженні позаштатного режиму введемо додаткові (до раніше введених припущень 1–5 для штатного режиму) припущення щодо формування додаткової моделі та умови розпізнавання позаштатної ситуації.

6. Фактори ризику $\rho_{q_k}^{\tau} | q_k = \overline{1, n_k}^{\tau}$ є незалежними і змінюються в часі за законом випадкових чисел, розподіл якого априорно невідомий.

7. Фактори ризику можуть впливати одночасно на кілька або на всі показники y_i . Ситуація впливу факторів ризику буде позаштатною, якщо хоча б два показники y_i одночасно без керованого впливу змінюють у часі несинхронно або несинфазно свої значення протягом кількох замірювань.

Дані припущення є практично важливими в тому розумінні, що дозволяють відрізнити на кожному етапі функціонування випадкові помилки вимірювань від впливу факторів ризику. Дійсно, через незалежність вимірювань значень y_i для різних i може виявитися, що для двох або більше показників y_i в якийсь момент часу одночасно значення показників несинхронно або несинфазно змінюються. Зразу ж треба дати відповідь – це випадковий збіг помилок вимірювань чи початок дії факторів ризику. Звідси випливає практична необхідність визначити синхронність та синфазність змін абсолютних значень y_i протягом кількох вимірювань (в межах припущень 3–7), тобто визначити $\Delta y_i = y_i(t_k) - y_i(t_{k-1})$. Якщо згідно з припущенням 2 виявиться, що хоча б для двох y_i для кількох значень t_k, t_{k-1}, \dots $\Delta y_i > 0$, то це слід розглядати як появу ознак позаштатної ситуації. У таких випадках особа, що приймає рішення, має отримати необхідну інформацію про ситуацію.

8. Вплив факторів ризику будемо враховувати як відносну зміну рівня керування під впливом факторів ризику. Зміна значень кожного фактора ризику проходить дискретно за законом випадкових чисел.

На основі прийнятих припущень наведемо додатково моделі та умови розпізнавання позаштатної ситуації. Позначимо: \tilde{y}_i – значення показника y_i при впливі факторів ризику; $F_i(\rho_{q_k})$ – функція, що враховує рівень впливу факторів ризику на i -й показник y_i ; ρ_{q_k} – значення q -го фактора ризику в момент t_k .

Вважаємо відповідно до припущення 8, що в момент t_k величина $\tilde{y}_i[t_k]$ визначається співвідношенням, яке впливає з (4):

$$\tilde{y}_i[t_k] = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m \tilde{b}_{ij} \sum_{r=0}^{R_j} a_{jr} T_r^*(U_j), \quad \tilde{b}_{ij} = b_{ij} F_i(\rho_{q_k}). \quad (11)$$

Тут функція $F_i(\rho_{q_k})$ повинна відповідати умові, що при відсутності впливу факторів ризику (тобто при $\rho_{q_k} = 0$) має виконуватися нерівність $\tilde{y}_i \neq y_i$. Тому одне з найпростіших видів $F_i(\rho_{q_k})$ має вигляд

$$F_i(\rho_{q_k}) = 1 - \prod_{q_k=1}^{n_{q_k}} (1 - c_{iq_k} \rho_{q_k}). \quad (12)$$

Слід також враховувати, що фактори ризику можуть змінюватися в часі безперервно (наприклад, зі збільшенням висоти при зльоті літака безперервно змінюється тиск) і стрибкоподібно (наприклад, при польоті на визначеній висоті в крейсерському режимі тиск може змінюватися стрибком на межі розділу “циклон-антициклон”). Найбільш складним є варіант, коли одні фактори ризику змінюються безперервно, а інші – стрибкоподібно.

У співвідношенні (12) значення величин ρ_{q_k} можуть бути як додатними, так і від'ємними, а для всіх q_k та i маємо $c_{iq_k} > 0$ і виконується умова $0 \leq |c_{iq_k} \rho_{q_k}| \leq 1$. Остання умова не є обов'язковою щодо обмеження зверху і вводиться нормуванням для спрощення розв'язання задачі розпізнавання ситуації ризику та оцінки ступеня ризику.

Розпізнавання ситуації ризику виконуватимемо на основі послідовного порівняння значень величин $\tilde{y}_i[t_k]$ при $i = \overline{1, n}$ для кількох послідовних значень t_k , $k = \overline{1, k_0}$, де $k_0 = 3-7$. Умовою появи позаштатної ситуації, як впливає з припущення 2, є синхронна і синфазна зміна \tilde{y}_i для кількох, а в загальному випадку – для всіх показників. Звідси впливає співвідношення для різних моментів часу t_k для всіх значень i та для однакових моментів часу t_k для різних значень i (різних показників):

$$\begin{aligned} \text{sign } \Delta \tilde{y}_i[t_1, t_2] &= \dots = \text{sign } \Delta \tilde{y}_i[t_k, t_{k+1}] = \dots = \\ &= \text{sign } \Delta \tilde{y}_i[t_{k_0-1}, t_{k_0}], \end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} \text{sign } \Delta \tilde{y}_1[t_k, t_{k+1}] &= \dots = \text{sign } \Delta \tilde{y}_i[t_k, t_{k+1}] = \dots = \\ &= \text{sign } \Delta \tilde{y}_n[t_k, t_{k+1}], \quad i = \overline{1, n}. \end{aligned} \quad (14)$$

Із (13) і (14) впливає, що при наявності позаштатної ситуації в інтервалі $[t_1, t_{k_0}]$ одночасно має місце:

- рівність знаків приросту $\Delta \tilde{y}_i$ для всіх суміжних інтервалів $[t_k, t_{k+1}]$ при $k = \overline{1, k_0}$ кожного показника \tilde{y}_i , $i = \overline{1, n}$;
- рівність знаків приросту $\Delta \tilde{y}_i$, $i = \overline{1, n}$, всіх показників \tilde{y}_i для кожного інтервалу $[t_k, t_{k+1}]$, $k = \overline{1, k_0}$.

Умови (13), (14) є найбільш жорсткими, на практиці достатньо забезпечити виконання умов для представницького числа (3–5), що визначають показники \tilde{y}_i , але не для всіх показників \tilde{y}_i . В (13) і (14) відповідні величини записуємо у вигляді

$$\Delta \tilde{y}_i[t_k, t_{k+1}] = \tilde{y}_i[t_{k+1}] - \tilde{y}_i[t_k], \quad (15)$$

де $\tilde{y}_i[t_k]$ визначаються співвідношенням (11), і при цьому покладаємо, що $\rho_{q_k}[t_{k+1}] > \rho_{q_k}[t_k]$, тобто залежність кожного фактора ризику є функцією часу, що зростає, або $\rho_{q_k}[t_{k+1}] < \rho_{q_k}[t_k]$, тобто залежність є спадною функцією.

Практична значимість розпізнавання позаштатної ситуації на основі (13) і (14) полягає в тому, що при такому підході забезпечується

знаходження позаштатної ситуації при незначній зміні величин $\tilde{y}_i[t_k]$ під дією факторів ризику, тобто “індикатором” зміни є знак різниці (13) і (14), а не величина такої різниці, що визначається (15). Іншими словами, такий підхід суттєво чутливіший до змін різниці (15), ніж типові підходи, прийняті в діагностуванні. Більше того, підхід, що пропонується, дає змогу “відфільтрувати” випадкові зміни і випадкові помилки вимірювання \tilde{y}_i для окремих i або окремих $[t_k, t_{k+1}]$, оскільки в цьому випадку не будуть виконуватися умови (14) і (15) внаслідок незалежності випадкових помилок вимірювань різних показників y_i .

Із викладеного випливає, що для розпізнавання ситуації ризику або позаштатної ситуації необхідно доповнити запропонований алгоритм такими процедурами.

1. Обчислення функцій $F_i(\rho_{q_k})$ на основі (12) для всіх i із врахуванням послідовностей зростаючих випадкових чисел.

2. Обчислення функцій $\tilde{y}_i[t_k]$ на основі (11) для всіх i при відомих залежностях $y_i[t]$, що визначаються на основі даних таблиці.

3. Послідовна перевірка умов (13) для трьох періодів часу $[t_1, t_2]$, $[t_2, t_3]$, $[t_3, t_4]$ для двох функцій $y_1[t_k]$, $y_2[t_k]$, $t_k \in [t_1, t_2]$. Якщо одночасно виконується умова (13) для обох функцій для всіх трьох періодів, то кількість функцій y_i , що перевіряються, повинно збільшуватися і одночасно має перевірятися умова (14) для функцій, які перевіряються. Якщо для всіх функцій, що перевіряються, для всіх трьох періодів часу виконуються умови (13) і (14), то має бути поданий сигнал: “Увага! Позаштатна ситуація”.

Процедура 3 повинна дати сигнал після перегляду певного числа t_k , наприклад після 5–8-го моменту t_k в динаміці розрахунку \tilde{y}_i для контрольного прикладу. Така реалізація має допускати можливість зміни ρ_{q_k} таким чином, щоб при новому варіанті ρ_{q_k} позаштатна ситуація виявлялася раніше або пізніше.

4. Оцінка ступеня ризику позаштатної ситуації. Дана процедура є заключною в розпізнаванні ситуації ризику.

Оцінка ступеня ризику виконується на основі таких умов. Вважаємо, що ступінь ризику

як вірогідність появи небажаних наслідків позаштатної ситуації зростає в міру збільшення впливу факторів ризику. Збільшення впливу може відбуватися за двома показниками: збільшення кількості факторів, що впливають; збільшення чисельного значення впливу факторів ризику.

Як найпростішу модель оцінки ступеня ризику можна взяти співвідношення

$$\eta_{q_k} = 1 - \prod_{q_k=1}^{n_{q_k}^*} [1 - (c_{iq_k}^+ \rho_{q_k}^+)^2]. \quad (16)$$

Тут η_{q_k} – ступінь ризику на момент $t = t_k$;

$(c_{iq_k}^+ \rho_{q_k}^+) = \max_i (c_{iq_k} \rho_{q_k})$; $\rho_{q_k} = \rho_{q_k}[t_k]$; $n_{q_k}^*$ – кількість факторів ризику, для яких на момент $t = t_k$ виконуються умови (13) та (14).

5. Мінімізація ризику позаштатної ситуації. Мета даної процедури полягає у зменшенні ступеня ризику на основі зміни керування, тобто зміни U_j . Слід зазначити важливу особ-

ливість цієї процедури, яка відрізняє її від типової процедури мінімізації. На відміну від типової процедури, в якій, як правило, апіорі відомі обмеження та цільові функції, в даній процедурі, як видно з (16), умови суттєво складніші. По-перше, показник η_{q_k} не визначений

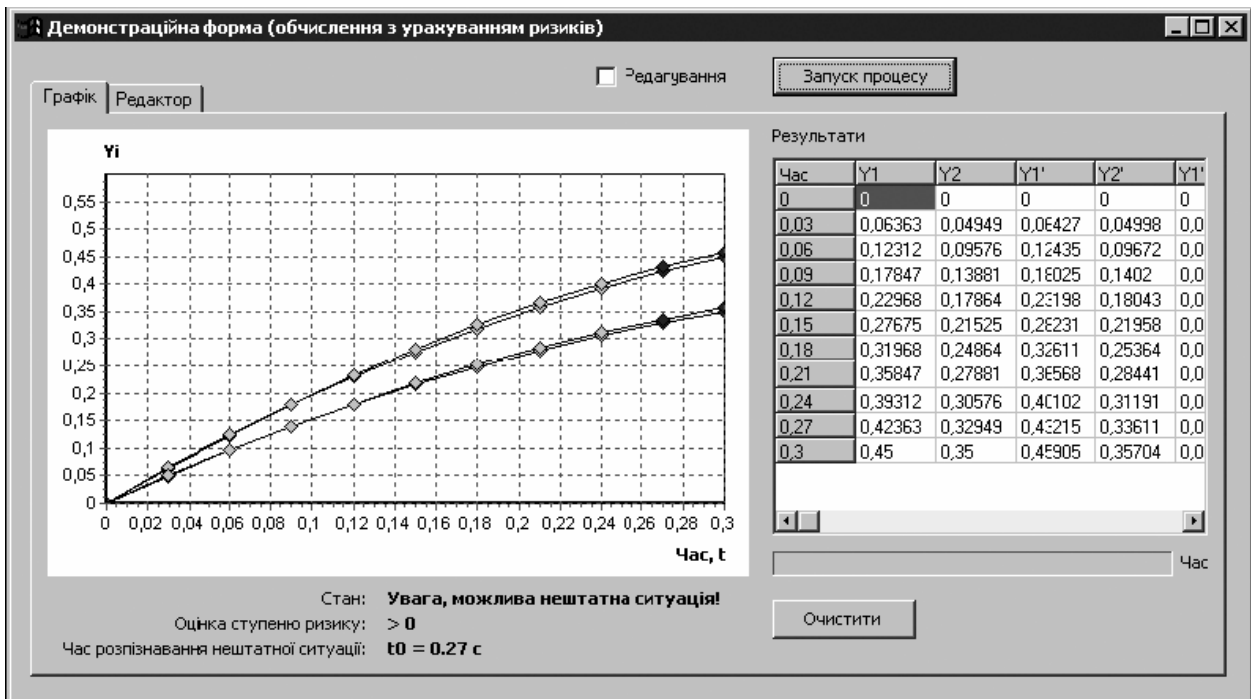
однозначно, ρ_{q_k} є функцією і тому в (16) вели-

чина $(c_{iq_k}^+ \rho_{q_k}^+) = \max_i (c_{iq_k} \rho_{q_k})$ може змінюватися

при переході від t_k до t_{k+1} , від t_{k+1} до t_{k+2} і т.д. не тільки кількісно, а й якісно. По-друге, процедура мінімізації ризику обмежена в часі в тому розумінні, що існує часовий поріг, який визначається моментом настання небажаних наслідків, у гіршому разі – у вигляді аварії чи катастрофи. Отже, рішення повинно бути ухвалене і реалізоване до настання небажаних наслідків. По-третє, на відміну від типової процедури в даній процедурі не визначені однозначні змінні, зміни яких приводять до бажаного результату.

Модельний приклад розпізнавання позаштатної ситуації

Для налашки програмного модуля, який забезпечує розв’язання систем (8), (9), (10), наведемо на основі (6) такий модельний приклад розпізнавання позаштатної ситуації.



Результати розпізнавання позаштатної ситуації

Покладаємо: $n = 2$, тобто маємо $y_1(t)$ і $y_2(t)$, $b_{11} = 0,2$, $b_{12} = 0,3$, $b_{13} = 0,5$, $m = 3$ і маємо $U_1(t)$, $U_2(t)$, $U_3(t)$; коефіцієнти d_{ji} визначаються на основі (8) з умов

$$U_1(t) = d_{10} + d_{11}t + d_{12}t^2, \quad 0 \leq U_1(t) \leq 1, \quad (17)$$

$$U_2(t) = d_{20} + d_{21}t, \quad 0 \leq U_2(t) \leq 0,7,$$

$$U_3(t) = d_{30} + d_{31}t + d_{32}t^2, \quad 0 \leq U_3(t) \leq 0,5. \quad (18)$$

Розглянемо інтервал зміни $t \in [0; 0,3]$. Дискретний аналог інтервалу $[0; 0,3]$ будується з умови: при $k = 0$ $t = t_0 = 0$; при $k = k_0 = 11$ $t = t_{k_0} = 0,3$. У формулах (17) і (18) коефіцієнти знаходяться з умов

$$U_1(t_0) = 0, U_1(0,3) = 1, U_1(0,15) = 0,7,$$

$$U_3(t_0) = 0, U_3(0,3) = 0,5, U_3(0,2) = 0,4.$$

Коефіцієнти для U_2 визначаються з умов

$$U_2(t_0) = d_{20} + d_{21}t_0, \quad 0 = d_{20} + d_{21}0,$$

.....

$$U_2(t_k) = d_{20} + d_{21}t_k, \quad 0,7 = d_{20} + d_{21}0,3.$$

Аналогічно визначаються коефіцієнти для U_1 і U_3 . Коефіцієнти в (6) знаходяться з умов:

$$y_1[t_0] = 0, y_1[t_k] = 0,45, y_2[t_0] = 0, y_2[t_k] = 0,35.$$

На основі введених і отриманих даних формуються вихідні дані для модельного прикладу у формі таблиці, із застосуванням яких розв'язуються відповідні системи рівнянь і визначаються коефіцієнти d_{ji}, b_{ij} та коефіцієнти

при поліномах T_0^* і T_1^* . Демонстраційна версія розпізнавання позаштатної ситуації наведена на рисунку.

Розглянуті багаточисельні приклади розв'язування задач свідчать, що є можливість із достатньою для практики достовірністю виявляти момент можливого переходу штатного режиму складної технічної системи в позаштатний і вчасно забезпечувати безпеку її функціонування.

Висновки

На основі запропонованого підходу забезпечується формування і реалізація раціонального компромісного рішення за наявності множини об'єктивних і суб'єктивних протиріч на основі раціонального використання існуючих ресурсів і можливостей в умовах апріорно

невідомого ліміту часу. Важливіша особливість даного підходу полягає у врахуванні якісно нових обмежень, а саме принципово неусунених інформаційних і часових обмежень. Особливо важливим є наявність неусуненого порогового обмеження часу при формуванні і реалізації рішення. При порушенні цього обмеження можуть настати незворотні, катастрофічні наслідки у вигляді вибуху, загибелі об'єкта або інших аналогічних лих. Необхідно відзначити і другу практично важливу відмінність – вибір принципу раціональності рішення замість типового принципу оптимальності. Такий вибір зумовлений як вказаними обмеженнями, так і наявністю ряду протиріч, зокрема протиріччя між вимогою вірогідності і обґрунтованості рішення і вимогою своєчасності формування і реалізації рішення. Тут раціональність розуміємо як визначений, обґрунтований компроміс у досягненні суперечливих цілей на множині суперечливих обмежень, де порогове обмеження часу є абсолютно пріоритетним.

Перевірка функціонування об'єкта в штатній ситуації здійснюється безпосередньо в робочому режимі з реальними вхідними впливами в реальному режимі часу. Запропонована модель забезпечує запобігання непрацездатності і небезпечності функціонування об'єкта.

Шляхом комплексної, системної і безперервної оцінки параметрів функціонування об'єкта в реальному режимі часу виявляються ситуації, які потенційно можуть привести до виходу об'єкта за межі функціонування в штатному режимі. Запропонований підхід враховує можливість одночасного відстеження і оцінки довірливої кількості функціонально-динамічних параметрів, тому можлива деталізація процесів функціонування об'єкта будь-якого порядку складності. Для тих ситуацій, розвиток яких приводить до можливих відхилень параметрів від штатного режиму функціонування об'єкта, можливе своєчасне прийняття рішення про зміну режиму функціонування об'єкта або штучного корегування ряду параметрів з метою впливу на змінений режим і повернення його значення в режим штатного функціонування. Принципи формування первинних даних, які пропонуються в даній статті, забезпечують гнучкий підхід до відбору параметрів і орієнтовані на широкий спектр проблем процесів експериментального відпрацювання, випробувань і технічної діагностики складних екологічно небезпечних об'єктів у реальних умовах неповноти, невизначеності і протиріччя первинної інформації про штатні і позаштатні режими їх функціонування і експлуатації.

Н.Д. Панкратова, А.М. Радюк

РАСПОЗНАВАНИЕ НЕШТАТНОЙ СИТУАЦИИ В ДИНАМИКЕ ФУНКЦИОНИРОВАНИЯ ТЕХНОГЕННО ОПАСНОГО ОБЪЕКТА

Предложен подход к распознаванию нештатной ситуации в динамике функционирования техногенно опасного объекта. Подход базируется на общих принципах и основных приемах стратегии системного обеспечения гарантированной безопасности сложных технических систем, многокритериального оценивания и прогнозирования ситуаций риска в реальных условиях неполноты, неопределенности, неточности и противоречивости исходной информации и при наличии порогового ограничения времени на цикл формирования и реализацию решений по предотвращению аварийных и катастрофических ситуаций.

N.D. Pankratova, A.M. Radjuk

THE APPROACH TO ABNORMAL SITUATION RECOGNITION IN DYNAMICS OF MAN-CAUSED DANGEROUS OBJECT FUNCTIONING

The research described in this paper addresses the approach to abnormal situation recognition in dynamics of man-caused dangerous object functioning. This approach is based on the general principles and basic techniques of system strategy of guaranteed safety for complex engineering systems, multicriterion estimation and situations of risk forecasting in the real conditions of incompleteness, uncertainty, inconsistency and fuzziness of the initial information. Moreover, we consider the proposed approach under the time threshold restrictions for a cycle of decision making process on prevention of emergency and catastrophic situations.

1. *Pankratova N.D.* A system analysis of multifactor risks in conditions of uncertainty // Proc. of the XV IFIP World Computer Congress. Vienna/Austria and Budapest/Hun-

gary, 31 August–4 September, 1998. CD-ROM, file: /doc/000/000/665.htm

2. *Pankratova N., Kurilin B.* Conceptual foundations of the system analysis of risks in dynamics of control of complex system safety. Part 1. Basic statements and substantiation of approach // J. of automation and information sciences. – 2001. – 33, N 2. – P. 15–31.
3. *Pankratova N., Kurilin B.* Conceptual foundations of the system analysis of risks in dynamics of control of complex system safety. Part 2. The general problem of the system analysis of risks and the strategy of its solving // Ibid. – N 4. – P. 1–14.
4. *Панкратова Н.Д.* Системный анализ в динамике диагностирования сложных технических систем // Системный анализ и информатика. – 2008. – № 1. – С. 33–49.
5. *Zgurovsky M.Z., Pankratova N.D.* System analysis: Theory and Applications. – Springer, 2007. – 475 p.
6. *Згуровський М.З., Панкратова Н.Д.* Основи системного аналізу. – Київ: BHV, 2007. – 543 с.
7. *Панкратова Н.Д.* Рациональный компромисс в системной задаче концептуальной неопределенности // Кибернетика и системный анализ. – 2002. – № 4. – С. 162–180.

Рекомендована Радою
Навчально-наукового комплексу
“Інститут прикладного системного
аналізу” НТУУ “КПІ”

Надійшла до редакції
5 травня 2008 року

УДК 581.52

Г.П. Повещенко

КОНКУРЕНЦІЯ ІДЕЙ ЗА УМОВИ ПАРИТЕТУ**Вступ**

Політична конкуренція в будь-якому суспільстві є збуренням для інших суспільних (теж конкурентних) процесів завдяки своїй надзвичайній динамічності.

Однією з форм конкуренції між X -, Y - і Z -ідеями є процеси спілкування між їх прихильниками. Ці процеси характеризуються наявністю різних контактів між носіями конкуруючих ідей, частота яких впливає на формування симпатій і антипатій. Будемо вважати, що характер спілкування цивілізований і всі учасники процесу спілкування зважають на відповідну змістовну аргументацію. Такі процеси є культурним надбанням суспільства – джерелом ідей, бо “в суперечках народжується істина”.

Зрозуміло, що поширенню ідей сприяє їх міграція, рушійною силою якої є різниця (або градієнт) інформації про ту чи іншу ідею в різних частинах суспільства. Механізми міграції (або конвекції) ідей різноманітні і загальновідомі. Наприклад, вплив на результати конкуренції ідей міграційних процесів внаслідок зміни умов життя, праці, клімату, якості ресурсів та інших факторів може бути досить істотним.

Процес поширення ідей має механізми регулювання. Одним із них є довільне поширення ідей (саморегуляція, дифузія), що потребує для його аналізу використання складного математичного апарату розподілених просторових змінних. Необхідно враховувати і цілеспрямований керований вплив на процес конкуренції ідей (агітацію, рекламу, цензуру, спеціальні технології впливу на свідомість людей, адміністративний вплив, репресії тощо). На результат конкурентної боротьби впливають і генетичні процеси в суспільстві, проте вони не враховуються з огляду на їх однаковий вплив на всіх учасників процесу. Ці процеси є внутрішніми процесами системи [1, 2]. Однак суспільство може бути не вільним від зовнішнього впливу (наприклад, впливу зовнішніх міграційних процесів).

Оскільки політична (економічна, соціальна, культурна) конкуренція в суспільстві має істотні наслідки для нього, то аналіз стосунків, відношень і зв'язків у суспільстві, які пород-

жуються різницею в суспільному становищі, вихованні, рівні життя, освіті, уподобаннях, світогляді тощо та витлумачення і узагальнення відповідної інформації, в тому чи й іншому вигляді, набувають значення першочергової суспільної задачі.

Постановка задачі

У статті робиться спроба математично сформалізувати процеси політичної конкуренції в умовах паритету на основі статистичної інформації про результати парламентських виборів в Україні 2006–2007 рр. Моделювання таких процесів потребує використання математичного апарату просторових змінних. Тому будемо розглядати одновимірний випадок, хоч всі висновки є справедливими і для двовимірного випадку.

Математична модель конкуренції ідей

Структуру математичної моделі конкуренції між X -, Y -, Z -ідеями та її суттєвий зміст можна показати на прикладі еволюції X -ідеї таким чином:

Локальна зміна кількості прихильників X -ідеї виражається таким рівнянням:

$$\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial t} = & \\ = \text{джерело ідеї} + & + \frac{1}{t_c} x(yz_* - y_*z) - \\ - \text{міграція ідеї} + & - \frac{1}{t_m} \frac{\partial x}{\partial s} + \\ + \text{довільне поширення ідеї} + & + \frac{1}{t_r} \frac{\partial^2 x}{\partial s^2} + \\ + \text{кероване поширення ідеї} + & + pxy(z_* - z). \end{aligned}$$

Прототипом цього рівняння є загальне рівняння для потоку узагальненого параметра [3]

$$\frac{\partial \Pi}{\partial t} = -\text{div}(\Pi w) + \text{div}(\delta \text{grad} \Pi) + J(\Pi) + \omega \epsilon \Delta \Pi, \quad (1)$$

де Π – узагальнений питомий параметр; w – вектор швидкості потоку; δ – провідність потоку; ω – компактність; ϵ – узагальнений коефіцієнт переносу; $\partial \Pi / \partial t$ – локальна зміна; $\text{div}(\Pi w)$ – конвективний член; $\text{div}(\delta \text{grad} \Pi)$ – дифузійний член; $J(\Pi)$ – джерело-виток; $\omega \epsilon \Delta \Pi$ – зовнішній вплив (міжфазова взаємодія).

Зауважимо, що для практичного використання наведеного рівняння немає необхідності брати всі його члени, оскільки деякі з них бувають нульовими або досить малими для того, щоб їх враховувати в математичній моделі. Один з аспектів аналізу процесів полягає саме в тому, щоб оцінити величини потоків і знехтувати досить малими (неістотними).

Відповідна система диференціальних рівнянь для сукупності X -, Y -, Z -ідей має такий вигляд [4–6]:

$$\frac{\partial x}{\partial t} = \frac{1}{t_r} \frac{\partial^2 x}{\partial s^2} - \frac{1}{t_m} \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{1}{t_c} x(yz_* - y_*z) + pxy(z_* - z), \quad (1)$$

$$\frac{\partial y}{\partial t} = \frac{1}{t_r} \frac{\partial^2 y}{\partial s^2} - \frac{1}{t_m} \frac{\partial y}{\partial s} + \frac{1}{t_c} y(x_*z - xz_*) + qxy(z_* - z), \quad (2)$$

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{1}{t_r} \frac{\partial^2 z}{\partial s^2} - \frac{1}{t_m} \frac{\partial z}{\partial s} + \frac{1}{t_c} z(xy_* - x_*y) + rxy(z_* - z), \quad (3)$$

$$p + q + r = 0. \quad (4)$$

Тут $x = Y/N$, $y = Z/N$, $z = X/N$ – поточні зведені величини (або відсотки) кількості прихильників X -, Y -, Z -ідей; N – загальна кількість прихильників всіх ідей (наприклад, загальна кількість виборців); $x_* = X_*/N$; $y_* = Y_*/N$; $z_* = Z_*/N$ – зведені величини координат стаціонарного стану системи; X_* , Y_* , Z_* – координати стаціонарного стану системи (1)–(3); $s = l/L$ – зведена поточна просторова координата; $0 < l < L$ – поточна просторова координата; $L \sim \sqrt{\text{площа системи}}$ – масштаб системи як сукупності ідей; t – поточний час; t_c – характерний час ефективного спілкування між прихильниками різних ідей або масштаб часу (наприклад, час агітації за ту чи іншу ідею або тривалість її реклами); $t_m = L/v_m$ – характерний час міграції ідей; v_m – швидкість міграції ідей; $t_r = L^2/R$ – характерний час довільного поширення ідей; R – коефіцієнт довільного поширення ідей, од. площі / час; p , q , r – параметри керування процесом конкуренції ідей – темпи керування, од./час.

Умовою конкуренції (константою загальної організації системи як сукупності ідей) є загальний інтеграл системи (1)–(3)

$$x + y + z = 1, \quad (5)$$

$$\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial t} = 0. \quad (6)$$

Умова (5) надає можливість користуватися системою двох диференціальних рівнянь замість трьох. Вона описує площину у відповідних координатах і, таким чином, формалізує область існування системи ідей. Таку структуру системи, як сукупності ідей можна вважати прийнятною, якщо в суспільстві панують дві провідні за кількістю прихильників ідей, а прихильників інших ідей вважати прихильниками Z -ідей ("третьої сили").

Рівність нулю сумарного зовнішнього впливу на процес конкуренції ідей (4) є формалізацією припущення, яке полягає в тому, що зовнішній вплив (позитивний або негативний) на будь-яку групу учасників процесу прямо чи опосередковано впливає і на всіх інших учасників.

Параметрам p і q можна надавати різну змістовну інтерпретацію як параметрам керування. Наприклад, якщо $n_x(t)$, $n_y(t)$ є кількістю актів спілкування, ініційованих X -, Y -прихильниками, то параметри

$$p = \frac{d}{dt} (\ln n_x), \quad (7)$$

$$q = \frac{d}{dt} (\ln n_y) \quad (8)$$

можна вважати усередненими темпами керування (усереднені темпи адміністрування, фінансування, інформаційного впливу, реклами, цензури, збурень різної природи, фізичного впливу, репресій тощо).

При безрозмірних позначеннях $\tau = t/t_c$ – зведений поточний час; $k_m = t_c/t_m$; $k_r = t_c/t_r$; $k_x = pt_c$; $k_y = qt_c$ і з врахуванням (4) система (1)–(3) набуває вигляду математичної моделі конкуренції ідей:

$$\frac{\partial x}{\partial \tau} = k_r \frac{\partial^2 x}{\partial s^2} - k_m \frac{\partial x}{\partial s} + x(yz_* - y_*z) + k_x xy(z_* - z), \quad (9)$$

$$\frac{\partial y}{\partial \tau} = k_r \frac{\partial^2 y}{\partial s^2} - k_m \frac{\partial y}{\partial s} + y(x_*z - xz_*) + k_y xy(z_* - z), \quad (10)$$

$$\frac{\partial z}{\partial \tau} = k_r \frac{\partial^2 z}{\partial s^2} -$$

$$-k_m \frac{\partial z}{\partial s} + z(xy_* - x_*y) - (k_x + k_y)xy(z_* - z). \quad (11)$$

Предмет моделювання

Розглянемо просторовий розподіл політичних симпатій за результатами парламентських виборів 2006–2007 рр. На рис. 1 наведено такий розподіл (за даними Центральної виборчої комісії) в напрямку Краснодар–Ужгород на відстані $0 < l < L = 1250$ км. Тут X – кількість прихильників БЮТ + НУНС; Y – кількість прихильників Партії регіонів. На рисунку подано також результати відповідних розрахунків за моделлю (9)–(11). Загальну кількість прихильників інших партій і виборчих блоків Z на рис. 1 не показано, оскільки її можна визначити з умови (5):

$$Z = N - X - Y. \quad (12)$$

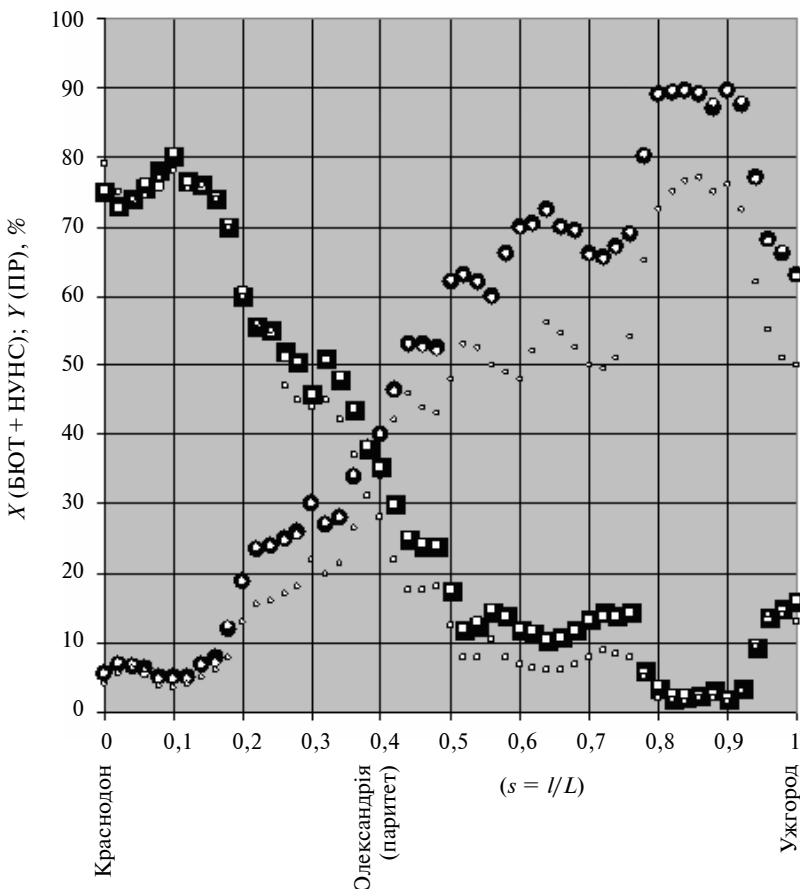


Рис. 1. Просторовий розподіл політичних симпатій 2006–2007 рр.: ● – $X(s, 2007)$; ○ – $X(s, 2007$ модель); ○ – $X(s, 2006)$; ■ – $Y(s, 2007)$; □ – $Y(s, 2007$ модель); □ – $Y(s, 2006)$

На рисунку видно, що паритет X - і Y -ідей на цьому напрямку припадає на район міста Олександрії. Аналогічно можна визначити точку паритету (якщо вона існує) за іншими напрямками. Паритетну ситуацію краще розглядати на рис. 2 – фазовому портреті розподілу, що відповідає рис. 1.

Цікаво, що в околі паритету результати виборів 2006 р. розташовані на лінії

$$x + y = 1 - z = 62 \%, \quad (13)$$

$$z = 38 \%. \quad (14)$$

Аналогічна картина, але на іншому рівні, спостерігається за результатами виборів 2007 р.:

$$x + y = 1 - z = 76 \%, \quad (15)$$

$$z = 24 \%. \quad (16)$$

Якщо ситуація в суспільстві не зміниться, то можна очікувати (як прогноз) на наступних виборах продовження витискування “третьої сили” (за принципом “третій – зайвий”) з політичної сцени на рівень

$$x + y = 1 - z = 88 \%, \quad (17)$$

$$z = 12 \%. \quad (18)$$

Процес витискування найбільш ефективним є саме в околі паритету. Дуже схоже, що політична ситуація в країні наближається до двополосної структури системи конкуренції ідей. Події в парламенті теж підтверджують таку тенденцію.

Далі розглянемо, яким чином можна моделювати ситуацію на паритетній межі за допомогою моделі (9)–(11).

Модель політичного паритету

На рис. 3 наведено фрагмент розподілу політичних симпатій на рис. 1 в околі паритету. Тут X_a, Y_a, Z_a – апроксимація статистики. Розподіл на ділянці протягом приблизно 150 км мож-

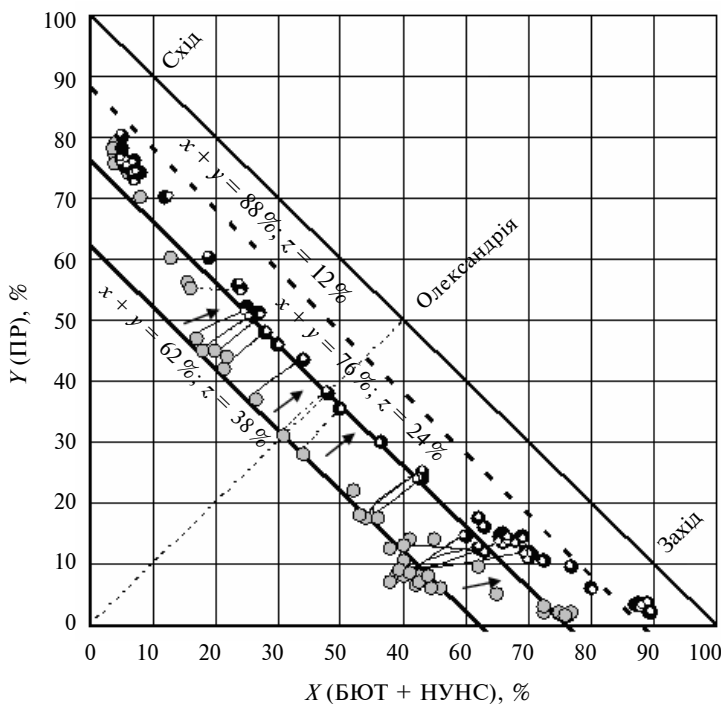


Рис. 2. Фазовий портрет політичних симпатій в напрямку Краснодар–Ужгород (стрілки вказують напрямок часових змін) 2006–2007 рр.: ○ – 2006; ● – 2007; ○ – модель; – паритет; — — — — — межа системи; - - - - - прогноз

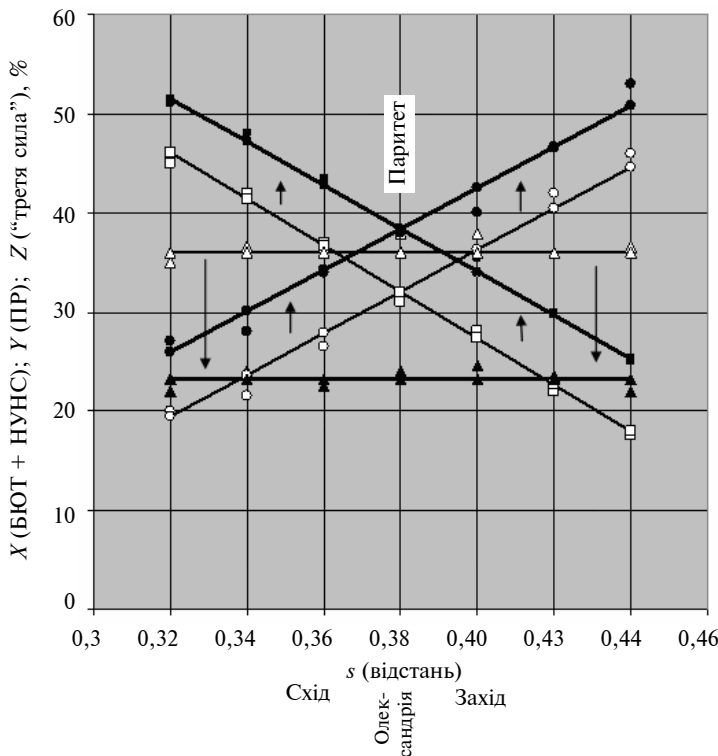


Рис. 3. Розподіл політичних симпатій (%) 2006–2007 рр. в околі паритетної межі: ○ – X (s, 2006); □ – Y (s, 2006); △ – Z (s, 2006); ● – X (s, 2007); ■ – Y (s, 2007); ▲ – Z (s, 2007); ○ – X_a (s, 2006); ● – X_a (s, 2007); □ – Y_a (s, 2006); ■ – Y_a (s, 2007); △ – Z_a (s, 2006); ▲ – Z_a (s, 2007)

на вважати лінійним. Видно, що точка паритету проягом міжвиборчого періоду практично залишилася на місці, але її рівень значно змінився. З цього можна зробити висновок, що в даному районі істотними є процеси міграції ідей і особливо їх кероване поширення. Крім того, протягом всього часового періоду, що розглядається, виконується умова (як наслідок (5)):

$$x = y = \frac{1-z}{2}. \quad (19)$$

Ця умова, а також очевидний в околі паритету нульовий градієнт (рис.3)

$$\text{grad}_z \approx 0 \quad (20)$$

зводять моделювання ситуації на паритетній межі замість системи (9)–(11) до диференціального рівняння

$$\frac{\partial z}{\partial \tau} = -\frac{k_x + k_y}{4}(1-z)^2(z_* - z), \quad (21)$$

що означає дезінтеграцію системи конкуренції ідей, тобто ситуацію ідентифікує еволюція “третьої сили” як джерела для X і Y.

Зауважимо, що на відміну від (20) паритетні значення

$$\text{grad}_x \approx 2, \quad (22)$$

$$\text{grad}_y \approx -2 \quad (23)$$

вказують на істотну міграцію X-, Y-ідей на межі їх паритету.

Результати розрахунку $z(\tau)$ за рівнянням (21) показано на рис. 4. Вони практично збігаються з результатами розрахунків $z(s, \tau)$ за повною моделлю (9)–(11). Там же наведено результати окремих розрахунків впливу процесу міграції ідей та процесу керованого поширення ідей. Очевидно, що їх сума також збігається з результатами $z(\tau)$ та $z(s, \tau)$.

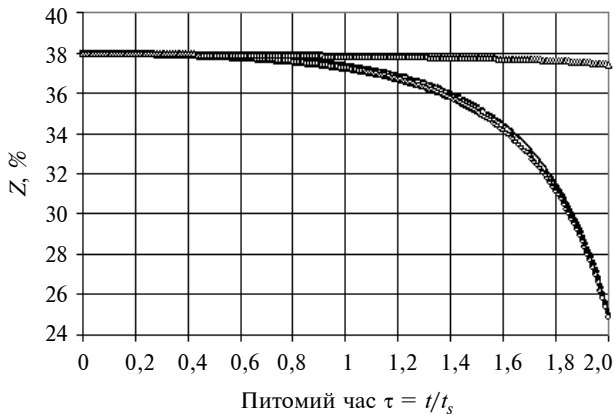


Рис. 4. Зменшення кількості прихильників "третьої сили":
 — $z(t)$; \circ — $z(s,t)$; \triangle — вплив міграції ідей; - - - керовані зміни

При цьому варто звернути увагу на те, що на межі паритету вплив керування значно більший впливу міграції ідей або їх довільного поширення. Саме цим ситуація паритету схожа на процеси в нашому парламенті. І саме тому лунають пропозиції про імперативний мандат як чинник керування, бо це є реакцією на ситуацію, що склалася – поведінка всіх парламентських фракцій нагадує армійську.

Особливості розрахунків за моделлю

Відомо, що зміни будь-якого стану можливі лише за умови його нестійкості. Результати виборів, зафіксовані у 2007 р., підтверджують, що політичний стан 2006 р. в Україні був нестійким. Тому розрахунки здійснювалися за умови

$$x_* = x(s, 2006), \quad (24)$$

$$y_* = y(s, 2006), \quad (25)$$

$$z_* = z(s, 2006). \quad (26)$$

Це означає, що виборчий процес починався за моделлю

$$\frac{\partial x}{\partial \tau} = k_r \frac{\partial^2 x}{\partial s^2} - k_m \frac{\partial x}{\partial s}, \quad (27)$$

$$\frac{\partial y}{\partial \tau} = k_r \frac{\partial^2 y}{\partial s^2} - k_m \frac{\partial y}{\partial s}, \quad (28)$$

$$\frac{\partial z}{\partial \tau} = k_r \frac{\partial^2 z}{\partial s^2} - k_m \frac{\partial z}{\partial s}. \quad (29)$$

Очевидно, що система конкуренції ідей була зруйнована, а модель мала вигляд сукупності незалежних рівнянь.

Нестійкий стаціонарний початковий стан описувався розв'язками

$$x(s) = \frac{x(0) \left[\exp\left(\frac{t_r}{t_m}\right) - \exp\left(\frac{t_r}{t_m} s\right) \right] + x(1) \left[\exp\left(\frac{t_r}{t_m} s\right) - 1 \right]}{\exp\left(\frac{t_r}{t_m}\right) - 1}, \quad (30)$$

$$y(s) = \frac{y(0) \left[\exp\left(\frac{t_r}{t_m}\right) - \exp\left(\frac{t_r}{t_m} s\right) \right] + y(1) \left[\exp\left(\frac{t_r}{t_m} s\right) - 1 \right]}{\exp\left(\frac{t_r}{t_m}\right) - 1}. \quad (31)$$

незалежних рівнянь

$$\frac{\partial^2 x}{\partial s^2} - \frac{t_r}{t_m} \frac{\partial x}{\partial s} = 0, \quad (32)$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial s^2} - \frac{t_r}{t_m} \frac{\partial y}{\partial s} = 0. \quad (33)$$

Звідси випливає, що початковий стан системи конкуренції ідей збурюється або довільним поширенням ідей, або її міграцією, або обома цими чинниками і тільки після появи нової інформації про ідею починається відповідне спілкування і, можливо, керування. В даному випадку (в околі паритету) в силу (20), (22) і (23), тобто за постійних градієнтів, збурення початкового стану відбувалося через міграцію ідей згідно з моделлю

$$\frac{\partial x}{\partial \tau} = -k_m \frac{\partial x}{\partial s}, \quad (34)$$

$$\frac{\partial y}{\partial \tau} = -k_m \frac{\partial y}{\partial s}, \quad (35)$$

$$\frac{\partial z}{\partial \tau} = -k_m \frac{\partial z}{\partial s}. \quad (36)$$

А оскільки на межі паритету градієнти X і Y були постійними і дорівнювали один одному

за величиною та були протилежними за знаком, то й межа не зрушилася з місця. Зросли лише їх рівні за рахунок Z .

Паритет у парламенті

Аналогічний процес (як наслідок існування паритетної межі в країні) розпочався і в попередньому складі парламенту, але його було зупинено достроковими виборами. Проте результати перевиборів створили в парламенті класичну біфуркаційну ситуацію, коли подальший розвиток подій вирішує випадковість.

Поведінка всіх систем у точках біфуркації якісно однакова – значна зміна шляху розвитку перебуває під впливом незначних збурень. Відомо, що в околі точок біфуркації закон великих чисел не діє, бо система є нелінійним підсилювачем флуктуацій і збурень. Тому й керування такими процесами можливе за допомогою незначних збурень, які впливають на вибір того чи іншого конкретного шляху розвитку в ті моменти, коли система перебуває в стані біфуркації і, відповідно, має кілька можливих напрямків розвитку. Останні події в парламенті саме це й підтверджують: в центрі уваги то збій в системі підрахунку голосів, то не так написана інструкція, то хтось у когось забрав картку для голосування, то хтось не так натиснув на кнопку і т.д. Все це було й раніше, але такі випадковості не були вирішальними, бо не було ситуації біфуркації. А от у даний момент, коли чисельність голосів у коаліції та опозиції майже паритетна, всі ці неістотні негаразди перетворилися на вирішальні. Ніхто конкретно в цьому не винен, бо значне підсилення ролі малих збурень в околі точки біфуркації є об'єктивним явищем. І доки таке співвідношення голосів у парламенті буде зберігатися, доти розвиток подій буде непередбачуваним. А конструктивна політика є політикою передбачуваною. Яким чином її можна реалізувати в нашій ситуації, якщо, звичайно, не зважати на безліч інших “підклимних” збурень?

Оскільки в парламенті просторові чинники не діють, то його поведінку можна описати системою [4]

$$\frac{\partial x}{\partial \tau} = x(yz_* - y_*z) + k_x xy(z_* - z), \quad (37)$$

$$\frac{\partial y}{\partial \tau} = y(x_*z - xz_*) + k_y xy(z_* - z), \quad (38)$$

$$\frac{\partial z}{\partial \tau} = z(xy_* - x_*y) - (k_x + k_y)xy(z_* - z), \quad (39)$$

яка є варіантом (9)–(11). Тут X – коаліція (кількість депутатів БЮТ + НУНС); Y – опозиція (кількість депутатів Партія регіонів + Комуністична партія); Z – “третья сила” (кількість депутатів блоку Литвина). За цією моделлю існує область компромісу (замкнута крива на рис. 5) навколо точки O_* – результату парламентського перерозподілу 2007 р. реального розподілу голосів виборців O_e (усереднення за простором розподілу на рис. 1, 2). На жаль, ця область надзвичайно обмежена. Очевидно, що збереження в парламенті реального розподілу голосів створило б значно ширшу область компромісу, ніж та, що створюється після перерозподілу, тобто зростання присутності (кількісної і якісної ваги) “третьої сили” в парламенті сприяє розширенню області компромісу. Ідеальним, мабуть, було б співвідношення $x_* = y_* = z_* = 1/3$. На жаль, з реальної політичної динаміки (рис. 2, 3, 4) виходить, що наш політичний процес прямує якраз у зворотному напрямку, тобто до звуження області компромісу. А це, в свою чергу, спонукає до застосування керування ідеями, а не до їх вільної конкуренції.

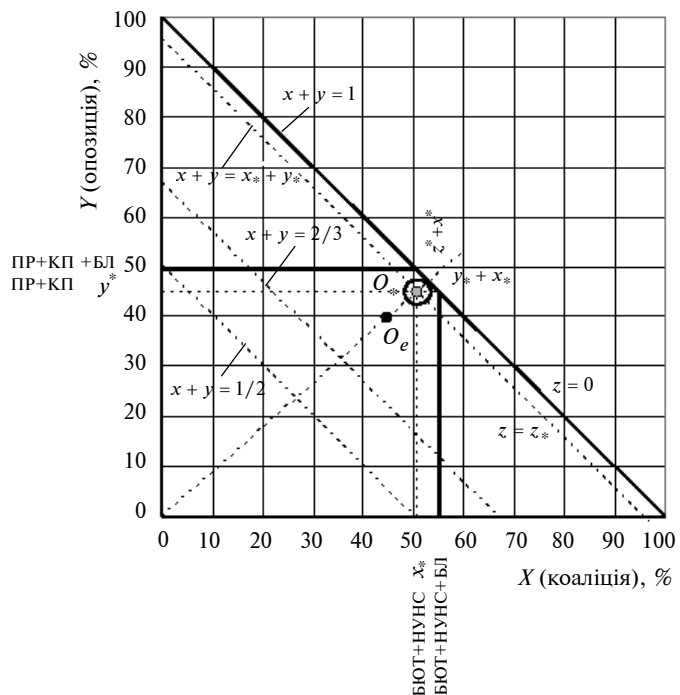


Рис. 5. Область компромісу в парламенті за результатами виборів 2007 р.

У моделі (37)–(39) компроміс визначається як *когерентне співвідношення* між чисельністю прихильників різних ідей, в обмеженій області якого існують *періодичні некритичні* для системи відхилення – культура співіснування на основі сприйняття суспільством феномену конкуренції ідей (політичних, економічних, соціальних, культурних). Система конкуренції ідей структурно нестійка і не компенсує такі відхилення, проте має механізм їх *обмеження* в певній безпечній для свого існування області компромісу. Відхилення за межі цієї області є критичними, вони руйнують структуру системи як сукупність елементів – ідей і призводять до монополізації однієї ідеї.

Висновки

1. За умови паритету політичних ідей їх кероване поширення є найбільш ефективним (якщо не зважати на етичні аспекти цього процесу).

2. За умови паритету провідних ідей відбувається витискування “третьої” ідеї саме завдяки застосуванню керування поширенням провідних ідей.

3. Паритетна межа політичних ідей в Україні в напрямку “північ–південь” існує весь час незалежності. В її околі рівень провідних ідей зростає саме за рахунок “третьої сили”.

4. Розвиток політичної структури відбувається в напрямку створення двополюсної партійної системи як у багатьох демократичних

країнах. І в цьому нема нічого специфічного. Наша специфіка полягає в існуванні саме *неперервної* паритетної ідейної межі, яка територіально поділяє країну на два ідейних табори, що й створює ефект “розколу”.

5. Розподіл політичних сил у парламенті є біфуркаційним, тобто таким, що розвиток подій буде часто-густо непередбачуваним і залежатиме від неістотних збурень. Дана ситуація є результатом антисистемних парламентських норм, за якими мінімально необхідна кількість голосів для прийняття рішень (226) збігається з мінімально необхідною кількістю депутатів для створення коаліції (теж 226). Отже, стан біфуркації в нашому парламенті передбачено законом, що й вказує на відсутність системності в рішеннях законодавця.

6. “Об’єднання” суспільства полягає не в ідейному переконанні, а в територіальному розпорошенні провідних ідей, що призведе до їх локальної конкуренції (як в США, Англії, Франції та інших країнах) замість глобальної (як у нас).

7. Наведений математичний опис конкуренції ідей за умови їх паритету є одним з можливих тлумачень даної ситуації і тому відкритий для критики.

8. Перспектива досліджень пов’язана з використанням двовимірної моделі та її безпосереднім оперативним зв’язком з електронною картою України.

Г.П. Повещенко

КОНКУРЕНЦИЯ ИДЕЙ В УСЛОВИЯХ ПАРИТЕТА

Показано, как политическая конкуренция в нашем обществе сводится к конкуренции двух ведущих идей и нескольких других идей, которые обобщены термином “третья сила”. Эта совокупность идей составляет структуру распределенной на территории системы общественной конкуренции. Как ее проявление в статье моделируется конкретная ситуация политического паритета в обществе и в парламенте.

G.P. Poveshchenko

COMPETITION OF IDEAS IN THE PARITY CONDITIONS

The key assumption behind this work is that political competition in our society comes to the competition of two leading ideas and several other ideas, generalized under the term the «third» power. This aggregate of ideas forms a widely-distributed structure of the public competition system. On the experimental side, a specific situation of political parity both in society and in parliament is modeled.

1. *Николис Г., Пригожин И.* Самоорганизация в неравновесных системах. – М.: Мир, 1979. – 512 с.

2. *Edling C.* Mathematics in sociology // Annual Review of Sociology. – 2002. – 28. – P. 197–220.

3. *Бенедек П., Ласло А.* Научные основы химической технологии. – Л.: Химия, 1970. – 350 с.
4. *Повещенко Г.П.* Модель взаємовпливу популяції та довкілля // Доп. НАН України. – 2001. – № 12. – С. 71–77.
5. *Повещенко Г.П.* Динаміка спілкування та регуляції // Системні дослідження та інформаційні технології. – 2007. – № 4. – С. 125–139.
6. *Чернавский Д.С., Чернавская Н.М., Малков А.С., Малков С.Ю.* Борьба условных информаций // Математическое моделирование социальной динамики. – М.: КомКнига, 2005. – С. 88–103.

Рекомендована Радою
Навчально-наукового комплексу
“Інститут прикладного системного
аналізу” НТУУ “КПІ”

Надійшла до редакції
24 грудня 2007 року

УДК 519.832.3

В.В. Романюк

ТАКТИКА ПЕРЕБОРУ ЧИСТИХ СТРАТЕГІЙ ЯК ТЕОРЕТИЧНЕ ПІДґРУНТЯ ДЛЯ ДОСЛІДЖЕННЯ ЕФЕКТИВНОСТІ РІЗНИХ СПОСОБІВ РЕАЛІЗАЦІЇ ОПТИМАЛЬНИХ ЗМІШАНИХ СТРАТЕГІЙ

Вступ

Всебічне дослідження матричних ігор проведено в багатьох працях з математичного моделювання, які стосуються теорії ігор. Однак питання про реалізацію на практиці принципу оптимальної поведінки гравців у довільній матричній грі без сідлової точки поки що не вирішено. Тому в публікації [1] розглядається проблема, яка стосується порядку перебору чистих стратегій гравцями для реалізації їх оптимальних змішаних стратегій у матричній 2×2 -грі з симетричною додатною матрицею виграшів

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} a & \frac{a}{k} \\ \frac{a}{k} & a \end{bmatrix}, \text{ де } a > 0, k > 1. \text{ Про раціональний}$$

порядок або тактику перебору чистих стратегій гравцями для реалізації їх оптимальних змішаних стратегій йдеться в статті [2], де встановлено, що в довільній матричній 2×2 -грі без сідлової точки із скінченним числом партій гри кожному із гравців для того, щоб реалізувати свої оптимальні змішані стратегії

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{S}}_1 &= [\hat{p}_1 \ \hat{p}_2] = [\hat{p}_1 \ 1 - \hat{p}_1] = [\hat{p} \ 1 - \hat{p}] \in \Upsilon_1 \subset \\ &\subset \{[p_1 \ p_2] \in \mathbb{R}^2 : p_k \in [0; 1] \ \forall k = \overline{1, 2}, \\ &\quad p_1 + p_2 = 1\}, \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \check{\mathbf{S}}_2 &= [\check{q}_1 \ \check{q}_2] = [\check{q}_1 \ 1 - \check{q}_1] = [\check{q} \ 1 - \check{q}] \in \Upsilon_2 \subset \\ &\subset \{[q_1 \ q_2] \in \mathbb{R}^2 : q_l \in [0; 1] \ \forall l = \overline{1, 2}, \\ &\quad q_1 + q_2 = 1\}, \end{aligned} \quad (2)$$

не слід дотримуватися нестохастичного порядку перебору чистих стратегій. Натомість кожен

із гравців може реалізувати свої оптимальні змішані стратегії (1) і (2), використовуючи для моделювання вибору однієї з двох чистих стратегій незалежну випадкову величину, рівномірно розподілену на напівсегменті $[0; 1)$. При цьому перший гравець розіграє рівномірно розподілену на напівсегменті $[0; 1)$ випадкову величину X і визначає число

$$p_0 = \frac{\text{sign}(\hat{p} - x) + 1}{2} |\text{sign}(\hat{p} - x)| \in \{0, 1\}, \quad (3)$$

де x — значення випадкової величини X . Якщо $p_0 = 1$, то в даній партії гри він має вибирати першу чисту стратегію; якщо ж $p_0 = 0$, то йому слід вибирати другу чисту стратегію. Аналогічно, другий гравець розіграє рівномірно розподілену на напівсегменті $[0; 1)$ випадкову величину Y і визначає число

$$q_0 = \frac{\text{sign}(\check{q} - y) + 1}{2} |\text{sign}(\check{q} - y)| \in \{0, 1\}, \quad (4)$$

де y — значення випадкової величини Y . Якщо $q_0 = 1$, то в даній партії гри гравцю треба вибирати першу чисту стратегію; якщо ж $q_0 = 0$, то він повинен вибирати свою другу чисту стратегію. Таке розігрування двох незалежних випадкових величин і вибирання чистих стратегій за значеннями (3), (4) дає можливість досягти тотожності між математичним сподіванням виграшу першого гравця та значенням гри

$$\begin{aligned} V_{\text{opt}} &= \hat{\mathbf{S}}_1 \mathbf{P} (\check{\mathbf{S}}_2)^T = \hat{\mathbf{S}}_1 \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{bmatrix} (\check{\mathbf{S}}_2)^T = \\ &= [\hat{p} \ 1 - \hat{p}] \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \check{q} \\ 1 - \check{q} \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (5)$$

де

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{bmatrix} \quad (6)$$

є матрицею гри.

Постановка задачі

У даній статті необхідно побудувати теоретичне підґрунтя для дослідження ефективності різних способів реалізації гравцями їх оптимальних змішаних стратегій у довільній матричній 2×2 -грі без сідлової точки із скінченним числом партій гри. Кожен спосіб з цього моменту буде називатися тактикою перебору чистих стратегій (ТПЧС).

Дослідження основних стратегій

Розглянемо довільну матричну 2×2 -гру без сідлової точки, в якій розв'язок $\Upsilon_1, \Upsilon_2, V_{opt}$, як відомо [3], визначається з умови

$$S_1 P(S_2) \overset{\vee}{\leq} \hat{S}_1 P(S_2) \overset{\vee}{\leq} \hat{S}_1 P(S_2)^T, \quad (7)$$

де

$$S_1 = [p_1 \ p_2] = [p_1 \ 1 - p_1] = [p \ 1 - p] \in \{ [p_1 \ p_2] \in \mathbb{R}^2 : p_k \in [0; 1] \ \forall k = \overline{1, 2}, p_1 + p_2 = 1 \}; \quad (8)$$

$$S_2 = [q_1 \ q_2] = [q_1 \ 1 - q_1] = [q \ 1 - q] \in \{ [q_1 \ q_2] \in \mathbb{R}^2 : q_l \in [0; 1] \ \forall l = \overline{1, 2}, q_1 + q_2 = 1 \}. \quad (9)$$

Подамо числа \hat{p} і \hat{q} у вигляді дробів з однаковими найменшими знаменниками: $\hat{p} = \frac{a}{d}$, $\hat{q} = \frac{b}{d}$, де $a \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $b \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $d \in \mathbb{N}$, $a \leq d$, $b \leq d$. Тоді одну ТПЧС першим гравцем можна зобразити як d -вимірний вектор [4, 5]

$$\Theta_1 = [\theta_{11} \ \theta_{12} \ \dots \ \theta_{1,d-1} \ \theta_{1d}] \in \left\{ \Theta_1 \in R^d : \theta_{1r} \in \{0, 1\}, \sum_{r=1}^d \theta_{1r} = a \right\}, \quad (10)$$

елементами якого є нулі і одиниці, причому кількість одиниць дорівнює a . Аналогічно для другого гравця

$$\Theta_2 = [\theta_{21} \ \theta_{22} \ \dots \ \theta_{2,d-1} \ \theta_{2d}] \in$$

$$\in \left\{ \Theta_2 \in R^d : \theta_{2r} \in \{0, 1\}, \sum_{r=1}^d \theta_{2r} = b \right\}. \quad (11)$$

Одиниця у векторах (10) і (11) означає вибір гравцем першої чистої стратегії, а нуль – вибір другої. Очевидно, що перший гравець має у своєму розпорядженні $C_d^a = \frac{d!}{a!(d-a)!}$

ТПЧС, а другий – $C_d^b = \frac{d!}{b!(d-b)!}$ ТПЧС. Всього в грі буде $C_d^a C_d^b$ пар тактики перебору чистих стратегій обома гравцями. Вважатимемо множину

$$\Omega_1 = \{ \Theta_1(1), \Theta_1(2), \dots, \Theta_1(C_d^a - 1), \Theta_1(C_d^a) \} \quad (12)$$

усіх C_d^a ТПЧС першого гравця просортованою відповідним чином. Запишемо деяке d -розрядне двійкове число

$$(1 \ 1 \ \dots \ 1 \ 0 \ 0 \ \dots \ 0)_2 = (\theta_{11}(1) \ \theta_{12}(1) \ \dots \ \theta_{1a}(1) \ \theta_{1,a+1}(1) \ \theta_{1,a+2}(1) \ \dots \ \theta_{1d}(1))_2, \quad (13)$$

в якому $\theta_{1i}(1) = 1 \ \forall i = \overline{1, a}$; $\theta_{1j}(1) = 0 \ \forall j = \overline{a+1, d}$. Тоді $\Theta_1(1)$, тобто перший елемент множини (12), відповідатиме двійковому числу (13). А останній елемент $\Theta_1(C_d^a)$ цієї множини нехай відповідає d -розрядному двійковому числу

$$(0 \ 0 \ \dots \ 0 \ 1 \ 1 \ \dots \ 1)_2 = (\theta_{11}(C_d^a) \ \theta_{12}(C_d^a) \ \dots \ \theta_{1,d-a}(C_d^a) \ \theta_{1,d-a+1}(C_d^a) \ \theta_{1,d-a+2}(C_d^a) \ \dots \ \theta_{1d}(C_d^a))_2, \quad (14)$$

в якому $\theta_{1,j-a}(C_d^a) = 0 \ \forall j = \overline{a+1, d}$; $\theta_{1,i+d-a}(C_d^a) = 1 \ \forall i = \overline{1, a}$. Таким чином, елементи множини Ω_1 відповідають d -розрядним двійковим числам, які відсортовані в порядку спадання від числа (13) до числа (14). Аналогічно цьому множина

$$\Omega_2 = \{ \Theta_2(1), \Theta_2(2), \dots, \Theta_2(C_d^b - 1), \Theta_2(C_d^b) \} \quad (15)$$

усіх C_d^b ТПЧС другого гравця відповідатиме C_d^b -елементній множині d -розрядних двійко-

вих чисел, які відсортовані в порядку спадання від числа

$$(1 \ 1 \ \dots \ 1 \ 0 \ 0 \ \dots \ 0)_2 = (\theta_{21}(1) \ \theta_{22}(1) \ \dots \ \theta_{2b}(1) \ \theta_{2,b+1}(1) \ \theta_{2,b+2}(1) \ \dots \ \theta_{2d}(1))_2, \quad (16)$$

в якому $\theta_{2i}(1) = 1 \ \forall i = \overline{1, b}$, $\theta_{2j}(1) = 0 \ \forall j = \overline{b+1, d}$, до числа

$$(0 \ 0 \ \dots \ 0 \ 1 \ 1 \ \dots \ 1)_2 = (\theta_{21}(C_d^b) \ \theta_{22}(C_d^b) \ \dots \ \theta_{2,d-b}(C_d^b) \ \theta_{2,d-b+1}(C_d^b) \ \theta_{2,d-b+2}(C_d^b) \ \dots \ \theta_{2d}(C_d^b))_2, \quad (17)$$

в якому $\theta_{2,j-b}(C_d^b) = 0 \ \forall j = \overline{b+1, d}$, $\theta_{2,i+d-b}(C_d^b) = 1 \ \forall i = \overline{1, b}$.

Припустимо, що в якійсь серії з $G \in \mathbb{N}$ ігор гравці використовують незалежно один від одного пару ТПЧС $\{\Theta_1(c_1), \Theta_2(c_2)\}$, де $c_1 \in \overline{\{1, C_d^a\}}$, $c_2 \in \overline{\{1, C_d^b\}}$. Тоді в g -й грі, $g = \overline{1, G}$, перший гравець вибирає чисту стратегію за схемою у формі двохелементного вектора

$$\mathbf{T}_1(c_1, g) \in \{[1 \ 0], [0 \ 1]\}. \quad (18)$$

Якщо $g \leq d$ і $\theta_{1g}(c_1) = 0$, то $\mathbf{T}_1(c_1, g) = [0 \ 1]$, а якщо $\theta_{1g}(c_1) = 1$, то $\mathbf{T}_1(c_1, g) = [1 \ 0]$. Так само в g -й грі другий гравець вибирає чисту стратегію за схемою у формі двохелементного вектора

$$\mathbf{T}_2(c_2, g) \in \{[1 \ 0], [0 \ 1]\}, \quad (19)$$

де $\mathbf{T}_2(c_2, g) = [1 \ 0]$ при $\theta_{2g}(c_2) = 1$ і $g \leq d$; $\mathbf{T}_2(c_2, g) = [0 \ 1]$ при $\theta_{2g}(c_2) = 0$ і $g \leq d$. Якщо ж $g > d$, то вважатимемо, що обидва гравці використовують свої ТПЧС циклічно, тобто при $g = m + nd$, $m < d$, $n \in \mathbb{N}$ маємо

$$\mathbf{T}_1(c_1, g) = \mathbf{T}_1(c_1, m), \quad (20)$$

$$\mathbf{T}_2(c_2, g) = \mathbf{T}_2(c_2, m). \quad (21)$$

У кожного з гравців є два варіанти розігрування G партій даної матричної гри: 1) для моделювання вибору однієї з двох чистих стратегій використовувати незалежну випадкову величину, яка рівномірно розподілена на на-

півсегменті $[0; 1)$, і вибирати чисті стратегії за значеннями (3) і (4); 2) вибирати чисті стратегії за схемами у формі (18) і (19), які опираються на ТПЧС із множин (12) і (15), відповідно. Зауважимо, що при першому варіанті розігрування G партій даної матричної гри спосіб реалізації оптимальної змішаної стратегії можна назвати випадковою ТПЧС. Отже, у g -й грі ви-

граш першого гравця визначається в чотирьох випадках: 1) обидва гравці вибирають чисті стратегії за значеннями (3) і (4); 2) перший гравець вибирає чисті стратегії за значенням (3), а другий – за деякою ТПЧС $\Theta_2(c_2)$, $c_2 \in \overline{\{1, C_d^b\}}$; 3) перший гравець вибирає чисті стратегії за деякою ТПЧС $\Theta_1(c_1)$, $c_1 \in \overline{\{1, C_d^a\}}$, а другий – за значенням (4); 4) обидва гравці вибирають чисті стратегії за парою деяких ТПЧС $\{\Theta_1(c_1), \Theta_2(c_2)\}$, де $c_1 \in \overline{\{1, C_d^a\}}$; $c_2 \in \overline{\{1, C_d^b\}}$.

Для того щоб оцінити очікуваний виграш першого гравця в G партіях гри, треба ці G партій повторити хоча б R разів, де $R \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$. Отже, якщо обидва гравці вибирають чисті стратегії за значеннями (3) і (4), то виграш першого гравця в g -й грі при r -й реалізації серії з G ігор становитиме

$$w_{11}(g, r; G, R) = [p_0 \ 1 - p_0] \mathbf{P} [q_0 \ 1 - q_0]^T, \quad (22)$$

де $r = \overline{1, R}$. При виборі чистої стратегії першим гравцем за значенням (3), а другим – за ТПЧС $\Theta_2(c_2)$ виграш першого гравця в g -й грі при r -й реалізації серії з G ігор становитиме

$$w_{10}(g, r; c_2; G, R) = [p_0 \ 1 - p_0] \mathbf{P} (\mathbf{T}_2(c_2, g))^T. \quad (23)$$

У третьому варіанті, коли другий гравець вибирає чисті стратегії за значенням (4), а перший – за ТПЧС $\Theta_1(c_1)$, виграшем останнього в g -й грі при r -й реалізації серії із G ігор є

$$w_{01}(g, r; c_1; G, R) = \mathbf{T}_1(c_1, g) \mathbf{P} [q_0 \ 1 - q_0]^T. \quad (24)$$

Нарешті, якщо обидва гравці вибирають чисті стратегії за парою ТПЧС $\{\Theta_1(c_1), \Theta_2(c_2)\}$, то виграш першого гравця в g -й грі при r -й реалізації серії з G ігор обчислюється як

$$w_{00}(g, r; c_1, c_2; G, R) = \mathbf{T}_1(c_1, g) \mathbf{P}[\mathbf{T}_2(c_2, g)]^T. \quad (25)$$

Залежно від використання гравцями значень (3) і (4) або ТПЧС $\Theta_1(c_1)$, $\Theta_2(c_2)$ середній виграш першого гравця за G партій гри в r -й реалізації цих G партій, відповідно до позначень (22)–(25), буде визначатись так:

$$\tilde{w}_{11}(r; G, R) = \frac{1}{G} \sum_{g=1}^G w_{11}(g, r; G, R), \quad (26)$$

$$\tilde{w}_{10}(r; c_2; G, R) = \frac{1}{G} \sum_{g=1}^G w_{10}(g, r; c_2; G, R), \quad (27)$$

$$\tilde{w}_{01}(r; c_1; G, R) = \frac{1}{G} \sum_{g=1}^G w_{01}(g, r; c_1; G, R), \quad (28)$$

$$\begin{aligned} \tilde{w}_{00}(r; c_1, c_2; G, R) &= \\ &= \frac{1}{G} \sum_{g=1}^G w_{00}(g, r; c_1, c_2; G, R). \end{aligned} \quad (29)$$

Очевидним тут є те, що математичне сподівання виграшу першого гравця V_{opt} дорівнює величині $\tilde{w}_{11}(r; G, R)$ при $G \rightarrow \infty$:

$$\begin{aligned} \lim_{G \rightarrow \infty} \tilde{w}_{11}(r; G, R) &= \lim_{G \rightarrow \infty} \frac{1}{G} \sum_{g=1}^G w_{11}(g, r; G, R) = \\ &= \hat{\mathbf{S}}_1 \mathbf{P}(\hat{\mathbf{S}}_2)^T = V_{\text{opt}}. \end{aligned} \quad (30)$$

Зазначимо також, що при $G < \infty$ математичне сподівання виграшу першого гравця V_{opt} дорівнює усередненому

$$\begin{aligned} V_{11}(G, R) &= \frac{1}{R} \sum_{r=1}^R \tilde{w}_{11}(r; G, R) = \\ &= \frac{1}{R} \sum_{r=1}^R \frac{1}{G} \sum_{g=1}^G w_{11}(g, r; G, R) = \\ &= \frac{1}{RG} \sum_{r=1}^R \sum_{g=1}^G w_{11}(g, r; G, R) \end{aligned} \quad (31)$$

по R реалізаціях середньому виграшу (26) при $R \rightarrow \infty$:

$$\begin{aligned} \lim_{R \rightarrow \infty} V_{11}(G, R) &= \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{RG} \sum_{r=1}^R \sum_{g=1}^G w_{11}(g, r; G, R) = \\ &= \frac{1}{G} \sum_{g=1}^G \left(\lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{R} \sum_{r=1}^R w_{11}(g, r; G, R) \right) = \\ &= \frac{1}{G} \sum_{g=1}^G V_{\text{opt}} = \hat{\mathbf{S}}_1 \mathbf{P}(\hat{\mathbf{S}}_2)^T = V_{\text{opt}}. \end{aligned} \quad (32)$$

Тепер на прикладі визначення величини (31) по (26) випишемо інші три усереднені по R реалізаціях середні виграші (27)–(29):

$$\begin{aligned} V_{10}(c_2; G, R) &= \frac{1}{R} \sum_{r=1}^R \tilde{w}_{10}(r; c_2; G, R) = \\ &= \frac{1}{R} \sum_{r=1}^R \frac{1}{G} \sum_{g=1}^G w_{10}(g, r; c_2; G, R) = \\ &= \frac{1}{RG} \sum_{r=1}^R \sum_{g=1}^G w_{10}(g, r; c_2; G, R), \end{aligned} \quad (33)$$

$$\begin{aligned} V_{01}(c_1; G, R) &= \frac{1}{R} \sum_{r=1}^R \tilde{w}_{01}(r; c_1; G, R) = \\ &= \frac{1}{R} \sum_{r=1}^R \frac{1}{G} \sum_{g=1}^G w_{01}(g, r; c_1; G, R) = \\ &= \frac{1}{RG} \sum_{r=1}^R \sum_{g=1}^G w_{01}(g, r; c_1; G, R), \end{aligned} \quad (34)$$

$$\begin{aligned} V_{00}(c_1, c_2; G, R) &= \frac{1}{R} \sum_{r=1}^R \tilde{w}_{00}(r; c_1, c_2; G, R) = \\ &= \frac{1}{R} \sum_{r=1}^R \frac{1}{G} \sum_{g=1}^G w_{00}(g, r; c_1, c_2; G, R) = \\ &= \frac{1}{RG} \sum_{r=1}^R \sum_{g=1}^G w_{00}(g, r; c_1, c_2; G, R). \end{aligned} \quad (35)$$

Але вивчати співвідношення між способами вибору чистих стратегій на основі чисел (3) і (4) та ТПЧС $\Theta_1(c_1)$, $\Theta_2(c_2)$ можна тільки за допомогою нормованих усереднених виграшів (31), (33)–(35):

$$v_{11}(G, R) = \frac{V_{11}(G, R) - V_{\text{opt}}}{|V_{\text{opt}}|} =$$

$$= \frac{1}{RG} \sum_{r=1}^R \sum_{g=1}^G w_{11}(g, r; G, R) - V_{\text{opt}} \quad (36)$$

$$= \frac{1}{RG} \sum_{r=1}^R \sum_{g=1}^G w_{11}(g, r; G, R) - V_{\text{opt}} \quad (36)$$

$$v_{10}(c_2; G, R) = \frac{V_{10}(c_2; G, R) - V_{\text{opt}}}{|V_{\text{opt}}|} =$$

$$= \frac{1}{RG} \sum_{r=1}^R \sum_{g=1}^G w_{10}(g, r; c_2; G, R) - V_{\text{opt}} \quad (37)$$

$$= \frac{1}{RG} \sum_{r=1}^R \sum_{g=1}^G w_{10}(g, r; c_2; G, R) - V_{\text{opt}} \quad (37)$$

$$v_{01}(c_1; G, R) = \frac{V_{01}(c_1; G, R) - V_{\text{opt}}}{|V_{\text{opt}}|} =$$

$$= \frac{1}{RG} \sum_{r=1}^R \sum_{g=1}^G w_{01}(g, r; c_1; G, R) - V_{\text{opt}} \quad (38)$$

$$= \frac{1}{RG} \sum_{r=1}^R \sum_{g=1}^G w_{01}(g, r; c_1; G, R) - V_{\text{opt}} \quad (38)$$

$$v_{00}(c_1, c_2; G, R) = \frac{V_{00}(c_1, c_2; G, R) - V_{\text{opt}}}{|V_{\text{opt}}|} =$$

$$= \frac{1}{RG} \sum_{r=1}^R \sum_{g=1}^G w_{00}(g, r; c_1, c_2; G, R) - V_{\text{opt}} \quad (39)$$

$$= \frac{1}{RG} \sum_{r=1}^R \sum_{g=1}^G w_{00}(g, r; c_1, c_2; G, R) - V_{\text{opt}} \quad (39)$$

У кожного з гравців є два способи, які в певному розумінні можна назвати метастратегіями [3], отримання якнайбільшого виграшу за G партій гри: користуватись значеннями (3) та (4) і за ними перебирати чисті стратегії або використовувати одну з ТПЧС. Звідси впливає нова матрична 2×2 -гра з платіжною матрицею, елементами якої є нормовані усереднені виграші (36)–(39):

$$\mathbf{V}(c_1, c_2; G, R) =$$

$$= \begin{bmatrix} v_{11}(G, R) & v_{10}(c_2; G, R) \\ v_{01}(c_1; G, R) & v_{00}(c_1, c_2; G, R) \end{bmatrix}. \quad (40)$$

Елементи цієї матриці $v_{11}(G, R)$, $v_{10}(c_2; G, R)$ і $v_{01}(c_1; G, R)$ є значеннями деяких випадкових величин, оскільки визначаються вони через p_0 і q_0 , які залежать від значень випадкових величин X і Y , відповідно. А число $v_{00}(c_1, c_2; G, R)$ не випадкове – воно залежить

від детермінованих ТПЧС $\Theta_1(c_1)$ і $\Theta_2(c_2)$, а також від чисел G і R . Якщо існує розв'язок матричної 2×2 -гри з платіжною матрицею (40) в чистих стратегіях, то його можна вважати визначальним для ефективної реалізації обома гравцями їх оптимальних змішаних стратегій у матричній 2×2 -гри з платіжною матрицею (6) при можливому використанні ТПЧС $\Theta_1(c_1)$ і $\Theta_2(c_2)$.

На основі (10)–(39) розглянемо приклад можливості визначення множини всіх можливих ТПЧС (10), (11) для класу 2×2 -ігор із симетричною матрицею (6). У формулі (6) покладемо $u_{11} = u_{22}$, $u_{12} = u_{21}$. Тоді матриця (6) стане симетричною. Розв'язком такої гри є однакові оптимальні змішані стратегії гравців:

$$\hat{p} = \check{q} = \frac{u_{11} - u_{12}}{u_{11} + u_{11} - u_{12} - u_{12}} = \frac{u_{11} - u_{12}}{2(u_{11} - u_{12})} = \frac{1}{2}, \quad (41)$$

$$V_{\text{opt}} = \hat{\mathbf{S}}_1 \mathbf{P}(\check{\mathbf{S}}_2)^T = \hat{\mathbf{S}}_1 \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{12} & u_{11} \end{bmatrix} (\check{\mathbf{S}}_2)^T =$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{12} & u_{11} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \frac{u_{11} + u_{12}}{2}. \quad (42)$$

Випишемо множини (12) і (15) для $d = 2$ та ймовірностей (41) і завдяки цьому знайдемо множину значень $\{\{v_{00}(c_1, c_2; G, R)\}_{c_1=1}^2\}_{c_2=1}^2$:

$$\Omega_1 = \{[1 \ 0], [0 \ 1]\} = \Omega_2, \quad (43)$$

$$w_{00}(2n+1, r; 1, 1; G, R) =$$

$$= \mathbf{T}_1(1, 2n+1) \mathbf{P}[\mathbf{T}_2(1, 2n+1)]^T =$$

$$= [1 \ 0] \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{12} & u_{11} \end{bmatrix} [1 \ 0]^T = u_{11}, \quad (44)$$

$$w_{00}(2n, r; 1, 1; G, R) = \mathbf{T}_1(1, 2n) \mathbf{P}[\mathbf{T}_2(1, 2n)]^T =$$

$$= [0 \ 1] \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{12} & u_{11} \end{bmatrix} [0 \ 1]^T = u_{11}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad (45)$$

$$\tilde{w}_{00}(r; 1, 1; G, R) =$$

$$= \frac{1}{G} \sum_{g=1}^G w_{00}(g, r; 1, 1; G, R) = \frac{1}{G} \sum_{g=1}^G u_{11} = u_{11}, \quad (46)$$

$$V_{00}(1, 1; G, R) = \frac{1}{R} \sum_{r=1}^R \tilde{w}_{00}(r; 1, 1; G, R) = \frac{1}{R} \sum_{r=1}^R u_{11} = u_{11}, \quad (47)$$

$$v_{00}(1, 1; G, R) = \frac{V_{00}(1, 1; G, R) - V_{\text{opt}}}{|V_{\text{opt}}|} = \frac{u_{11} - \frac{u_{11} + u_{12}}{2}}{\left| \frac{u_{11} + u_{12}}{2} \right|} = \frac{u_{11} - u_{12}}{|u_{11} + u_{12}|}; \quad (48)$$

$$w_{00}(2n+1, r; 1, 2; G, R) = \mathbf{T}_1(1, 2n+1) \mathbf{P}[\mathbf{T}_2(2, 2n+1)]^T = [1 \ 0] \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{12} & u_{11} \end{bmatrix} [0 \ 1]^T = u_{12}, \quad (49)$$

$$w_{00}(2n, r; 1, 2; G, R) = \mathbf{T}_1(1, 2n) \mathbf{P}[\mathbf{T}_2(2, 2n)]^T = [0 \ 1] \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{12} & u_{11} \end{bmatrix} [1 \ 0]^T = u_{12}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad (50)$$

$$\tilde{w}_{00}(r; 1, 2; G, R) = \frac{1}{G} \sum_{g=1}^G w_{00}(g, r; 1, 2; G, R) = \frac{1}{G} \sum_{g=1}^G u_{12} = u_{12}, \quad (51)$$

$$V_{00}(1, 2; G, R) = \frac{1}{R} \sum_{r=1}^R \tilde{w}_{00}(r; 1, 2; G, R) = \frac{1}{R} \sum_{r=1}^R u_{12} = u_{12}, \quad (52)$$

$$v_{00}(1, 2; G, R) = \frac{V_{00}(1, 2; G, R) - V_{\text{opt}}}{|V_{\text{opt}}|} = \frac{u_{12} - \frac{u_{11} + u_{12}}{2}}{\left| \frac{u_{11} + u_{12}}{2} \right|} = \frac{u_{12} - u_{11}}{|u_{11} + u_{12}|} = -v_{00}(1, 1; G, R), \quad (53)$$

$$w_{00}(2n+1, r; 2, 1; G, R) =$$

$$= \mathbf{T}_1(2, 2n+1) \mathbf{P}[\mathbf{T}_2(1, 2n+1)]^T = [0 \ 1] \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{12} & u_{11} \end{bmatrix} [1 \ 0]^T = u_{12}, \quad (54)$$

$$w_{00}(2n, r; 2, 1; G, R) = \mathbf{T}_1(2, 2n) \mathbf{P}[\mathbf{T}_2(2, 2n)]^T = [1 \ 0] \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{12} & u_{11} \end{bmatrix} [0 \ 1]^T = u_{12}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad (55)$$

$$\tilde{w}_{00}(r; 2, 1; G, R) = \frac{1}{G} \sum_{g=1}^G w_{00}(g, r; 2, 1; G, R) = \frac{1}{G} \sum_{g=1}^G u_{12} = u_{12}, \quad (56)$$

$$V_{00}(2, 1; G, R) = \frac{1}{R} \sum_{r=1}^R \tilde{w}_{00}(r; 2, 1; G, R) = \frac{1}{R} \sum_{r=1}^R u_{12} = u_{12}, \quad (57)$$

$$v_{00}(2, 1; G, R) = \frac{V_{00}(2, 1; G, R) - V_{\text{opt}}}{|V_{\text{opt}}|} = v_{00}(1, 2; G, R), \quad (58)$$

$$w_{00}(2n+1, r; 2, 2; G, R) = \mathbf{T}_1(2, 2n+1) \mathbf{P}[\mathbf{T}_2(2, 2n+1)]^T = [0 \ 1] \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{12} & u_{11} \end{bmatrix} [0 \ 1]^T = u_{11}, \quad (59)$$

$$w_{00}(2n, r; 2, 2; G, R) = \mathbf{T}_1(2, 2n) \mathbf{P}[\mathbf{T}_2(2, 2n)]^T = [1 \ 0] \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{12} & u_{11} \end{bmatrix} [1 \ 0]^T = u_{11}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad (60)$$

$$\tilde{w}_{00}(r; 2, 2; G, R) = \frac{1}{G} \sum_{g=1}^G w_{00}(g, r; 2, 2; G, R) = \frac{1}{G} \sum_{g=1}^G u_{11} = u_{11}, \quad (61)$$

$$V_{00}(2, 2; G, R) = \frac{1}{R} \sum_{r=1}^R \tilde{w}_{00}(r; 2, 2; G, R) = \frac{1}{R} \sum_{r=1}^R u_{11} = u_{11}, \quad (62)$$

$$v_{00}(2, 2; G, R) = \frac{V_{00}(2, 2; G, R) - V_{\text{opt}}}{|V_{\text{opt}}|} = v_{00}(1, 1; G, R). \quad (63)$$

Отже, елемент матриці (40) $v_{00}(c_1, c_2; G, R) = \pm \frac{u_{11} - u_{12}}{|u_{11} + u_{12}|}$. При $R \rightarrow \infty$, пам'ятаючи про (32), з (36) отримуємо $\lim_{R \rightarrow \infty} v_{11}(G, R) = 0$. Як результат, клас 2×2 -ігор із симетричною матрицею (6) без сідлової точки при $R \rightarrow \infty$ дає

$$V(c_1, c_2; G, R) = \begin{bmatrix} 0 & v_{10}(c_2; G, R) \\ v_{01}(c_1; G, R) & \pm \frac{u_{11} - u_{12}}{|u_{11} + u_{12}|} \end{bmatrix}. \quad (64)$$

Висновки

На основі введення поняття тактики перебору чистих стратегій виведено формули для знаходження нормованих усереднених по R

реалізаціях середніх вииграшів першого гравця в G партіях ігор. Здійснено перехід до нової матричної 2×2 -гри з платіжною матрицею, елементами якої є ці нормовані усереднені виграші. Якщо нова матрична 2×2 -гра має розв'язок у чистих стратегіях, що є незмінним для будь-якої пари ТПЧС гравців при фіксованому G , то вихідна гра буде розв'язаною щодо оптимальної послідовності вибору чистих стратегій гравцями за скінченне число партій гри G з метою отримання якнайбільшого виграшу. Звичайно, така оптимальна послідовність або, власне, ТПЧС може бути і стохастичною. А крім того, розв'язок нової матричної 2×2 -гри може залежати як від G , так і від номерів ТПЧС. В ідеальному плануванні дослідження цієї залежності необхідно проводити нескінченну кількість реалізацій R або доводити необхідні теореми в припущенні, що $R \rightarrow \infty$.

Розглянуті в статті задачі є предметом подальших практичних і теоретичних досліджень способів реалізації відомого принципу оптимальності в змішаних стратегіях для матричної 2×2 -гри із скінченим числом партій гри.

В. В. Романюк

ТАКТИКА ПЕРЕБОРА ЧИСТЫХ СТРАТЕГИЙ КАК ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ОСНОВА ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЯ ЭФФЕКТИВНОСТИ РАЗЛИЧНЫХ СПОСОБОВ РЕАЛИЗАЦИИ ОПТИМАЛЬНЫХ СМЕШАННЫХ СТРАТЕГИЙ

Введено понятие тактики перебора чистых стратегий как теоретической основы для исследования различных способов реализации оптимальных смешанных стратегий в матричной 2×2 -игре с конечным количеством партий игры, а также формулы для нахождения нормированных усредненных по некоторому количеству реализаций средних выигрышей первого игрока за фиксированное число партий игры. Осуществлен переход к новой матричной 2×2 -игре с платежной матрицей, элементами которой являются найденные нормированные усредненные выигрыши. По решению данной новой игры в чистых стратегиях, если такое решение существует, можно определять оптимальное поведение игроков в исходной игре с конечным количеством партий игры.

V.V. Romanuke

THE TACTICS OF THE PURE STRATEGIES SELECTING AS A THEORETIC GROUNDWORK FOR INVESTIGATING THE EFFICIENCY OF DIVERSE WAYS OF THE OPTIMAL MIXED STRATEGIES REALIZATION

This study presents the concept of the pure strategies selecting tactics as a theoretic groundwork for investigating the diverse ways of the optimal mixed strategies realization in the matrix 2×2 -game with the finite game plays quantity. Furthermore, some formulas for determining the normed average using a definite quantity of the first player's mean payoffs for the fixed number of the game plays are obtained. Also, the conversion to the new matrix 2×2 -game with the payoff matrix, comprising the detected normed average payoffs, is performed here. Experimental results obtained demonstrate the promise of the solution of the presented new game in pure strategies and detection of the players' optimal behaviour in the initial game with the finite game plays quantity.

1. *Романюк В.В.* Про порядок перебору чистих стратегій в одній матричній грі без сідлової точки для реалізації оптимальних змішаних стратегій // Матер. II Междунар. науч.-практ. конф. "Ключевые аспекты научной деятельности – 2007". Том 7. Естественные науки. – Днепропетровск: Наука и образование, 2007. – С. 12–14.
2. *Романюк В.В.* Моделивання реалізації оптимальних змішаних стратегій в антагоністичній грі з двома чистими стратегіями в кожного з гравців // Наукові вісті НТУУ "КПІ". – 2007. – № 3. – С. 74–77.
3. *Воробьев Н.Н.* Теория игр для экономистов-кибернетиков. – М.: Наука, Главная редакция физ.-мат. лит.-ры, 1985. – 272 с.
4. *Romanuke V.V.* The principle of optimality problem in the elementary matrix game with the finite number of plays // Вісник Хмельницького нац. ун-ту. Технічні науки. – 2007. – № 1. – С. 226–230.
5. *Романюк В.В.* Формулювання одного з принципів оптимальності в елементарній антагоністичній грі без сідлової точки при неповній реалізації оптимальних змішаних стратегій // Там же. – № 2. – С. 218–222.

Рекомендована Радою
Навчально-наукового комплексу
"Інститут прикладного системного
аналізу" НТУУ "КПІ"

Надійшла до редакції
8 жовтня 2007 року

МАТЕРІАЛОЗНАВСТВО ТА МАШИНОБУДУВАННЯ

УДК 666.3; 666.4; 666.7

С.М. Коноплюк

КОМПОЗИТИ НА ОСНОВІ Ti_3SiC_2 З ПОКРАЩЕНИМИ МЕХАНІЧНИМИ ВЛАСТИВОСТЯМИ

Вступ

Карбосиліцид титану Ti_3SiC_2 є унікальним матеріалом, який поєднує властивості кераміки і металу і може використовуватися в тріщиностійких конструкційних елементах високотемпературних печей, високотемпературних нагрівальних елементах, двигунах внутрішнього згорання автомобілів та літаків. До його характерних властивостей належать висока електрична, термічна провідність, модуль Юнга (~ 300 ГПа), незначна твердість, ~ 4 ГПа [1, 2], тріщиностійкість, здатність до пластичної деформації при високих температурах (аж до 1300 °С), з одного боку, і висока температура плавлення, стійкість до окислення у високотемпературних агресивних середовищах, з іншого боку. Частина цих властивостей реалізується завдяки шаруватій структурі карбіду. Особливо це стосується нетипової для кераміки тріщиностійкості, яка, як показано в багатьох дослідженнях, забезпечується поєднанням кількох енергоабсорбуючих механізмів деформації зерен, а саме розшарування по базисних площинах, прогину і випучування окремих зерен та виходу зерен назовні [3].

Постановка задачі

Оскільки область існування Ti_3SiC_2 є дуже вузькою на фазовій діаграмі системи $Ti-Si-C$, то при синтезі сполуки практично завжди утворюються вторинні фази TiC , SiC або Ti_5Si_3 , які істотно погіршують її згадані властивості. Особливо це стосується різкого зростання твердості зразка, що унеможлиблює його обробку інструментами із звичайної інструментальної сталі. Саме тому значна увага в дослідженнях приділяється пошуку оптимальних за чистотою кінцевого продукту як способів отримання Ti_3SiC_2 , так і складу порошоків, які використовуються для синтезу. Однак до цього часу не робилося спроб зберегти у синтезованому композиті низьку твердість і високу міцність, не приділяючи уваги кількості вторинної фази. У

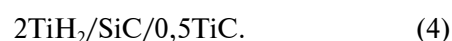
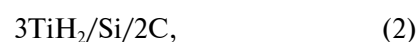
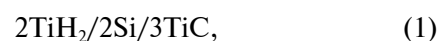
поданій статті робиться спроба обійти складні і дорогі методи синтезу чистого Ti_3SiC_2 без погіршення міцності і обробки отриманого матеріалу механічним способом.

Методика проведення експерименту

Для спікання порошоків використовувався один із найбільш оптимальних методів за швидкістю синтезу і енергозатрат – метод імпульсного розрядного спікання. В реакціях синтезу Ti_3SiC_2 переважно застосовується п'ять сумішей порошоків. У більшості з них використовується як один із компонентів титан. У даній статті титан замінено на значно дешевший гідрид титану TiH_2 . Оскільки TiH_2 відомий як речовина, яку додають при спіканні порошоків для прискорення процесу реакції і покращення пористості матеріалу [4], то слід очікувати, що фазовий склад синтезованого композиту значно зміниться.

Попередньо кілька реакцій між порошками проводилось у вакуумній печі. Після рентгенодифракційного дослідження отриманих сполук було відібрано ту, що має найвищий вміст Ti_3SiC_2 і, плавно міняючи склад її вихідної суміші, приготовлено кілька інших сумішей для подальшого синтезу за методом імпульсного розрядного спікання.

Хоч теоретично для приготування Ti_3SiC_2 необхідно, щоб порошки в суміші були в стехіометричній пропорції $3Ti/Si/2C$, але на практиці це не так. Згідно з [5, 6], найвищий процентний вміст Ti_3SiC_2 було отримано в зразках, синтезованих із суміші $Ti/Si/1.5TiC$ в температурному інтервалі 1200–1300 °С. Виходячи з цих даних готувались такі композиції порошоків:



Перемішування порошоків проводилось механічним способом у ступці з додаванням пропанолу протягом трьох годин. Середній розмір частинок і чистота порошоків становили відповідно 1 мкм і 99,9 % – для TiC , 1 мкм і 99 % – для SiC , 5 мкм і 99,9 % – для Si , 5 мкм і 99 % – для C , 5 мкм і 97,9 % – для TiH_2 . Після перемішування суміші витримувались у вакуумній

печі при різних температурах в інтервалі 1200–1500 °С протягом трьох годин. Тиск у печі підтримувався нижче 10^{-2} Па. Для спікання суміші з вихідних порошків були укладені в графітові пресформи діаметром 30 і 50 мм. При спіканні порошки витримувались 15 хв під тиском 50 МПа і температурі 1300 °С. Для визначення фазового складу зразків застосовувались рентгенівський дифрактометр з $\text{CuK}\alpha$ -випромінюванням (30 кВ, 40 мА) і скануючий електронний мікроскоп (СЕМ) з енергодисперсним спектрометром. Твердість за Віккерсом була виміряна при навантаженні 98 Н. Межі міцності на прогин і при стисненні вимірювались на зразках розміром $35 \times 2 \times 2$ мм і $6 \times 3 \times 3$ мм, відповідно. Густина зразків була визначена за методом Архімеда. Всі вимірювання проводились при кімнатній температурі.

Експериментальна частина і обґрунтування отриманих результатів

Дифрактограми, показані на рис. 1, а, б і в, демонструють незначну кількість Ti_3SiC_2 в сумішах після термообробки. Більше того, на противагу $2\text{Ti}/2\text{Si}/3\text{TiC}$ [7] у суміші, отриманій термообробкою з $2\text{TiH}_2/2\text{Si}/3\text{TiC}$ (1) міститься лише TiC і Ti_5Si_3 . Такі результати свідчать про те, що механізм реакцій змінився після заміни Ti на TiH_2 . Для пояснення цього треба зауважити, що в деяких публікаціях [8–10] наголошується на необхідності для синтезу Ti_3SiC_2 існування рідкого Si при температурі реакції. У випадку порошків (1), (2), (3), на відміну від титану TiH_2 як каталізатор прискорює реакцію. В результаті, ще при нагріванні весь кремній і

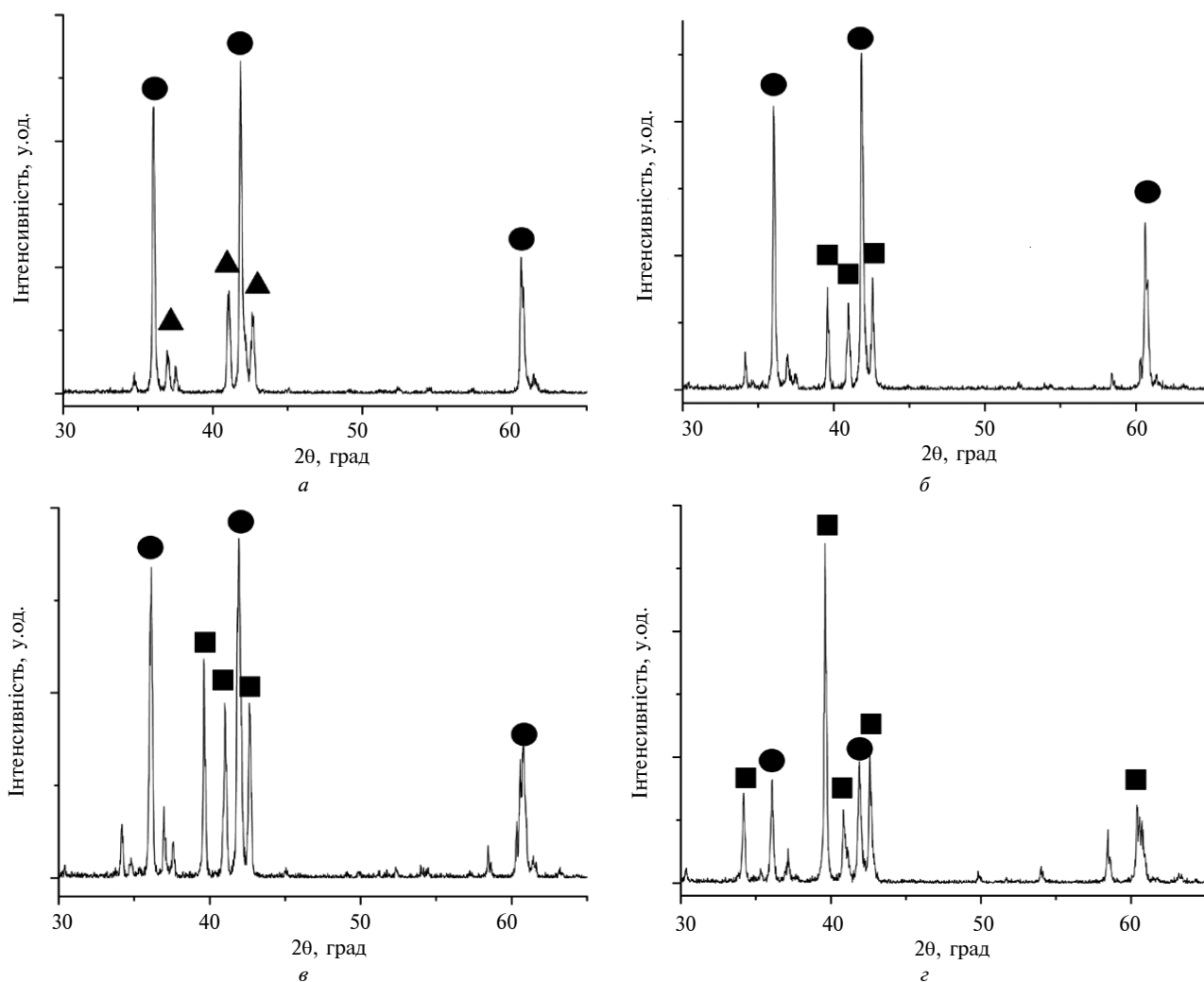


Рис. 1. Рентгенівські дифрактограми порошків після термічної обробки: а – $2\text{TiH}_2/2\text{Si}/3\text{TiC}$; б – $3\text{TiH}_2/\text{Si}/2\text{C}$; в – $3\text{TiH}_2/\text{SiC}/\text{C}$; г – $2\text{TiH}_2/\text{SiC}/0,5\text{TiC}$; ● – TiC ; ■ – Ti_3SiC_2 ; ▲ – Ti_5Si_3

вуглець реагують з TiH_2 , формуючи Ti_5Si_3 і TiC , через що реакція при температурі синтезу відбувається за відсутності Si , що і веде до низького вмісту Ti_3SiC_2 в кінцевому продукті. Водночас, оскільки при нагріванні карбіди не так активно реагують між собою, як одноелементні порошки, то суміш (4) після термообробки містить значно більше Ti_3SiC_2 (рис. 1, *з*), ніж суміші (1), (2), (3). Саме тому для подальшого спікання було використано порошки TiH_2 , SiC і TiC , змішані в молярній пропорції $2\text{TiH}_2/\text{SiC}/0,5\text{--}1\text{TiC}$.

Шарувата структура, яка спостерігається в Ti_3SiC_2 , являє собою дві тетрадральні комірки Ti_6C , відділені від суміжних комірок шаром Si . Утворення такої структури може відбуватися внаслідок реакції $\text{SiC} + \text{Ti} \rightarrow \text{Si} + \text{TiC}$, а для підтримання достатньої кількості кремнію, що

може зменшуватися через випаровування, у вихідній суміші необхідний деякий надлишок SiC порівняно з тим, що є при стехіометричному співвідношенні компонентів $2\text{TiH}_2/\text{SiC}/\text{TiC}$. Слід зауважити, що в більшості композицій, поданих у табл. 1, молярне співвідношення TiH_2/SiC дорівнює двом. Така пропорція при різному вмісті TiC допомагає прояснити роль TiC у процесі спікання. Ще три зразки 6THSCTC, 7THSCTC і 8THSCTC було приготовлено для визначення впливу співвідношення TiH_2/SiC на склад і фізичні характеристики синтезованого композиту.

На рис. 2 показано дифрактограми зразків 1THSCTC, 2THSCTC, 4THSCTC і 7THSCTC після спікання. Всі вони свідчать про наявність тільки двох фаз: TiC і Ti_3SiC_2 . Інтенсивність піків Ti_3SiC_2 , як і їх відношення до інтенсивнос-

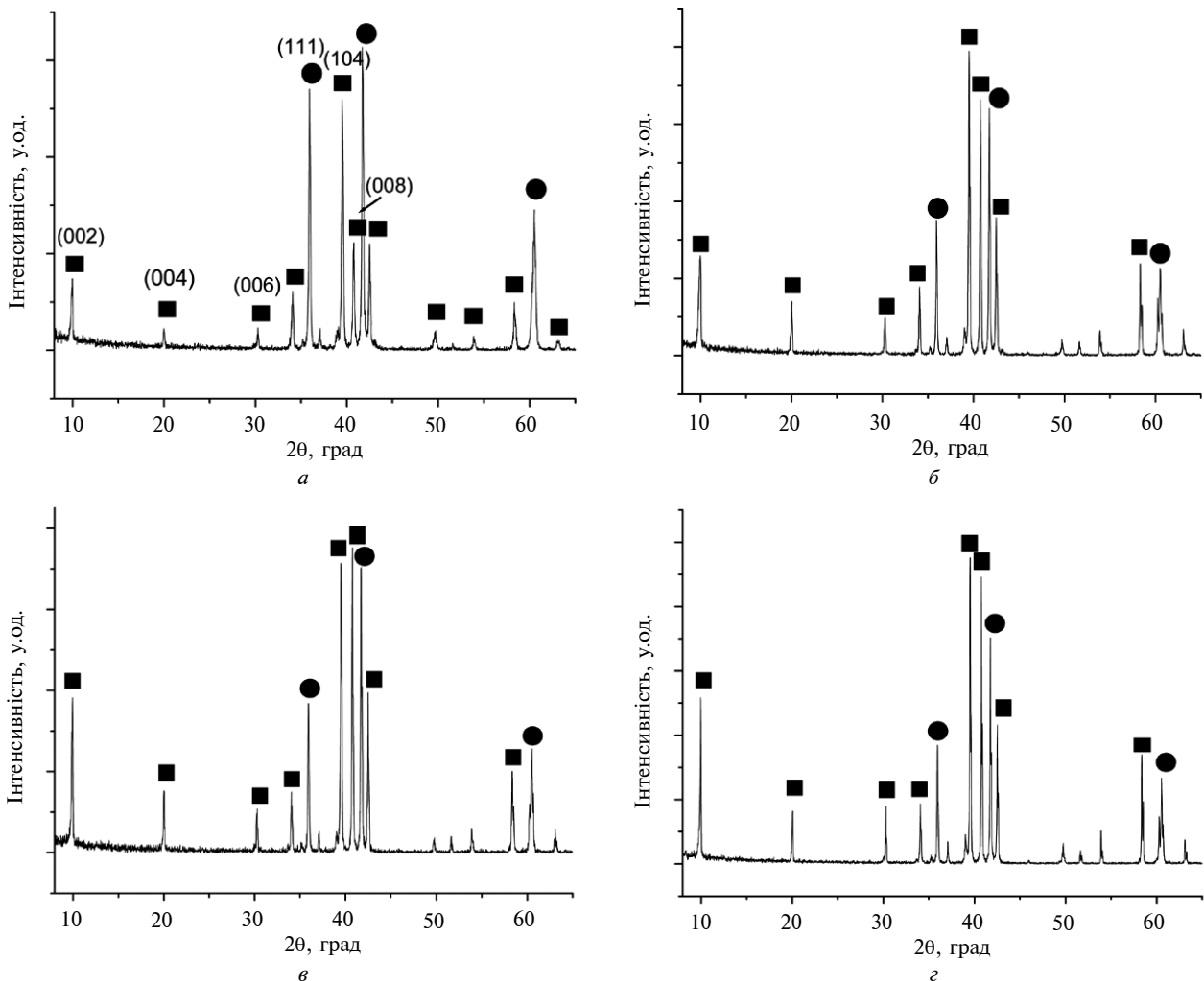


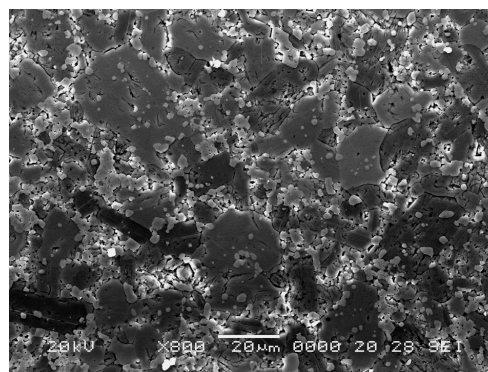
Рис. 2. Рентгенівські дифрактограми синтезованих зразків: *a* – 1THSCTC; *б* – 2THSCTC; *в* – 4THSCTC; *г* – 7THSCTC;
 ● – TiC ; ■ – Ti_3SiC_2

Таблиця 1. Склади вихідних порошків для синтезу композитів

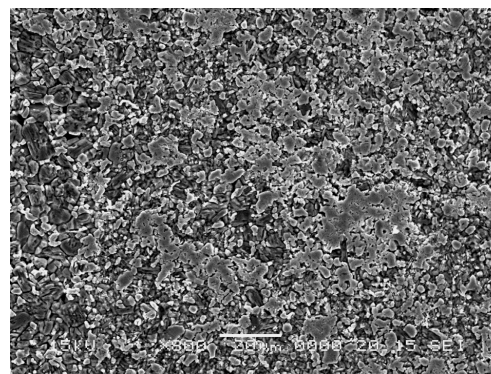
| Зразок | Молярне співвідношення вихідних порошків | | |
|---------|--|------|------|
| | TiH ₂ | SiC | TiC |
| 1THSCTC | 2 | 1 | 1 |
| 2THSCTC | 2 | 1 | 0,75 |
| 3THSCTC | 2 | 1 | 0,7 |
| 4THSCTC | 2 | 1 | 0,65 |
| 5THSCTC | 2 | 1.15 | 0,65 |
| 6THSCTC | 2 | 0.9 | 0,6 |
| 7THSCTC | 2 | 1 | 0,6 |
| 8THSCTC | 2 | 1.15 | 0,6 |
| 9THSCTC | 2 | 1 | 0,5 |

тей піків TiC, змінюється залежно від складу суміші, з якої зразок синтезований. Дифрактограма зразка 1THSCTC, синтезованого з порошків змішаних у стехіометричній пропорції (рис. 2, *a*), показує, що (104) є найбільш інтенсивним піком Ti₃SiC₂, в кілька разів перевищуючи за інтенсивністю (008), тоді як в інших композитах (рис. 2, *б, в, г*) ці два піки приблизно однакові. Порівняно висока інтенсивність (008) свідчить про наявність текстури типу (001) в Ti₃SiC₂-фазі зразків 2THSCTC, 4THSCTC і 7THSCTC. У статтях [11, 12] показано, що така текстура може утворюватися під впливом навантаження, яке прикладається для компактування зразка під час синтезу і внаслідок якого базисна площина (001) повертається перпендикулярно до напрямку стискування. Порівнюючи отримані дифрактограми з тими, які дали зразки, синтезовані з сумішей, де замість TiH₂ використовувався Ti, можна стверджувати, що заміна Ti на TiH₂ сприяє росту орієнтованих зерен у зразках, для синтезу яких використовувалися суміші з заниженим вмістом TiC.

На знімках, зроблених за допомогою СЕМ (рис. 3), показано типові мікроструктури в зразку, де переважає Ti₃SiC₂-фаза (*a*) і в зразку, де переважає TiC-фаза (*б*). На мікрознімках чітко видно темні і темно-сірі ділянки, які є зернами Ti₃SiC₂, та світлі, що належать TiC зернам. Як видно з рис. 3, *a*, зерна TiC порівняно невеликі і знаходяться по межах Ti₃SiC₂-зерен. Зерна Ti₃SiC₂ у зразку 2THSCTC більші, ніж у 1THSCTC: їх розміри варіюють від 3 до 40 мкм. У зразку 1THSCTC їх ріст подавлений великою кількістю TiC-фази, а розміри не перевищують 10 мкм.



a



б

Рис. 3. Мікрознімки зразків: *a* – 2THSCTC; *б* – 1THSCTC зроблені за допомогою СЕМ

Фазовий склад зразків був визначений із співвідношення площ ділянок, які вони займали (табл. 2). У зразках, синтезованих з порошків, в яких молярне співвідношення TiH₂/SiC дорівнює двом (крім 1THSCTC), об'ємна частка Ti₃SiC₂ становить 65–80 об. %. З цих результатів випливає, що співвідношення TiH₂/SiC у суміші вихідних порошків має істотний вплив на склад композиту. Так, порівняння зразків 2THSCTC і 9THSCTC, де вміст TiC у вихідних сумішах різниться в півтора рази, показує, що після спікання обидва зразки мають приблизно однакове співвідношення об'ємів фаз. З другого боку, про високу чутливість фазового складу композиту до величини TiH₂/SiC свідчить різний вміст TiC-фази у зразках 7THSCTC і 8THSCTC, а також 4THSCTC і 5THSCTC. Зразки в цих парах синтезовані з порошків з однаковим співвідношенням TiH₂/TiC, але з різним TiH₂/SiC, причому незначне відхилення від величини 2TiH₂/SiC викликало зростання вмісту TiC на 35 і 20 об. % відповідно у 8THSCTC і 5THSCTC.

Таблиця 2. Властивості досліджуваних композитів

| Зразки | Вміст наявних фаз, об.% | | | Фактична густина, кг/м ³ | Теоретична густина, кг/м ³ | Твердість за Віккерсом, ГПа | Межа міцності на прогин, МПа | Межа міцності на стиснення, МПа |
|---------|----------------------------------|-----|-----|-------------------------------------|---------------------------------------|-----------------------------|------------------------------|---------------------------------|
| | Ti ₃ SiC ₂ | TiC | SiC | | | | | |
| 1THSCTC | 34 | 65 | < 1 | 4630 | 4780 | 9,77 | | |
| 2THSCTC | 80 | 20 | | 4600 | 4610 | 5,13 | | |
| 3THSCTC | 67 | 33 | | 4610 | 4650 | 4,77 | 553 | 1540 |
| 4THSCTC | 64 | 36 | | 4610 | 4660 | 4,15 | | |
| 5THSCTC | 45 | 54 | 1 | 4610 | 4730 | 9,07 | | |
| 6THSCTC | 65 | 35 | | 4570 | 4660 | 5,92 | | |
| 7THSCTC | 77 | 23 | | 4,570 | 4610 | 4,05 | 417 | |
| 8THSCTC | 42 | 58 | | 4,720 | 4750 | 6,2 | | |
| 9THSCTC | 63 | 37 | | 4,590 | 4670 | 5,85 | 440 | 1500 |

Механічні властивості зразків, наведені в табл. 2, свідчать про здатність композитів до значних деформацій без розриву. Межа міцності на прогин перевищує аналогічний показник для Ti₃SiC₂ (крім зразків з дрібнозернистою структурою) завдяки зміцненню TiC-фазою. Межа міцності на стиснення є найвищою серед Ti₃SiC₂ композитів [13, 14, 15], причому твердість за Віккерсом знаходиться в межах 4–6 ГПа. І хоч в деяких зразках, в яких міститься більше 40 об.% карбиду титану, твердість і перевищує ці показники, але в цілому здатність до обробки зразків механічним способом є найкращою серед матеріалів, що мають приблизно однаковий вміст Ti₃SiC₂ [2, 14, 16]. Більше того, у статті [17] вказується, що твердість 4–6 ГПа властива Ti₃SiC₂-композитам, які майже не мають вторинної фази.

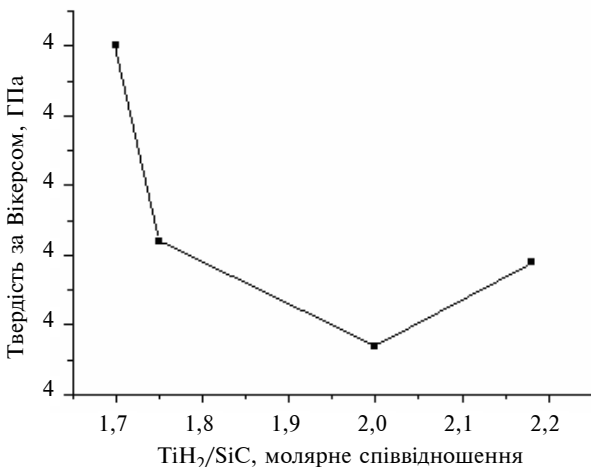


Рис. 4. Взаємозв'язок між молярним співвідношенням TiH₂/SiC у вихідних сумішах і твердістю за Віккерсом синтезованих з них зразків

На рис. 4 показано залежність твердості зразків від молярного співвідношення порошків TiH₂ і TiC в суміші, з якої зразки спікались. Очевидно, що вміст цих компонент у суміші впливає на кількість TiC-фази у синтезованому зразку, що, в свою чергу, визначає його твердість.

У науковій літературі [3, 12] можна знайти пояснення такому незвичному поєднанню високих величин міцності і відносно низької твердості. Там показано, що механізм, який забезпечує низьку твердість Ti₃SiC₂, полягає у відокремленні у відповідь на навантаження поверхневих шарів по площинах, паралельних поверхні зразка, з утворенням перегинів на дислокаціях. Схематично це показано на рис. 5. Оскільки у більшості зразків, які досліджувалися в даній статті, Ti₃SiC₂-фаза є домінуючою, то можна припустити, що цей механізм реалізується і в нашому випадку. І дійсно, як було показано вище за допомогою рентгенодифракційних вимірювань, в Ti₃SiC₂-фазі зразка з порівняно невисоким значенням твердості спостерігається текстура, при якій базисні площини типу (001) є паралельними поверхні зразка. При проникненні інструмента або індентора у товщу зразка вздовж цих площин розвиваються напруги зсуву, які ведуть до розшарування зразка в місцях проникнення. Оскільки такий механізм деформації реалізується без тріщиноутворення, то це водночас забезпечує високу міцність матеріалу.

Раніше [16] гідрид титану TiH₂ використовувався тільки як сировина, з якої після довготривалої дегідрогенізації (близько 6 год), отримувался титан для подальшого синтезу. І це ро-

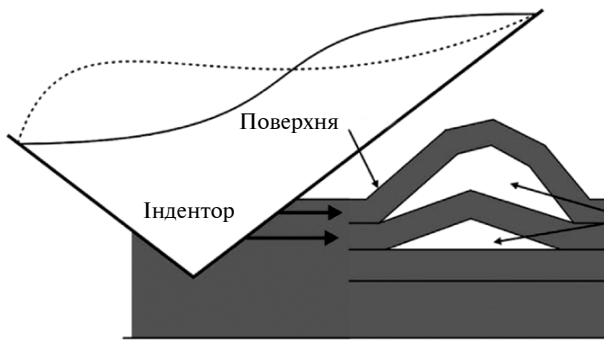


Рис. 5. Розшарування на поверхні Ti_3SiC_2 з базисною площиною, паралельною поверхні з утворенням переміщень на дислокаціях [3]

билося для запобігання утворенню пор у зразку при виділенні водню ($\sim 750\text{ }^\circ\text{C}$). У нашому ж дослідженні з метою зменшення затрат на виробництво синтез проводився без будь-якої дегідрогенізації тривалістю лише 15 хвилин. Хоч на мікрознімках (див. рис. 3) нема пор, які виходять на поверхню, однак, щоб переконатися в цьому, було проведено вимірювання густини зразків за методом Архімеда. Результати підтвердили відсутність пор у матеріалах. Як видно з табл. 2, густина будь-якого із зразків перевищувала 97 % тієї величини, яка впливала з

фазового складу матеріалу і позначалась як теоретична густина.

Висновки

Композити на основі Ti_3SiC_2 , синтезовані з суміші порошків $TiH_2/SiC/TiC$ методом імпульсного розрядного спікання, продемонстрували відмінні механічні характеристики: межу міцності на прогин 400–600 МПа і межу міцності при стисненні 1500 МПа. Висока міцність забезпечувалась як великим вмістом карбиду титану – 20–35 об.%, так і енергоабсорбуючим механізмом деформації завдяки наявності в Ti_3SiC_2 -фазі текстури типу (001). Така мікроструктура реалізується при умові, що у вихідній суміші порошки TiH_2 , SiC і TiC змішані в пропорції 2/1/1–0,5, і приводить до низької твердості матеріалів – 4–6 ГПа за Вікерсом. Незвичайна комбінація високої міцності і низької твердості синтезованих зразків, недорогі вихідні матеріали і короткий час спікання показують хороші перспективи цього методу для виробництва композитів з покращеними механічними властивостями.

С.М. Коноплюк

КОМПОЗИТЫ НА ОСНОВЕ Ti_3SiC_2 С УЛУЧШЕННЫМИ МЕХАНИЧЕСКИМИ СВОЙСТВАМИ

Исследованы композиты, синтезированные на основе карбосилицида титана Ti_3SiC_2 , с помощью рентгеноструктурного анализа, сканирующей электронной микроскопии и механических тестов. Показано, что высокая прочность и низкая Твердость композитов Ti_3SiC_2/TiC обусловлены особенностями микроструктуры Ti_3SiC_2 -фазы. Установлено соответствие между молярным соотношением порошков в исходных смесях и твердостью по Виккерсу синтезированных из них образцов.

S.M. Konoplyuk

Ti_3SiC_2 – BASED COMPOSITES WITH IMPROVED MECHANICAL PROPERTIES

The paper under scrutiny studies the synthesized titanium carbosilicide Ti_3SiC_2 -based composites, employing X-ray diffractometry, scanning electron microscopy and mechanical tests. The results of the study show that high bending and compression strength as well as low hardness of Ti_3SiC_2/TiC composites are provided by the features of Ti_3SiC_2 phase microstructure. Moreover, the correlation between molar ratio of powders in starting mixtures and Vickers' hardness of synthesized specimens is made.

1. Lawn B. R., Howes V. R. Elastic Recovery at Hardness Indentations // *J. Mater. Sci.* – 1981. – **16**. – P. 2745–2752.
2. Lis J., Miyamoto Y., Pampuch R., Tanihata K. Ti_3SiC_2 -based materials prepared by HIP-SHS technique // *Mater. Lett.* – 1995. – **22**. – P. 163–168.
3. Kooi B.J., Poppen R.J., Carvalho N.J.M., De Hosson J.Th.M., Barsoum M.W. Ti_3SiC_2 : A damage tolerant ceramic studied with nanoindentations and transmission electron microscopy // *Acta Mater.* – 2003. – **51**. – P. 2859–2872.

4. *Li B.Y., Rong L.J., Li Y.Y.* The influence of addition of TiH_2 in elemental powder sintering porous Ni–Ti alloys // *Mater. Sci. Eng.* – 2000. – **A281**. – P. 169–175.
5. *Sun Z.M., Hashimoto H., Zhang Z.F., Yang S.L., Abe T.* Synthesis of a Metallic Ceramic- Ti_3SiC_2 by PDS Process and its Properties // *Mat. Res. Soc. Symp. Proc.* – 2003. – **755**. – P. 179–184.
6. *Yang S.L., Sun Z.M., Hashimoto H., Abe T.* Ti_3SiC_2 powder synthesis from Ti/Si/TiC powder mixtures // *J. Alloys Comp.* – 2003. – **358**. – P. 168–172.
7. *Yang S.L., Sun Z.M., Hashimoto H., Abe T.* Synthesis of single-phase Ti_3SiC_2 powder // *J. Eur. Ceram. Soc.* – 2003. – **23**. – P. 3147–3152.
8. *Zhu J.O., Mei B.C., Xu X.W., Liu J.* Effect of aluminum on the reaction synthesis of ternary carbide // *Scripta Mater.* – 2003. – **49**. – P. 693–697.
9. *Li S. B., Xie J. X., Zhang L. T., Cheng L.F.* Synthesis and some properties of Ti_3SiC_2 by hot pressing of titanium, silicon, and carbon powders. Part 1. Effect of starting composition on formation of Ti_3SiC_2 and observation of Ti_3SiC_2 crystal morphology // *Mat. Sci. Technol.* – 2003. – **19**, N 10. – P. 1442–1446.
10. *Zhang Z.F., Sun Z.M., Hashimoto H.* Rapid synthesis of ternary carbide Ti_3SiC_2 through pulse-discharge sintering technique // *Metall. Mater. Trans.* – 2002. – **A33**, N 11. – P. 3321–3328.
11. *Tang K., Wang C., Huang Y., Xu X.* Analysis on preferred orientation and purity estimation of Ti_3SiC_2 // *J. Alloys Comp.* – 2001. – **329**. – P. 136–141.
12. *Gao N.F., Li J.T., Zhang D., Miyamoto Y.* Rapid synthesis of dense Ti_3SiC_2 by spark plasma sintering // *J. Eur. Ceram. Soc.* – 2002. – **22**. – P. 2365–2370.
13. *Rudnik T., Lis J.* The Ti_3SiC_2 -based structural ceramics // *Arch. Metall.* – 1997. – **42**. – P. 59–66.
14. *El-Raghy T., Zavalangos A., Barsoum M.W., Kalidindi S.* Processing and Mechanical Properties of Ti_3SiC_2 : II, Effect of Grain Size and Deformation Temperature // *J. Am. Ceram. Soc.* – 1999. – **82**. – P. 2855–2860.
15. *Sun W., Dcosta D.J., Lin F., El-Raghy T.* Freeform fabrication of Ti_3SiC_2 powder-based structures. Part I. Integrated fabrication process // *J. Mater. Process. Technol.* – 2002. – **127**. – P. 343–351.
16. *Ho-Duc L.H., El-Raghy T., Barsoum M.W.* Synthesis and characterization of 0,3 V_f TiC– Ti_3SiC_2 and 0,3 V_f SiC– Ti_3SiC_2 composites // *J. Alloys Comp.* – 2003. – **350**. – P. 303–312.
17. *Gao N.F., Miyamoto Y., Zhang D.* On physical and thermochemical properties of high-purity Ti_3SiC_2 // *Mater. Lett.* – 2002. – **55**. – P. 61–66.

Рекомендована Радою
фізико-математичного факультету
НТУУ “КПІ”

Надійшла до редакції
24 січня 2008 року

УДК 669.187.56.002.2

С.В. Скрипник, Д.Ф. Чернега

ВІДНОВЛЕННЯ ШАТУНА ГАРЯЧЕШТАМПУВАЛЬНОГО ПРЕСА LZK 6500-380-960 ЕЛЕКТРОШЛАКОВИМ ЗВАРЮВАННЯМ

Вступ

Технологія виробництва масивних великогабаритних виробів із застосуванням електрошлакового зварювання є однією з найефективніших технологій. Вона дає можливість замінити литі і ковани вироби зварнолитими, зварнокованими і зварнопрокатними конструкціями і таким чином збільшити номенклатуру і об'єм продукції без розширення виробничих площ [1, 2]. Однак при ремонті масивних, із складною просторовою формою деталей унікальних машин, важких пресів, прокатного устаткування електрошлакове зварювання ще не знайшло широкого застосування через складність процесів, які супроводжують плавлення і твердіння литого металу в конкретних умовах великогабаритних конструкцій, які мають велику товщину і жорсткість.

Постановка задачі

Дана стаття присвячена вивченню можливості застосування електрошлакового зварювання для ремонту масивного (9,4 т) великогабаритного шатуна із сталі 35Л гарячештампувального преса LZK 6500-380-960 і подібних деталей на одному з машинобудівних підприємств.

Визначення можливості відновлення

Передбачалося обробку тріщини провести фрезеруванням і порожнину, що утворилася розміром 50×380×800 мм, заварити (рис. 1). На-

явність такого устаткування, як електрошлакова піч У560 на машинобудівному підприємстві дозволило встановити деталь під зварювання тільки так, щоб переріз плавильної зони визначався розмірами 50×380 мм, а висота шва – 800 мм. Сталь 35Л, в якій міститься 0,32–0,40 % вуглецю, є обмежено зварюваною. Показник еквівалента вуглецю $C_{екв}$ визначався за формулою, рекомендованою Міжнародним інститутом зварювання [3]:

$$C_{екв} = C + Mn/6 + Si/24 + Ni/10 + Cr/5 + Mo/4 + V/14.$$

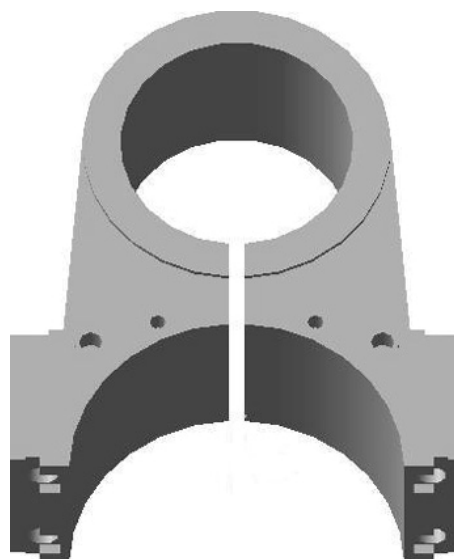


Рис. 1. Зовнішній вигляд шатуна преса з механічною обробкою тріщини, що утворилася, під зварювання

Для сталі 35Л з хімічним складом, наведеним у таблиці, $C_{екв} = 0,47$. Цей показник перевищує аналогічний показник сталі, в якій не повинні утворюватись холодні тріщини ($C_{екв} = 0,4$).

Опір сталі утворенню гарячих тріщин при електрошлаковому зварюванні можна визначити за показником К. Ітамурі [2]:

Таблиця. Хімічний склад металу

| Об'єкт дослідження | Вміст елементів, % | | | | | | | |
|---|--------------------|------|------|-------|------|------|------|------|
| | C | Si | Mn | S | P | Cr | Ni | Cu |
| Основний метал (сталь 35Л, шатун і стружка) | 0,33 | 0,35 | 0,75 | 0,04 | 0,03 | – | – | – |
| Електроди (сталь 20) | 0,18 | 0,27 | 0,52 | 0,03 | 0,03 | 0,22 | 0,21 | 0,22 |
| Метал зварного шва | 0,24 | 0,60 | 1,51 | 0,014 | 0,03 | 0,13 | 0,12 | 0,13 |

$$HCS' = C(S + P + Si/25 + Ni/100) \cdot 10^3 / [3Mn + Cr + Mo + V].$$

Для даної сталі $HCS' = 12,3$. Цей показник більше ніж в три рази перевищує показник, рекомендований для зварних швів із сталі, коли гарячі тріщини у зварних з'єднаннях не утворюються – $HCS' \leq 4$.

Таким чином, значення наведених коефіцієнтів свідчать про небезпеку виникнення в даній сталевій конструкції в процесі зварювання холодних і гарячих тріщин. До цього слід додати, що відновлювана конструкція відзначається великою товщиною і жорсткістю. Відомо, що з жорсткістю конструкції пов'язаний рівень напружень, який виникає у зварювальному з'єднанні. Через це було прийнято комплекс заходів технологічного характеру на недопущення браку. Передусім було передбачено попередній об'ємний підігрів шатуна в термічній печі до температури $723 \pm 20K$ ($450 \pm 20^\circ C$).

Процес відновлення

Для ремонту шатуна було розроблено спеціальний пристрій (рис. 2), в якому передбачалися нижня 2 і верхня 1 технологічні кишені, а також бокові стінки 3, що замикають плавильний простір. У всіх цих елементах використовувалася магnezитова цегла, що безпосередньо контактувала з рідким металом і шлаком. Сталевих приварних скоб, які, як правило, використовувались для герметизації і кріплення елементів, що утворюють плавильний простір, не було. Це дало можливість уникнути утворення таких концентраторів напружень, як мікротріщини, що утворюються при відрізанні вогнем та віддаленні скоб після електрошлакового зварювання.

Із врахуванням високої температури попереднього підігріву зварюваного шатуна елементи пристрою для зварювання виконані легко знімними з мінімальним обсягом складальних робіт. Щоб зберегти розміри шатуна в процесі обробки тріщини, зварювання і термічної обробки, вільні кінці шатуна було сполучено жорсткими металевими скобами. Для центрування порожнини шатуна щодо витратного електрода 4, закріпленого на каретці установки У560, використовувались спеціальні уловлювачі 10.

З метою розорієнтування дендритної структури і подрібнення макрозерна шва передбача-

лося використовувати в процесі електрошлакового зварювання непаковану металеву стружку основного металу, отриману після механічної обробки тріщини в шатуні. Для зменшення вигорання компонентів сталі механічна обробка заготовок проводилась без використання охолоджувальної рідини. Стружка до переплавки зберігалась у закритому приміщенні, що перешкодило її окисненню.

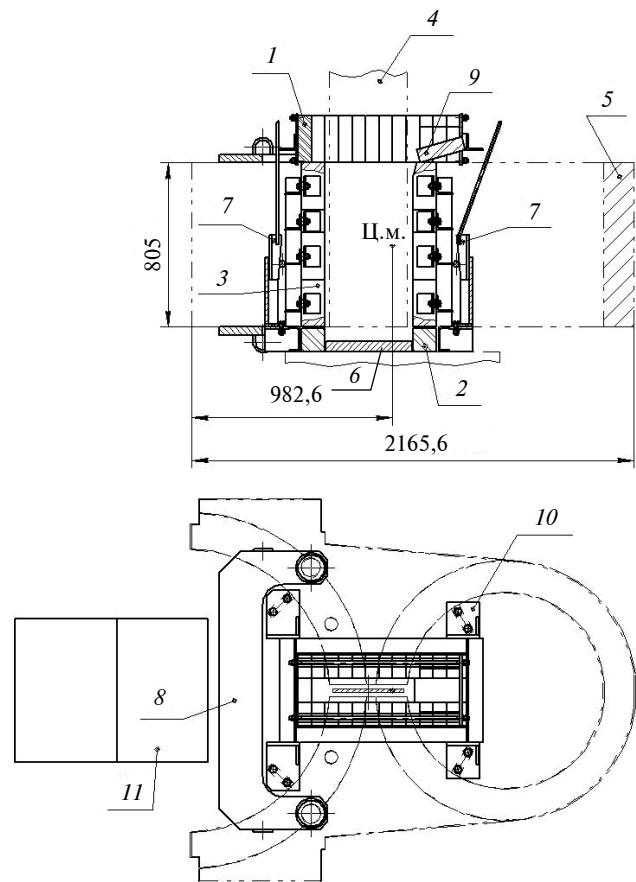


Рис. 2. Схема складання шатуна під електрошлакове зварювання: 1 – верхня вивідна кишеня; 2 – нижня вхідна кишеня; 3 – бокові футеровані стінки; 4 – витратний електрод; 5 – зварювана деталь (шатуна); 6 – затравки; 7 – притисний пристрій; 8 – скоби фіксуючі; 9 – заливна воронка; 10 – уловлювачі; 11 – установка У560

Із врахуванням великої жорсткості і товщини зварюваних кромок як витратний електрод використовувався катаний лист завтовшки 24 мм і завширшки 350 мм із пластичнішою, ніж основний метал, сталі 20. Необхідні механічні властивості металу шва забезпечувались легуванням його феросілікомарганцем марки FeMnSi18 (Mn – 60 %, Si – 20 %) до вмісту

Mn – 1,5 % [2]. Це дає можливість одночасно підвищити стійкість зварного з'єднання проти утворення гарячих (кристалізаційних) тріщин і в переходу в крихкий стан.

Для відпрацювання параметрів режимів електрошлакового зварювання, таких, як швидкість зварювання, напруга і сила струму зварювання, глибина шлакової і металевої ванн, а також визначення величини провару кромок, вивчення впливу присадки у вигляді металевої стружки на макроструктуру шва було проведено пробні заплавлення під флюсом АНФ-6 аналогічних порожнин у фізичних моделях (рис. 3). Оптимальними параметрами зварювання фізичної моделі були: струм – 3,0–3,5 кА; напруга – 45 В; швидкість зварювання – 0,6 м/г; витрата металевої стружки – 15 % від продуктивності процесу переплавлення електрода *I*. Стружка у зварний шов подавалась за допомогою електромагнітного дозатора. Глибина металевої ванни становила 35–40 мм, а шлакової – 40–50 мм. Провар основного металу в нижній частині був 5 мм, у верхній – 20 мм. Ці параметри було використано для заварювання порожнини шатуна.



Рис. 3. Зовнішній вигляд моделі після заварювання порожнини

Контроль температури підігріву деталі і зварного шва на відстані 100 мм від стику проводився контактними термометрами CENTER 307.

Результат відновлення

Хімічний склад основного металу, металу електрода і зварного шва наведено в таблиці. В металі зварного шва виявилось майже 40 % розплавленого металу шатуна. Істотно зменшився вміст сірки і підвищився вміст марганцю та кремнію.

Відомо, що марганець належить до елементів, які підвищують одночасно міцність і пластичність сталі за умови, якщо він вводиться в межах 1–2 %. Легування сталі кремнієм також підвищує граничні міцність, текучість і пропорційність.

Після завершення зварювання здійснювалась об'ємна термічна обробка всієї відновленої деталі в стаціонарній термічній печі. Оскільки деталь має великі розміри циліндричних частин (Ø960 мм і Ø1380 мм) і незамкнуту для високотемпературної термічної обробки конструкцію, то було проведено високий відпуск при температурі 923 ± 20 К (650 ± 20 °С). Після попередньої механічної обробки шатун піддавався ультразвуковому контролю. Будь-яких дефектів виявлено не було, і відновлений шатун тривалий час успішно експлуатувався на ковальсько-пресовому підприємстві.

Висновки

1. Метод електрошлакового зварювання сприяє ефективному відновлюванню важких і великогабаритних деталей ковальсько-пресового виробництва.

2. Вартість ремонту методом електрошлакового зварювання в кілька разів нижча вартості нової деталі.

3. Підібраний режим термічної обробки великогабаритного шатуна із сталі 35Л після електрошлакового зварювання – це високий відпуск при температурі 923 ± 20 К (650 ± 20 °С).

Відпрацьовані оптимальні параметри зварювання шатуна з використанням металевої стружки: швидкість зварювання – 0,6 м/год; глибина металевої ванни – 35–40 мм; шлакової – 40–50 мм; витрата металевої стружки 15 % від маси витратного електрода; струм – 3–3,5 кА; напруга 45 В.

В подальшому завдяки новому методу планується знизити обсяги закупівель нових шатунів пресів на 50 %, а також пристосувати цю технологію до ремонту шаботів та станин молотів.

С.В. Скрипник, Д.Ф. Чернега

ВОССТАНОВЛЕНИЕ ШАТУНА ГОРЯЧЕСТАМ-
ПОВОГО ПРЕССА LZK 6500-380-960 ЭЛЕКТРО-
ШЛАКОВОЙ СВАРКОЙ

Приведена технологическая схема восстановления шатуна горячештампового пресса LZK 6500-380-960 методом электрошлаковой сварки трещины, образовавшейся при эксплуатации пресса. Показана конструкция приспособления, предназначенного для электрошлаковой сварки трещины. Приведены параметры процесса.

S.V. Skrypnyk, D.F. Chernega

RENEWAL OF HOT STAMPING PRESS LZK
6500-380-960 PISTON-ROD BY ELECTROSLAG
WELDING

This paper illustrates a flowsheet of renewal of the hot stamping press LZK 6500-380-960 piston-rod, using the electroslag welding method of a crack, appeared in the process of the press operation. We also demonstrate the electroslag welding machine design and describe the process parameters.

1. *Электрошлаковая* сварка и наплавка в ремонтных работах / И.И. Сушук-Слюсаренко, И.И. Лычко, М.Г. Козулин и др. – К.: Наук. думка, 1989. – 192 с.
2. *Скрипник С.В., Чернега Д.Ф.* Применение электрошлакового процесса для ремонта подштамповых плит

ковочных молотов // Пробл. спец. электротехнологии. – 2002. – № 2. – С. 15–18.

3. *Электрошлаковая* сварка и наплавка / Под ред. Б.Е. Патона. – М.: Машиностроение, 1980. – 511 с.

Рекомендована Радою
інженерно-фізичного факультету
НТУУ “КПІ”

Надійшла до редакції
20 лютого 2008 року

ПРИЛАДОБУДУВАННЯ ТА ІНФОРМАЦІЙНО-ВИМІРЮВАЛЬНА ТЕХНІКА

УДК 681.513

О.С. Апостолук, В.О. Апостолук

ДО ПЕРЕХОДУ ВІД ДИСКРЕТНИХ ДО НЕ- ПЕРЕРВНИХ ПОЛЮСІВ ЛІНІЙНОЇ ІНВА- РІАНТНОЇ В ЧАСІ ДИНАМІЧНОЇ СИСТЕМИ ЗА МЕТОДОМ ПРОНІ

Вступ

Знаходження полюсів передавальної функції лінійної інваріантної в часі динамічної системи за її дискретним відліком, отриманим у результаті експериментального дослідження, завжди пов'язане з вибором кроку дискретності часу. При великому кроці існує загроза втрати частотної інформації, що міститься у вихідному сигналі. Якщо ж намагатися вибирати цей крок якнайменшим, то, по-перше, істотно зросте обсяг вибірки, а по-друге, збільшиться величина взаємно кореляційної похибки. Отже, є необхідність вибору оптимального кроку дискретності часу. При цьому кожна частотна складова сигналу матиме свій оптимальний крок. У випадку, коли сигнал є реакцією деякої лінійної інваріантної системи на збудження у вигляді одиничного імпульсу (імпульсної перехідної функції) або одиничної сходинки (перехідної функції), то частотне наповнення сигналу визначається полюсами передавальної функції такої системи. Знайшовши ці полюси, можна ідентифікувати передавальну функцію системи, тобто отримати її математичну модель. На жаль, методи ідентифікації таких систем є надзвичайно чутливими до шуму вимірювань, який завжди є в їх вихідних сигналах, а тому розробка методів підвищеної точності актуальна і має наукову і практичну цінність.

Заторкнута проблема зустрічається в багатьох випадках, серед яких – обробка сигналів [1], визначення параметрів радіоактивного розпаду [2], ідентифікація параметрів гнучких конструкцій [3] і біологічних систем [4] тощо. Отже, її розв'язання дає можливість більш якісно вирішувати практичні проблеми моделювання в цих галузях.

Вперше звернув увагу на проблеми, пов'язані з інтерполяцією і екстраполяцією дискретних даних за допомогою суми комплексних експонент, а отже, й з ідентифікацією неперервної системи за дискретними даними, фран-

цузький вчений Гаспар Ріш (барон де Проні) [5], вивчаючи ефекти тиску пари спирту.

Постановка задачі

Метою даної статті є вдосконалення процедури ідентифікації систем з одним входом і одним виходом (SISO-системи) за допомогою розробки в межах поліноміального підходу алгоритму підвищення точності визначення дискретних полюсів θ_i і мінімізацію похибок, пов'язаних із переходом від θ_i до неперервних полюсів μ_i .

Сортування матриці дискретних полюсів і похибок вимірювань

Розглядається лінійна інваріантна в часі динамічна SISO-система, передавальна функція якої має вигляд

$$H(s) = \frac{\sum_{i=1}^m b_i s^{m-i}}{s^m + \sum_{i=1}^m a_i s^{m-i}}. \quad (1)$$

Якщо полюси μ_i (нулі знаменника) передавальної функції різні (а досліджується саме цей випадок), то вона може бути подана у вигляді

$$H(s) = \sum_{i=1}^m \frac{r_i}{s - \mu_i}. \quad (2)$$

За нульових початкових умов і сигналу $u(t) = \delta(t)$ на вході системи ($\delta(t)$ – дельта-функція Дірака) вихідний сигнал (імпульсна перехідна функція) матиме вигляд

$$y(t) = \sum_{i=1}^m r_i \exp(\mu_i t).$$

Нехай тепер $y(t)$ реєструється через однакові проміжки часу T , тобто є відомою послідовність $\{y(n)\}$:

$$y(n) = y(nT) = \sum_{i=1}^m r_i \exp(\mu_i nT),$$

$$n = 0, 1, \dots, N-1. \quad (3)$$

Маючи цю послідовність вимірювань, слід розв'язати задачу ідентифікації, тобто визначи-

ти r_i і μ_i . Далі, згідно з (2), можна знайти передавальну функцію $H(s)$.

Звернемо увагу на те, що елементи послідовності (3) лінійно залежать від констант r_i . Отже, визначення r_i при відомих $y(n)$ і μ_i зводиться до розв'язання перевизначеної системи лінійних рівнянь. Інша, більш трудомістка частина розглядуваної задачі ідентифікації пов'язана із знаходженням μ_i -поліусів передавальної функції (1). Для її розв'язання можна використати метод Проні. Для цього позначимо $\theta_i = \exp(\mu_i T)$. Якщо θ_i ($i = 1, \dots, m$) є коренями рівняння

$$\theta^m + \alpha_1 \theta^{m-1} + \dots + \alpha_m = 0, \quad (4)$$

то, очевидно, що за будь-яких r_i елементи послідовності (3) задовольнятимуть співвідношення

$$y(m) + \alpha_1 y(m-1) + \dots + \alpha_m y(0) = 0. \quad (5)$$

Корені θ_i рівняння (4) є полюсами передавальної функції відповідної дискретної системи, тобто дискретними полюсами θ_i .

Аналогічне (5) співвідношення можна отримати і у випадку, коли за початковий береться відлік із номером v :

$$y(m+v) + \alpha_1 y(m-1+v) + \dots + \alpha_m y(v) = 0. \quad (6)$$

За допомогою останнього співвідношення можна сформулювати з елементів послідовності (3) систему лінійних рівнянь для визначення коефіцієнтів α_i (див., наприклад, [2, 3]):

$$\begin{aligned} & y(m+v) = \\ & = [y(m-1+v) \dots y(v)] [-\alpha_1 \dots -\alpha_m]', \quad (7) \\ & v = 0, 1, \dots, N-m-1. \end{aligned}$$

Таким чином, визначивши із системи (7) коефіцієнти α_i полінома (6), можна знайти θ_i -корені цього полінома і полюси μ_i :

$$\mu_i = \frac{1}{T} \ln \theta_i. \quad (8)$$

Отже, згідно з методом Проні, задача визначення полюсів передавальної функції (1) зводиться до розв'язання системи лінійних рівнянь (7), знаходження коренів полінома (4) і обчислення μ_i за формулою (8). Такий підхід

дістав у літературі назву поліноміального. Подальша задача отримання передавальної функції при відомих μ_i розв'язується за допомогою алгоритму, наведеного в [6]. Слід зауважити, що обчислювальний алгоритм визначення θ_i , побудований за таким підходом, має високу чутливість до похибок реєстрації елементів послідовності (3) [2, 7]. Крім того, істотним є збільшення похибки, зумовлене нелінійною залежністю (8) μ_i від θ_i (при переході від дискретної моделі до неперервної [7, 8]).

Більш детально механізм виникнення таких похибок при визначенні θ_i і μ_i проаналізовано у статті [9], де робиться висновок, що за фіксованої похибки визначення θ_i як при $T \rightarrow 0$, так і при $T \rightarrow \infty$ похибка визначення μ_i прямує до ∞ , тобто існує таке (оптимальне) значення T , при якому похибка визначення μ_i є мінімальною.

Для підвищення точності визначення μ_i у статті [7] було запропоновано змінити співвідношення (4)–(6) таким чином: нехай $(\theta_i)^k = \theta_{ik} = \exp(\mu_i k T)$, $k = 1, 2, \dots$ (інтервал T замінено на kT). Тоді аналогом рівняння (4), коренями якого є θ_{ik} , буде таке рівняння:

$$\theta_k^m + \alpha_{1k} \theta_k^{m-1} + \dots + \alpha_{mk} = 0. \quad (9)$$

Коефіцієнти цього полінома задовольняють співвідношення, аналогічне (5):

$$y(mk) + \alpha_{1k} y[(m-1)k] + \dots + \alpha_{mk} y(0) = 0.$$

Відповідним чином змінюються і співвідношення (7) і (8):

$$\begin{aligned} & y(mk+v) = \\ & = [y((m-1)k+v) \dots y(v)] [-\alpha_{1k} \dots -\alpha_{mk}]', \quad (10) \\ & v = 0, 1, \dots, \end{aligned}$$

$$\mu_i = \frac{1}{kT} \ln \theta_{ik}. \quad (11)$$

Як відзначено в публікаціях [2, 7, 8, 9], варіюванням параметром k у співвідношеннях (9)–(11) можна підвищити точність визначення μ_i .

Отже, подальше вдосконалення алгоритму ідентифікації має на меті підвищення точності визначення дискретних полюсів θ_i і мініміза-

цію похибок, пов'язаних із переходом від θ_i до неперервних полюсів μ_i .

За допомогою розв'язання характеристичного рівняння (9) визначаються його корені – дискретні полюси θ_i і похибки ξ_i , що відповідають полюсам μ_i неперервної системи (неперервним полюсам) [8, 10]. Ці обчислення виконуються при кожному значенні кроку дискретності часу k : від $k = 1$ (що відповідає методу Проні) до $k = k_{\max}$ із використанням стандартної функції *roots* MATLAB. Зазначимо, що ця функція “видає” корені в довільному порядку. Бажаючи зібрати в кожному стовпчику матриці дискретних полюсів всі полюси, які відповідають одному й тому ж полюсу неперервної системи, треба розв'язати задачу сортування.

Основною властивістю матриці дискретних полюсів є те, що кожний її наступний рядок можна отримати, помноживши попередній рядок на перший (яким, до речі, і обмежується метод Проні), тобто другий рядок є “квадратом” першого, третій – “кубом” першого, і, нарешті, k -й рядок – “ k -м степенем” першого. Ось чому еталон для сортування другого рядка може бути отриманий піднесенням у квадрат елементів першого рядка, для сортування третього – множенням еталонного другого рядка на перший, і так далі аж до k_{\max} -го рядка. Сортування починається з другого рядка. Елементи поточного рядка впорядковуються за еталонним із дотриманням мінімуму суми модулів різниці дійсних і уявних частин елементів, що порівнюються, вказаних рядків. Таке ж впорядкування здійснюється і в матриці похибок. В результаті цього сортування отримуємо впорядковані в зазначеному вище розумінні матрицю дискретних полюсів $[\theta]$ і матрицю похибок $[\xi]$.

Тепер залишається отримати для кожного стовпчика матриці $[\theta]$ значення полюса неперервної системи, що відповідають йому.

Перехід від дискретних полюсів до неперервних

Для такого переходу передусім визначаються найменші за стовпчиками елементи матриці похибок $[\xi]$, а номери відповідних їм рядків заносяться у вектор k_{opt} .

Розглянемо тепер, яким чином можна отримати зазначений вище полюс неперервної системи μ , маючи стовпчик дискретних полюсів θ_k ($k = 1, 2, \dots, k_{\max}$), пов'язаних з $\mu = \mu^R + j\mu^I$ ($R(\text{Re})$ – дійсний, $I(\text{Im})$ – уявний) очевидними співвідношеннями (див. рис. 1, побудований для $k = 1$):

$$\theta_k = \rho_k \exp(j\beta_k),$$

де

$$\rho_k = \exp(\mu^R kT), \quad \beta_k = \mu^I kT, \quad (12)$$

звідки

$$\mu^R = \frac{1}{kT} \ln \rho_k \quad \text{і} \quad \mu^I = \frac{1}{kT} \beta_k.$$

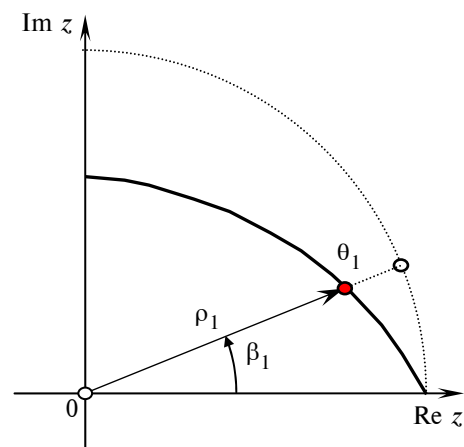


Рис. 1. Дискретний полюс θ_1 на z -площині

Зауважимо, що тут і нижче індексом i стовпчик не позначається, оскільки досліджується один довільний стовпчик.

Якщо вибрати дискретний полюс із найменшою похибкою (для якого вважаємо, що $k = k_{\text{opt}}$), то можна легко знайти дійсну частину μ_{opt}^R оптимального неперервного полюса з такого логарифмічного співвідношення:

$$\begin{aligned} \mu_{\text{opt}}^R &= \frac{1}{k_{\text{opt}} T} \ln [\text{abs}(\theta_{k_{\text{opt}}})] = \\ &= \frac{1}{2k_{\text{opt}} T} \ln [(\theta_{k_{\text{opt}}}^R)^2 + (\theta_{k_{\text{opt}}}^I)^2]. \end{aligned}$$

Що ж стосується його чисто уявної частини μ_{opt}^I , то її обчислення за формулою

$$\mu_{\text{opt}}^I = \frac{1}{k_{\text{opt}} T} \arg(\theta_{k_{\text{opt}}}) = \frac{1}{k_{\text{opt}} T} \text{Arctg}(\theta_{k_{\text{opt}}}^I / \theta_{k_{\text{opt}}}^R)$$

часто виявляється обтяжливим через неоднозначність функції Arctg. Дослідимо це питання більш детально.

Розглянемо в комплексній z -площині положення дискретних полюсів θ_k , які відповідають одному неперервному полюсу μ при $k = 1, 2, \dots, k_{\text{opt}}, \dots, k_{\text{max}}$ (рис. 2). Відзначимо наявність таких очевидних співвідношень між “абсолютними” і “відносними” кутами (β_k і $\bar{\beta}_k$, відповідно):

$$\begin{aligned} \beta_1 &= \bar{\beta}_1, \\ \beta_2 &= 2\bar{\beta}_1, \\ &\dots \\ \beta_{k_{\text{opt}}-1} &= (k_{\text{opt}} - 1)\bar{\beta}_1, \\ \beta_{k_{\text{opt}}} &= k_{\text{opt}}\bar{\beta}_1, \\ &\dots \\ \beta_{k_{\text{max}}} &= k_{\text{max}}\bar{\beta}_1; \end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} \bar{\beta}_1 &= \beta_1, \\ \bar{\beta}_2 &= \beta_2 - \beta_1 = \bar{\beta}_1, \\ \bar{\beta}_3 &= \beta_3 - \beta_2 = \bar{\beta}_1, \\ &\dots \\ \bar{\beta}_{k_{\text{opt}}-1} &= \beta_{k_{\text{opt}}-1} - \beta_{k_{\text{opt}}-2} = \bar{\beta}_1, \\ \bar{\beta}_{k_{\text{opt}}} &= \beta_{k_{\text{opt}}} - \beta_{k_{\text{opt}}-1} = \bar{\beta}_1, \\ &\dots \\ \bar{\beta}_{k_{\text{max}}} &= \beta_{k_{\text{max}}} - \beta_{k_{\text{max}}-1} = \bar{\beta}_1, \end{aligned} \quad (14)$$

які випливають із формул (12).

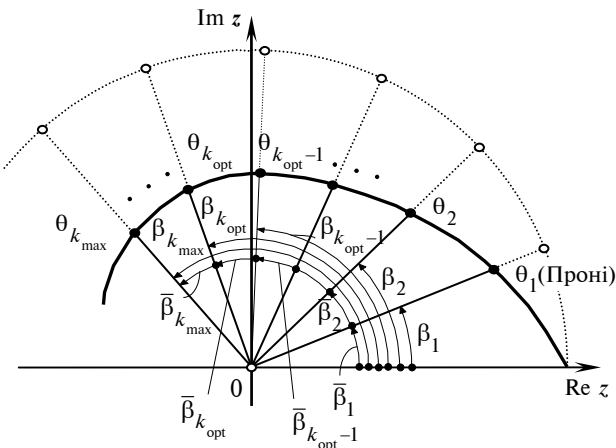


Рис. 2. Положення дискретних полюсів на комплексній площині

Із співвідношень (14) при відсутності похибок вимірювань і шуму в системі маємо

$$\bar{\beta}_1 = \bar{\beta}_2 = \dots = \bar{\beta}_{k_{\text{opt}}} = \dots = \bar{\beta}_{k_{\text{max}}} = \bar{\beta}_1.$$

Виділимо із співвідношень (13) і (14) дві формули, що визначають положення оптимального полюса:

$$\beta_{k_{\text{opt}}} = k_{\text{opt}}\bar{\beta}_1, \quad (15)$$

$$\bar{\beta}_{k_{\text{opt}}} = \beta_{k_{\text{opt}}} - \beta_{k_{\text{opt}}-1} = \bar{\beta}_1. \quad (16)$$

Порівняння двох останніх формул свідчить про те, що похибка у визначенні β_1 набагато більше впливає на $\beta_{k_{\text{opt}}}$, ніж на $\bar{\beta}_{k_{\text{opt}}}$ (у першому випадку вона збільшується в k_{opt} разів). Це підтверджує необхідність роботи з “відносними” кутами. Крім того, відомо, що головне значення функції арктангенса визначено в межах $\left(-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right)$. З цього випливає, що найменше значення кута β_k , а саме β_1 , не повинно перевищувати $\frac{\pi}{2}$, тобто

$$\beta_1 = \mu^I T < \frac{\pi}{2},$$

звідки отримуємо, що

$$\mu^I < \frac{\pi}{2T} = \frac{\omega_N}{2}, \quad (17)$$

де $\omega_N = \omega_S/2$ – частота Найквіста; ω_S – частота вибірки.

Зауважимо, що використання іншої функції арктангенса (atan2 у MATLAB) дозволяє дещо “пом’якшити” обмеження (17) до

$$\mu^I < \frac{\pi}{T} = \omega_N.$$

З проведеного аналізу стає зрозуміло, що для визначення μ^I більш прийнятно використовувати формулу (16), а не (15), тобто обчислювати μ^I за формулою

$$\mu^I = \frac{1}{T} \bar{\beta}_{k_{\text{opt}}}, \quad (18)$$

використовуючи для знаходження $\bar{\beta}_{k_{\text{opt}}}$ такий алгоритм.

1. Визначити $\bar{\beta}_1 = \beta_1 = \arctg(\theta_1^I/\theta_1^R)$.

2. "Повернути" координатні осі на кут $\bar{\beta}_1$ (див. рис. 3).

3. Користуючись матрицею напрямних косинусів між осями вихідної і оберненої систем координат, слід перепроєктувати всі наступні дискретні полюси, включаючи й оптимальний, у обернену систему координат.

4. Повторювати операції п. 1–3 для наступних кутів β_k ($k = 2, 3, \dots$) аж до отримання

$$\bar{\beta}_{k_{\text{opt}}} = \arctg(\theta_{k_{\text{opt}}}^I/\theta_{k_{\text{opt}}}^R).$$

Далі можна обчислити μ^I за формулою (18).

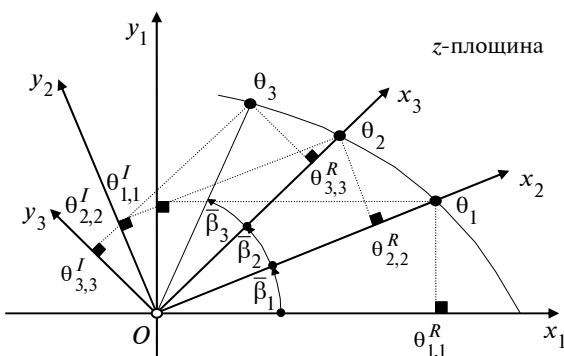


Рис. 3. До алгоритму знаходження $\bar{\alpha}_{k_{\text{opt}}}$

У випадку, наведеному на рис. 3, маємо

$$k_{\text{opt}} = 3, \quad \bar{\beta}_3 = \arctg\frac{\theta_{3,3}^I}{\theta_{3,3}^R}, \quad \mu^I = \frac{1}{T}\bar{\beta}_3.$$

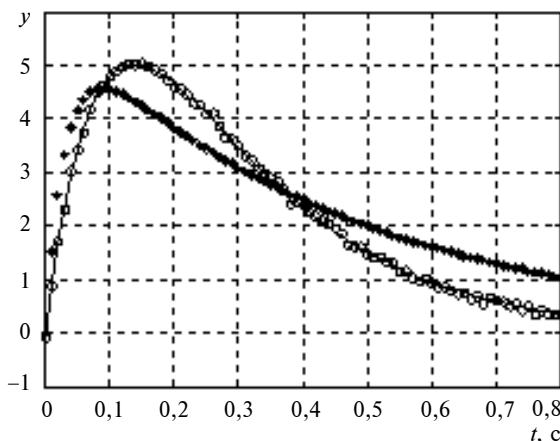


Рис. 4. Результати ідентифікації за методом Проні (одновідсотковий шум)

Цифра після коми в нижньому індексі позначення дискретного полюса означає порядковий номер системи координат.

Оскільки отримане на четвертому кроці значення $\bar{\beta}_{k_{\text{opt}}}$ залежить від попереднього неоптимального полюса $\theta_{k_{\text{opt}}-1}$ за побудовою, то слід використовувати це значення тільки для визначення "накрутки" ν , тобто складової кута, кратної 2π , за формулою $\nu = \text{round}\left(\frac{\bar{\beta}_{k_{\text{opt}}} k_{\text{opt}}}{2\pi}\right)$,

а саму шукану уявну частину μ^I неперервного полюса знаходити за співвідношенням

$$\mu^I = \frac{1}{k_{\text{opt}} T} \left[\arctg\left(\frac{\theta_{k_{\text{opt}}}^I}{\theta_{k_{\text{opt}}}^R}\right) + \nu 2\pi \right].$$

Зауважимо, що в цьому випадку для обчислення μ^I використовується тільки оптимальне значення дискретного полюса, що істотно підвищує точність його обчислення.

За даним алгоритмом автором створено відповідну програму ідентифікації лінійних інваріантних у часі динамічних систем у вигляді m -функції MATLAB.

Приклад. Розглянемо застосування наведеної методики для ідентифікації лінійної системи другого порядку із сталими коефіцієнтами і великим демпфіруванням, передавальна функція якої має вигляд $H(s) = \frac{100}{s^2 + 15s + 50}$. Імпульсну перехідну функцію цієї системи за відсутності шуму вимірювань зображено на рис. 4

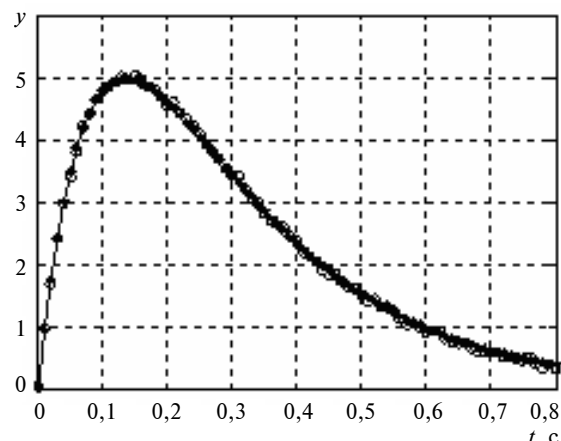


Рис. 5. Результати ідентифікації за запропонованим методом (одновідсотковий шум)

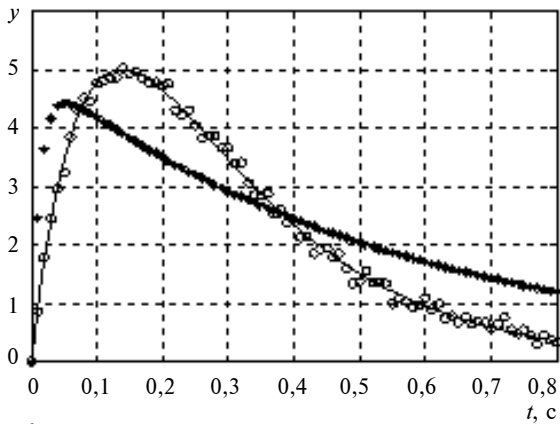


Рис. 6. Результати ідентифікації за методом Проні (двовідсотковий шум)

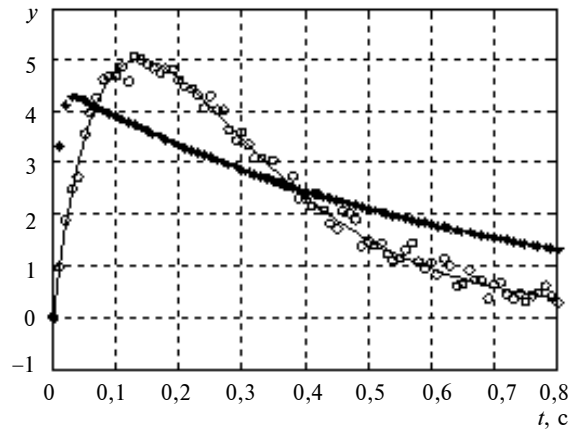


Рис. 8. Результати ідентифікації за методом Проні (тривідсотковий шум)

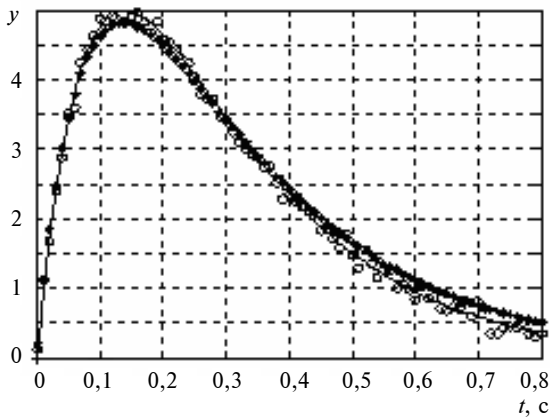


Рис. 7. Результати ідентифікації за запропонованим методом (двовідсотковий шум)

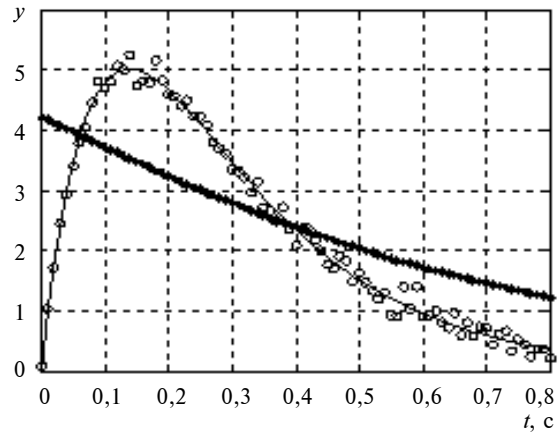


Рис. 9. Результати ідентифікації за запропонованим методом (тривідсотковий шум)

і 5 суцільною лінією ($n = 100$, $T = 0,01$ с, час спостереження $T_{\text{сп}} = 0,8$ с), а з одновідсотковим шумом – кружечками. На рис. 4 плюсики позначено результат ідентифікації за методом Проні, а на рис. 5 – за запропонованим алгоритмом.

Рис. 6 і 7 побудовані за результатами обчислень відповідно з двовідсотковим шумом, а рис. 8 і 9 – з тривідсотковим шумом.

На рис 4–9 по осі абсцис відкладається час у секундах, а по осі ординат – імпульсна перехідна функція системи. Адитивний шум формується за допомогою функції *randn* MATLAB, що видає нормально розподілені випадкові числа, які множаться на відповідний відсоток від максимального значення імпульсної перехідної функції.

Висновки

Наведені результати дають змогу зробити такі висновки щодо запропонованого покращеного методу Проні порівняно із звичайним методом:

- при відсутності шуму обидва методи дають ідеальні результати;
- при наявності одновідсоткового шуму запропонований метод добре працює на відміну від методу Проні, який за цих умов вже не працює;
- за наявності двовідсоткового шуму запропонований метод ще зберігає свою працездатність;
- якщо рівень шуму перевищує тривідсотковий рівень, то обидва методи стають непрацездатними.

Отже, запропонований метод є перспективним до застосування в зазначених у вступі галузях. Можливим напрямком подальших досліджень наведеного поліноміального методу може бути знаходження безпосереднього впли-

ву коефіцієнтів α_{ik} полінома (10) на якість апроксимації сигналу на виході системи і створення відповідних алгоритмів.

А.С. Апостолюк, В.А. Апостолюк

К ПЕРЕХОДУ ОТ ДИСКРЕТНЫХ К НЕПРЕРЫВНЫМ ПОЛЮСАМ ЛИНЕЙНОЙ ИНВАРИАНТНОЙ ВО ВРЕМЕНИ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ ПО МЕТОДУ ПРОНИ

Рассмотрена линейная инвариантная во времени динамическая система с одним входом и одним выходом, на вход которой подается единичный импульс. Процедура идентификации такой системы, в рамках полиномиального подхода по методу Прони, усовершенствуется за счет повышения точности определения дискретных полюсов системы и минимизации ошибок, связанных с переходом к соответствующим им непрерывным полюсам. Приведен пример применения разработанного алгоритма к идентификации простой динамической системы, показаны его преимущества по сравнению с методом Прони.

O.S. Apostoliuk, V.O. Apostoliuk

TO THE TRANSITION FROM DISCRETE TO CONTINUOUS POLES OF A LINEAR TIME-INVARIANT DYNAMIC SYSTEM BASED ON PRONY'S METHOD

In this paper, we examine the linear time-invariant single-input, single-output dynamic system, subjected to the unit impulse. Specifically, we take the perspective that such system identification procedure in the framework of the Prony's method polynomial approach can be improved through the increased accuracy of discrete system poles determination and errors minimization, connected with the transition to the corresponding continuous poles. Moreover, we provide the example of the algorithm application for the simple dynamic system identification and elucidate its advantages as compared to the Prony's method.

1. Кей С.М., Марпл С.Л. Современные методы спектрального анализа: Обзор // ТИИЭР. — 1981. — 69. — С. 5–51.
2. Ланцош К. Практические методы прикладного анализа. — М.: Физматгиз, 1961. — 524 с.
3. Moustafa K.A.F. Time-domain structural identification using free response measurements // Int. J. Control. — 1992. — 56, N 1. — P. 51–65.
4. Радченко И.Ф. Аппроксимация дискретной последовательности детерминированной экспоненциальной моделью // Пробл. управления и информатики. — 1994. — № 3-4. — С. 81–86.
5. Prony R. Essai experimental et analytique sur les lois de la dilatabilité des fluides élastiques et sur celles de la force expansive de la vapeur de l'eau et de la vapeur de l'alkool, a différentes températures // J. Es. Polyt. — 1795. — 1. — P. 24–73.
6. Андреев Ю.Н. Управление конечномерными линейными объектами. — М.: Наука, 1976. — 424 с.
7. Дейченко Л.В., Ларин В.Б. Про метод найменших квадратів у задачі ідентифікації вібровимірювальних систем // Автоматика. — 1977. — № 3. — С. 15–22.
8. Fassions S.D., Eman K.F., Wu S.M. Sensitivity analysis of the discrete to continuous dynamic system transformation // J. Dynamic System Measurement and Control. — 1990. — 112. — P. 1–9.
9. Ларин В.Б. Об использовании матричных пучков в задаче идентификации // Пробл. управления и информатики. — 1995. — № 3. — С. 32–41.
10. Оптимизация метода Прони при идентификации линейных динамических систем / А.С. Апостолюк, Б.Ф. Бобров, Б.А. Бордюг и др. — К., 1987. — 64 с. (Препр. /АН УССР. Ин-т математики; 87–66).

Рекомендована Радою
НАЦ критичних технологій
навігаційного приладобудування
НТУУ "КПІ"

Надійшла до редакції
4 лютого 2008 року

УДК 629.733.5

В.П. Гусинін, А.В. Гусинін

СИНТЕЗ АЛГОРИТМУ ОПТИМАЛЬНОГО КЕРУВАННЯ РУХОМ АЕРОСТАТИЧНОГО ЛІТАЛЬНОГО АПАРАТА НА ЕТАПІ ЗЛЬОТУ**Вступ**

Серед найбільших проблем льотної експлуатації аеростатичного літального апарата (дирижабля) класичного типу є недостатня ефективність його керування на малих швидкостях польоту, коли аеродинамічне керування практично неефективне або недостатнє. Для вирішення цієї проблеми на дирижаблях останнього покоління почали застосовувати силові установки з вектором тяги, що відхиляється [1, 2]. При цьому керування вектором тяги здійснюється пілотом вручну. Однак відносна малість кутових швидкостей і прискорень, які розвивають дирижаблі при маневруванні, особливо на малих швидкостях польоту, мала інерційність аеростатичних літальних апаратів через їх великі розміри призводить до складності співрозмірності ручного керування відхиленням вектора тяги і, як наслідок, до значних фізичних навантажень на пілота. До того ж, останнім часом до сучасних аеростатичних літальних апаратів поставлені вимоги (наприклад, екстрений виліт для проведення рятувальної операції), пов'язані з необхідністю приведення апарата при зльоті в задані термінальні умови з подальшим переходом до крейсерського польоту, що через великі розміри дирижаблів та обмеженість зльотної площадки є утрудненим при ручному керуванні [3, 4]. Це спонукає до необхідності подальшого підвищення ефективності керування, маневреності і гнучкості експлуатації, чого можливо досягти лише при автоматизації процесу керування. Особливо важливе значення це має при маневруванні апарата низько над землею.

Постановка задачі

Для забезпечення зльоту актуальним завданням є розробка алгоритмів автоматичного керування відхиленням вектора тяги аеростатичного літального апарата, що має важливе практичне значення для підвищення ефективності та безпеки експлуатації дирижаблів [5]. Саме в даній статті і розглядається синтез алгоритмів автоматичного керування дирижаблем, наведено приклад моделювання динаміки зльоту дирижабля.

Синтез алгоритму керування

Як відомо, процес зльоту дирижабля є багаторежимним і характеризується різними режимами керування вектора тяги, відхиленням аеродинамічних органів керування (кермо висоти), практично стрибкоподібною зміною маси апарата в момент скидання баласту (при необхідності) та можливою відмовою двигунів [6]. Будемо вважати, що моменти часу даних змін режимів польоту задані (наприклад, при виконанні зльоту перехід з керування вектором тяги на аеродинамічне керування здійснюється при досягненні заданої швидкості польоту). Тому весь процес зльоту дирижабля умовно розіб'ємо на r заданих часових інтервалів, всередині яких параметри апарата не мають стрибкоподібних змін і не відбувається перемикання керування:

$$T_i = t_i - t_{i-1}, \quad i = \overline{1, r}, \quad \sum_{i=1}^r T_i = T,$$

де T – час від початку зльоту до моменту набору заданої висоти. У подальшому вважатимемо, що всі ці зміни відбуваються на межах вибраних інтервалів.

У загальному випадку вихідна математична модель руху аеростатичного літального апарата може бути подана у вигляді векторного диференціального рівняння

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(t, x_i, u_i, v_i), \quad x_i(t_{i-1}) = x_i^0, \quad i = \overline{1, r}, \quad (1)$$

де $x_i = x_i(t)$ – n -вимірний вектор стану; $u_i = u_i(t)$ – m -вимірний вектор керування; $v_i = v_i(t)$ – l -вимірний вектор збурень; f_i – безперервна і безперервно диференційовна по сукупності змінних t, x_i, u_i, v_i вектор-функція узагальноючої сили; $t \in [t_{i-1}, t_i]$.

Задача термінального керування полягає в переведенні аеростатичного літального апарата із заданого початкового стану $x_1(t_0)$ в кінцевий (термінальний) стан $x_r(T)$, що визначено в момент часу $t = T$ q -вимірним ($q \leq n$) векторним рівнянням

$$S[x_r(T), T] = 0. \quad (2)$$

Якість процесу керування оцінюється функціоналом

$$I = G[x_r(T), T] + \sum_{i=1}^r \int_{t_0}^T \Phi_i(t, x_i, u_i, v_i) dt, \quad (3)$$

де задані функції G та Φ_i мають безперервні частинні похідні по x_i, u_i, v_i . Припустимо, що об-

меження на вектори стану і керування враховуються в процесі вибору функціонала (3).

Спряження кінцевих умов попередніх ділянок і початкових умов наступних ділянок процесу керування задається у формі заданих крайових умов:

$$\varphi_i[x_i(T_i), x_{i+1}^0; u_i(T_i), u_{i+1}^0; T_i] = 0, \quad i = \overline{1, r}. \quad (4)$$

Програмне керування $u = u(t)$, що оптимізує функціонал (3), реалізує оптимальне керування по розімкнутому контуру та гарантує виконання кінцевих умов (2) при відсутності дії збурень [5]. У реальних умовах дія зовнішнього середовища $v_i(t)$ значно впливає на динаміку руху дирижабля. З метою компенсації цих збурень синтезують закон оптимального за критерієм (3) керування із зворотним зв'язком вигляду

$$u = u(x, t). \quad (5)$$

Керування (5) використовує в кожний момент часу t інформацію про поточний стан $x(t)$, а при дії збурень забезпечує перехід дирижабля з довільного початкового стану в кінцевий (2). Синтез керування із зворотним зв'язком (5) може бути реалізований методом динамічного програмування [7]. Істотним недоліком його є проблема розмірності, яка потребує дуже великого об'єму пам'яті ЕОМ навіть для задач невеликої розмірності.

Метод синтезу термінального керування

Для синтезу алгоритму керування відхиленням вектора тяги аеростатичного літального апарата використовуємо математичний апарат диференціальних перетворень, який запропонував академік Г.Е. Пухов. Цей метод дає можливість аналізувати нелінійні системи рівнянь, не потребує числового інтегрування диференціальних рівнянь руху, виключає з розгляду функції часу, скорочує об'єм обчислень і сприяє отриманню розв'язку в аналітичному вигляді [8]. Метод диференціальних перетворень дає можливість замінити аналітичні функції $x(t)$ безперервного аргументу t їх моделями у вигляді дискретних функцій $X(k)$ цілочислового аргументу k згідно з виразом

$$\begin{aligned} \underline{x(t)} = X(k) &= \frac{h^k}{k!} \left[\frac{d^k x(t)}{dt^k} \right]_{t=0} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow x(t) &= \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{t}{h} \right)^k X(k), \end{aligned} \quad (6)$$

де $x(t)$ – оригінал, який є неперервною і обмеженою разом із всіма своїми похідними функцією аргументу t , що нескінченне число разів диференціюється; $\underline{x(t)}$ і $X(k)$ – рівноцінні позначення диференціального зображення оригіналу, що являє собою дискретну функцію цілочислового аргументу $k = 0, 1, 2, \dots$; h – масштабна стала з розмірністю аргументу t ($0 \leq t \leq h$), на якому розглядається функція $x(t)$; \Leftrightarrow – символ відповідності між оригіналом $x(t)$ і його диференціальним зображенням $X(k)$. Математичні моделі, що отримані на основі диференціальних перетворень (6), будемо називати спектральними моделями.

Синтез оптимального керування із зворотним зв'язком (5) виконаємо методом замикання оптимального програмного керування $u = u(t)$ для довільного поточного стану $x(t)$ динамічного об'єкта [9]. На першому етапі синтезу розглядатимемо незбурений рух об'єкта. Виберемо всередині кожної ділянки зльоту дирижабля програмне керування в класі аналітичних функцій $u_i = u_i(\tau, A_i)$, де $A_i = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ – вектор вільних параметрів; τ – локальний часовий аргумент. Диференціальні перетворення (6) функції $u_i = u_i(\tau, A_i)$ визначають при $h = T_i$ і $\tau = 0$ її диференціальний спектр як

$$\begin{aligned} \underline{u_i(\tau, A_i)} &= U_i(k, A_i) = \\ &= \frac{T_i^k}{k!} \left[\frac{d^k u_i(t_{i-1} + \tau, A_i)}{dt^k} \right]_{\tau=0}. \end{aligned} \quad (7)$$

Диференціальне рівняння (1) на основі перетворень (6) в області зображень подається у формі спектральної моделі:

$$\begin{aligned} X_i(k+1, A_i, X_i^0) &= \\ &= \frac{T_i}{k+1} f_i[t, X_i(k, A_i, X_i^0), U_i(k, A_i)], \end{aligned}$$

$$X_i(0) = X_i^0(A_{i-1}, A_{i-2}, \dots, A_1), \quad (8)$$

$$X_1(0) = X_1^0 = x_0,$$

$$i = \overline{1, r}.$$

За рекурентним виразом (8) і диференціальним спектром керування (7) сформуємо диференціальний спектр $X_i(k, A_i, X_i^0)$ вектора ста-

ну $x_i(t)$. Використовуємо властивість диференціальних перетворень (1), згідно з якою алгебрична сума всіх компонент (дискрет) диференціального спектра будь-якої аналітичної функції в точці $t = t_v$ дорівнює нульовій дискреті диференціального спектра функції в точці $t_{v+1} = t_v + h$ або значенню оригіналу функції в цій самій точці:

$$\sum_{k=0}^{\infty} X_v(k) = X_{v+1}(0) = x(t_v + h). \quad (9)$$

З виразу (9) при $t_v = t_{i-1}$ і $h = T_i$ визначається вектор стану наприкінці кожної ділянки етапу зльоту дирижабля:

$$x_i(T_i, A_i, x_i^0) = \sum_{k=0}^{\infty} X_i(k, A_i, X_i^0), \quad i = \overline{1, r}. \quad (10)$$

Тоді рівняння кінцевого стану (2) із врахуванням виразу (10) перетворюється в таке:

$$S[A_1, A_2, \dots, A_r] = 0. \quad (11)$$

Дана гранична умова в неявній формі визначає q компонент вектора вільних параметрів A_i i -ї ділянки зльоту у вигляді функцій від T_i і x_i^0 .

Компоненти векторів вільних параметрів, що залишилися, визначаємо з умов оптимальності функціонала (3), який за допомогою диференціальних перетворень (1) і з врахуванням диференціальних спектрів (7) і (8) записується у вигляді

$$I[A_1, A_2, \dots, A_r] = G[A_1, A_2, \dots, A_r] + \sum_{i=1}^r T_i \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Phi_i[t, X_i(k, A_i, X_i^0), U_i(k, A_i)]}{k+1}. \quad (12)$$

З необхідних умов оптимальності функції (12) отримуємо систему рівнянь для визначення $(n-q)r$ невідомих компонент векторів вільних параметрів A_1, A_2, \dots, A_r , що залишилися:

$$\frac{\partial I(A_1, A_2, \dots, A_r)}{\partial a_{ij}} = 0, \quad i = \overline{1, r}; \quad j = \overline{q+1, n}. \quad (13)$$

Система нелінійних рівнянь (11) і (13) в неявній формі визначає компоненти вектора вільних параметрів $A = (A_1, A_2, \dots, A_r)$ як функції від вектора довільного початкового стану $x_0 = x_i(t_0)$.

В результаті виконання першого етапу синтезу в неявній формі встановлюється нелінійний зв'язок оптимального програмного керування $u[t, A(T, x_0)]$ з вектором початкового стану x_0 , мо-

менту часу t_0 та інтервалу T . Це керування не можна застосовувати на всьому інтервалі часу T у випадку дії збурень на динамічний об'єкт. Керування $u[t, A(T, x_0)]$ можна використовувати для керування динамічним об'єктом у початковий момент часу t_0 .

На другому етапі синтезу розглядається збурений рух дирижабля. У цьому випадку керування $u[t, A(T, x)]$ обчислюється із системи рівнянь (11) і (13) для поточних значень часу t і стану $x(t)$. Таким чином, безперервний у часі розв'язок системи рівнянь (11) і (13) дозволяє сформувати замкнений алгоритм термінального керування виду (5). При цьому в замкненому контурі керування використовується лише поточне значення керування $u[t, A(T, x)]$, яке в наступний момент часу перераховується за системою рівнянь (11) і (13). Цим забезпечується "гнучка" адаптація та оптимізація траєкторії руху дирижабля до дії невідомих збуджуючих факторів.

Синтез алгоритму оптимального керування

Застосуємо запропонований вище метод синтезу термінального керування для синтезу алгоритму керування відхиленням вектора тяги дирижабля середнього класу – прототипу "Zerrellin NT" на етапі зльоту.

Весь етап зльоту умовно розіб'ємо на дві ділянки. За першу ділянку ($i = 1$) вибираємо ділянку від початку зльоту до моменту набору висоти 15,2 м, при досягненні якої дирижабль відповідно до критеріїв льотної придатності для дирижаблів [10–12] має розвинути рекомендовану швидкість набору висоти. Друга ділянка ($i = 2$) починається з висоти 15,2 м і продовжується до висоти 50 м, при досягненні якої дирижабль має розвинути задану вертикальну швидкість. Синтез алгоритмів керування відхиленням вектора тяги на етапі зльоту виконаємо при таких допущеннях. Аналіз результатів льотних випробувань дирижабля "Skyship 500" при виконанні зльоту показав, що до досягнення безпечної висоти 15,2 м швидкість зміни кута тангажу є незначною [6]. Далі припустимо, що на другій ділянці зльоту встановлений на апараті автопілот балансує сумарний поздовжній момент апарата та підтримує практично постійною куту швидкість тангажу. За вхідні сигнали в автопілот керма висоти взято висоту польоту, швидкість зміни висоти польоту (вертикальну швидкість набору висоти), кут атаки і швидкість зміни кута атаки. Відзначимо, що для дирижабля, який розглядається, автопілот керма висоти є ефек-

тивним при швидкості польоту понад 25–30 км/год, тобто практично він підключається тільки з другої ділянки.

Таким чином, у першому наближенні при синтезі алгоритмів керування рухом дирижабля на етапі зльоту можна знехтувати обертальним рухом апарата. Отже, розглядався лише плоско-паралельний рух дирижабля у вертикальній площині, а перехресні зв'язки не враховувалися. Двигуни моделювалися у вигляді джерел сили, моделювання пілота не проводилося. Програмна зміна кута відхилення вектора тяги задавалася у вигляді лінійної функції часу $\varphi = a_0 + a_1 t$, де a_0 і a_1 – вільні параметри, які підлягають визначенню. Як показали проведені льотні випробування [5, 6], дана програма зміни кута відхилення вектора тяги в часі близька до оптимальної програми при $|\varphi| \leq 70^\circ$.

За критерій якості для кожної ділянки зльоту дирижабля візьмемо функціонал

$$I_i = V_X(T_i). \quad (14)$$

Даний критерій враховує намір максимізувати горизонтальну швидкість апарата в кінці i -ї ділянки зльоту. В загальному випадку, при виборі вигляду функціонала враховується, коли це необхідно, обмеження на вектори стану та керування. Особливо важливо враховувати ці обмеження при синтезі алгоритмів керування рухом літальних апаратів, які використовують динамічний принцип польоту, наприклад, при виведенні авіаційно-космічної системи на орбіту [9]. Для аеростатичних літальних апаратів врахування обмежень на параметри керування і руху практично не мають істотного значення, оскільки екстремальні випадки, які виникають у польоті, такі, як відмова двигунів або відмова системи автоматичного керування, не приводять до виникнення аварійних ситуацій.

Задача термінального керування рухом дирижабля полягає в переведенні апарата із заданих початкових умов

$$V_X(0) = V_{X_0}, \quad V_Y(0) = V_{Y_0}, \quad H(0) = H_0 \quad (15)$$

у задані кінцеві

$$H(T_i) = H_{T_i}, \quad V_Y(T_i) = V_{Y_{T_i}} \quad (16)$$

з досягненням в кінці i -ї ділянки зльоту максимальної горизонтальної швидкості $V_{X_{\max}}$. Тут $V_{Y_{T_i}}$ і H_{T_i} – задані вертикальна швидкість і висота польоту апарата в кінці i -ї ділянки зльоту.

Зокрема, для першої ділянки зльоту початкові та кінцеві умови мають такий вигляд:

$$V_{X_1}(\vartheta V_{X_{10}}) \approx 0, \quad V_{Y_1}(\vartheta V_{Y_{10}}) \approx 0,$$

$$H_1(0) = H_{10} \approx 0, \quad V_{X_1}(T_1) = V_{X_{1\max}},$$

$$V_{Y_1}(T_1) = V_{Y_{T_1}}, \quad H_1(T_1) = H_{1T_1} = 15,2 \text{ м.}$$

Для другої ділянки маємо

$$V_{X_2}(0) = V_{X_{1\max}}, \quad V_{Y_2}(0) = V_{Y_{T_1}},$$

$$H_2(0) = H_{20} = H_{1T_1} = 15,2 \text{ м, } V_{X_2}(T_2) = V_{X_{2\max}},$$

$$V_{Y_2}(T_2) = V_{Y_{T_2}}, \quad H_2(T_2) = H_{2T_2} = 100 \text{ м.}$$

За вихідну математичну модель беремо спрощену модель поздовжнього руху дирижабля, розглянуту в праці [5]. На базі цієї моделі розроблено спектральну модель поздовжнього руху дирижабля. У розгорнутому вигляді спектральна модель наведена в працях [5, 9, 13, 14].

Для визначення алгоритму термінального керування згідно з наведеним методом синтезу виконаємо обчислення дискрет диференціальних спектрів змінних поздовжнього руху дирижабля за спектральною моделлю

$$X(k+1) = \frac{h}{k+1} f[X(k), \underline{u}(k), \underline{t}], \quad X(0) = x_0, \quad (17)$$

послідовно задаючи цілочислові значення аргументу $k = 0, 1, 2, \dots$. У подальших дослідженнях обмежимося двома-трьома дискретами диференціальних спектрів змінних стану. Як показали проведені раніше дослідження [8], такої кількості дискрет цілком достатньо для отримання з прийнятною точністю розв'язків задач керування рухом літальних апаратів.

Виразимо дискрети диференціальних спектрів у вигляді функцій від початкових значень змінних математичної моделі (1), вільних параметрів a_0, a_1 керування кутом відхилення φ вектора тяги силової установки, що прогнозується, та тривалості i -ї ділянки зльоту T_i .

Згідно із спектральною моделлю в розгорнутому вигляді [5, 9] введемо такі позначення:

$$a_{14} P_{\Sigma_i} = \bar{P}_{\Sigma_i}, \quad a_{24} P_{\Sigma_i} = \tilde{P}_{\Sigma_i}, \quad U^{2/3} \frac{\rho}{2} = C_1,$$

$$C_1 C_y^\alpha = C_2, \quad C_1 C_{x_0} = C_3, \quad a_{14} C_3 = C_4,$$

$$a_{14} C_2 = C_5, \quad a_{24} C_3 = C_6, \quad (18)$$

$$a_{24}U = \tilde{U}, \quad a_{24}m_i = \tilde{m}_i,$$

$$a_{24}C_2 = C_7, \quad \tilde{U}(\gamma_B - \gamma_G) - \tilde{m}_i g = \tilde{\Phi}_i.$$

Для параметрів із заданими кінцевими умовами (16) із врахуванням введених позначень (18) та початкових умов (15), які є одночасно і нульовими дискретами, отримуємо такі вирази для перших дискрет:

$$V_X(1) = T_i[\bar{P}_{\Sigma_i} \cos a_0 - C_4 V_0^2], \quad (19)$$

$$V_Y(1) = T_i[\tilde{\Phi}_i + \tilde{P}_{\Sigma_i} \sin a_0], \quad (20)$$

$$H(1) = T_i V_{Y_0}. \quad (21)$$

Тут $V_0 = \sqrt{V_{X_0}^2 + V_{Y_0}^2}$ – початкова швидкість польоту.

На основі отриманої інформації про нульові і перші дискрети визначимо другі дискрети диференціальних спектрів змінних траєкторного руху дирижабля на i -й ділянці зльоту. Матимемо

$$\begin{aligned} V_X(2) = T_i^2 & \left[-\left(\frac{C_5}{2} V_{Y_0} + C_4 V_{X_0} \right) \bar{P}_{\Sigma_i} \cos a_0 + \right. \\ & + \left(\frac{C_5}{2} V_{X_0} - C_4 V_{Y_0} \right) \bar{P}_{\Sigma_i} \sin a_0 + \left(\frac{C_5}{2} V_{X_0} - C_4 V_{Y_0} \right) \tilde{\Phi}_i + \\ & \left. + \left(\frac{C_5}{2} C_4 V_{Y_0} + C_4^2 V_{X_0} \right) V_0^2 - \frac{1}{2} \bar{P}_{\Sigma_i} a_1 \sin a_0 \right], \quad (22) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V_Y(2) = T_i^2 & \left[\frac{1}{2} (C_6 + C_7) V_{Y_0} \bar{P}_{\Sigma_i} \cos a_0 - \right. \\ & - \frac{1}{2} (C_6 + C_7) V_{X_0} \bar{P}_{\Sigma_i} \sin a_0 - \frac{1}{2} (C_6 + C_7) V_{X_0} \tilde{\Phi}_i - \\ & \left. - \frac{1}{2} (C_6 + C_7) V_{Y_0} C_4 V_0^2 + \frac{1}{2} \bar{P}_{\Sigma_i} a_1 \cos a_0 \right], \quad (23) \end{aligned}$$

$$H(2) = T_i^2 \left[\frac{1}{2} \tilde{\Phi}_i + \frac{1}{2} \tilde{P}_{\Sigma_i} \sin a_0 \right]. \quad (24)$$

Підставляючи вираз (24) в рекурентний вираз (17), визначаємо третю дискрету висоти польоту дирижабля:

$$\begin{aligned} H(3) = T_i^3 & \left[\frac{1}{6} (C_6 + C_7) V_{Y_0} \bar{P}_{\Sigma_i} \cos a_0 - \right. \\ & - \frac{1}{6} (C_6 + C_7) V_{X_0} \tilde{P}_{\Sigma_i} \sin a_0 - \frac{1}{6} (C_6 + C_7) V_{X_0} \tilde{\Phi}_i - \\ & \left. - \frac{1}{6} (C_6 + C_7) V_{Y_0} C_4 V_0^2 + \frac{1}{6} \tilde{P}_{\Sigma_i} a_1 \cos a_0 \right]. \quad (25) \end{aligned}$$

Слід зазначити, що подача дискрет диференціальних спектрів у формі (19)–(25) є наближеною. Доказ обґрунтованості такої подачі наведено в праці [8].

Скористаємося тепер властивостями диференціальних перетворень (6), згідно з якими алгебрична сума всіх дискрет диференціального спектра будь-якої аналітичної функції в точці $t_0 = 0$ дорівнює значенню оригіналу функції в точці $t = T_i$ закінчення i -ї ділянки зльоту дирижабля. Підсумовуючи дискрети (15), (21), (24) і (25) диференціального спектра (17) та підставляючи отриману суму в (16) для кінцевих умов по висоті польоту, отримуємо рівняння, що пов'язує параметри керування (a_0, a_1) та параметри траєкторного руху дирижабля на першій ділянці зльоту із заданою в кінці кожної ділянки висотою H_{T_i} :

$$\begin{aligned} H(T_i) = H_0 + T_i V_{Y_0} + \frac{T_i^2}{2} & [\tilde{\Phi}_i + \tilde{P}_{\Sigma_i} \sin a_0] + \\ & + T_i^3 \left[\frac{1}{6} (C_6 + C_7) V_{Y_0} \bar{P}_{\Sigma_i} \cos a_0 - \right. \\ & - \frac{1}{6} (C_6 + C_7) V_{X_0} \tilde{P}_{\Sigma_i} \sin a_0 - \frac{1}{6} (C_6 + C_7) V_{X_0} \tilde{\Phi}_i - \\ & \left. - \frac{1}{6} (C_6 + C_7) V_{Y_0} C_4 V_0^2 + \frac{1}{6} \tilde{P}_{\Sigma_i} a_1 \cos a_0 \right] = H_{T_i}. \quad (26) \end{aligned}$$

Аналогічно, підсумовуючи дискрети (15), (20) і (23) диференціального спектра (17) та підставляючи отриману суму в (16) для кінцевих умов по вертикальній швидкості підйому дирижабля, отримуємо рівняння, що пов'язує параметри керування (a_0, a_1) і параметри траєкторного руху дирижабля на i -й ділянці зльоту із заданою в кінці ділянки вертикальною швидкістю набору висоти $V_{Y_{T_i}}$:

$$\begin{aligned} V_Y(T_i) = V_{Y_0} + T_i & [\tilde{\Phi}_i + \tilde{P}_{\Sigma_i} \sin a_0] + \\ & + T_i^2 \left[\frac{1}{2} (C_6 + C_7) V_{Y_0} \bar{P}_{\Sigma_i} \cos a_0 - \right. \\ & - \frac{1}{2} (C_6 + C_7) V_{X_0} \tilde{P}_{\Sigma_i} \sin a_0 - \frac{1}{2} (C_6 + C_7) V_{X_0} \tilde{\Phi}_i - \\ & \left. - \frac{1}{2} (C_6 + C_7) V_{Y_0} C_4 V_0^2 + \frac{1}{2} \tilde{P}_{\Sigma_i} a_1 \cos a_0 \right] = V_{Y_{T_i}}. \quad (27) \end{aligned}$$

Третє рівняння отримуємо з умов забезпечення максимальної горизонтальної швидкості апарата $V_{X_{i\max}}$ в кінці i -ї ділянки зльоту, для чого підсумуємо дискрети (15), (19) і (22) диференціального спектра (17):

$$\begin{aligned}
V_X(T_i) = & V_{X_0} + T_i[\bar{P}_{\Sigma_i} \cos a_0 - C_4 V_0^2] + \\
& + T_i^2 \left[-\left(\frac{C_5}{2} V_{Y_0} + C_4 V_{X_0}\right) \bar{P}_{\Sigma_i} \cos a_0 + \right. \\
& + \left(\frac{C_5}{2} V_{X_0} - C_4 V_{Y_0}\right) \tilde{P}_{\Sigma_i} \sin a_0 + \left(\frac{C_5}{2} V_{X_0} - C_4 V_{Y_0}\right) \tilde{\Phi}_i + \\
& + \left(\frac{C_5}{2} C_4 V_{Y_0} + C_4^2 V_{X_0}\right) V_0^2 - \\
& \left. - \frac{1}{2} \bar{P}_{\Sigma_i} a_1 \sin a_0 \right] = V_{X_{i \max}}. \quad (28)
\end{aligned}$$

Рівняння (26), (27) дозволяють отримати вільні параметри a_0 , a_1 закону керування кутом відхилення вектора тяги силової установки. Із співвідношення (27) визначимо параметр керування a_1 :

$$\begin{aligned}
a_1 = & -\frac{2}{T_i^2 \tilde{P}_{\Sigma_i} \cos a_0} \left\{ (V_{Y_0} - V_{Y_{T_i}}) + T_i [\tilde{\Phi}_i + \tilde{P}_{\Sigma_i} \sin a_0] + \right. \\
& + T_i^2 \left[\frac{1}{2} (C_6 + C_7) V_{Y_0} \bar{P}_{\Sigma_i} \cos a_0 - \right. \\
& - \frac{1}{2} (C_6 + C_7) V_{X_0} \tilde{P}_{\Sigma_i} \sin a_0 - \frac{1}{2} (C_6 + C_7) V_{X_0} \tilde{\Phi}_i - \\
& \left. \left. - \frac{1}{2} (C_6 + C_7) V_{Y_0} C_4 V_0^2 \right] \right\}. \quad (29)
\end{aligned}$$

Із врахуванням (29) з рівняння (26) знайдемо вираз для визначення в неявному вигляді початкового значення φ_{0i} кута відхилення вектора тяги при довільних початкових значеннях змінних траєкторного руху дирижабля. Отже, замінивши довільні початкові значення керування і змінних траєкторного руху їх поточними значеннями, отримаємо в неявному вигляді такий алгоритм керування кутом відхилення вектора тяги силової установки φ_i для i -ї ділянки зльоту дирижабля:

$$\tilde{P}_{\Sigma_i} \sin \varphi_i = \frac{6(H_{T_i} - H)}{T_i^2} - \frac{2(2V_Y + V_{Y_{T_i}})}{T_i} - \tilde{\Phi}_i, \quad (30)$$

де H і V_Y – поточні значення висоти польоту і вертикальної швидкості набору висоти, відповідно.

Підставивши у вираз (30) значення змінних траєкторного руху, які відповідають першій і другій ділянці зльоту, отримаємо алгоритм керування кутом відхилення вектора тяги силової установки φ_i відповідно для кожної ділянки зльоту дирижабля.

Якщо апарат врівноважено, тобто аеростатична сила врівноважує вагу апарата, то $\tilde{\Phi}_i = 0$ і алгоритм керування кутом відхилення вектора тяги силової установки φ_i для i -ї ділянки зльоту врівноваженого дирижабля набуде вигляду

$$\tilde{P}_{\Sigma_i} \sin \varphi_i = \frac{6(H_{T_i} - H)}{T_i^2} - \frac{2(2V_Y + V_{Y_{T_i}})}{T_i}. \quad (31)$$

Для визначення максимальної горизонтальної швидкості в кінці i -ї ділянки зльоту $V_{X_{i \max}}$ необхідно оптимізувати критерій (14), який із врахуванням виразів (28) і (29) можна подати у вигляді

$$\begin{aligned}
I_i = & -\left\{ V_{X_0} + \frac{\bar{P}_{\Sigma_i}}{\tilde{P}_{\Sigma_i}} \operatorname{tg} a_0 V_{Y_0} + \right. \\
& + \left[\bar{P}_{\Sigma_i} \cos a_0 - C_4 V_0^2 + \frac{\bar{P}_{\Sigma_i}}{\tilde{P}_{\Sigma_i}} \operatorname{tg} a_0 (\tilde{\Phi}_i + \tilde{P}_{\Sigma_i} \sin a_0) \right] T_i + \\
& + \left[-\left(\frac{C_5}{2} V_{Y_0} + C_4 V_{X_0}\right) \bar{P}_{\Sigma_i} \cos a_0 + \right. \\
& + \left(\frac{C_5}{2} V_{X_0} - C_4 V_{Y_0}\right) \tilde{P}_{\Sigma_i} \sin a_0 + \\
& + \left(\frac{C_5}{2} V_{X_0} - C_4 V_{Y_0}\right) \tilde{\Phi}_i + \left(\frac{C_5}{2} C_4 V_{Y_0} + C_4^2 V_{X_0}\right) V_0^2 + \\
& + \frac{\bar{P}_{\Sigma_i}}{\tilde{P}_{\Sigma_i}} \operatorname{tg} a_0 \frac{1}{2} (C_6 + C_7) V_{Y_0} \bar{P}_{\Sigma_i} \cos a_0 - \\
& - \frac{\bar{P}_{\Sigma_i}}{\tilde{P}_{\Sigma_i}} \operatorname{tg} a_0 \frac{1}{2} (C_6 + C_7) V_{X_0} \tilde{P}_{\Sigma_i} \sin a_0 - \\
& - \frac{\bar{P}_{\Sigma_i}}{\tilde{P}_{\Sigma_i}} \operatorname{tg} a_0 \frac{1}{2} (C_6 + C_7) V_{X_0} \tilde{\Phi}_i - \\
& \left. \left. - \frac{\bar{P}_{\Sigma_i}}{\tilde{P}_{\Sigma_i}} \operatorname{tg} a_0 \frac{1}{2} (C_6 + C_7) V_{Y_0} C_4 V_0^2 \right] T_i^2 \right\}. \quad (32)
\end{aligned}$$

З необхідної умови оптимальності критерію (32) маємо $\frac{\partial I_i}{\partial T_i} = 0$. Замінюючи довільні початкові

значення керування і змінних траєкторного руху їх поточними значеннями, визначаємо тривалість T_i i -ї ділянки зльоту дирижабля з досягненням в кінці ділянки максимальної горизонтальної швидкості $V_{X_{i \max}}$:

$$T_i = \frac{1}{2} \times$$

$$\times \frac{\bar{P}_{\Sigma_i} + \beta_1 \cos \varphi_i + \beta_8 \sin \varphi_i}{\beta_2 \bar{P}_{\Sigma_i} \cos^2 \varphi_i + \beta_6 \tilde{P}_{\Sigma_i} \sin^2 \varphi_i + (\beta_3 \tilde{P}_{\Sigma_i} + \beta_5 \bar{P}_{\Sigma_i}) \sin \varphi_i \cos \varphi_i + (\beta_3 \tilde{\Phi}_i + \beta_4) \cos \varphi_i + (\beta_6 \tilde{\Phi}_i + \beta_7) \sin \varphi_i}, \quad (33)$$

де

$$\beta_1 = -C_4 V^2; \beta_2 = \frac{C_5}{2} V_Y + C_4 V_X; \beta_3 = -\left(\frac{C_5}{2} V_X - C_4 V_Y\right);$$

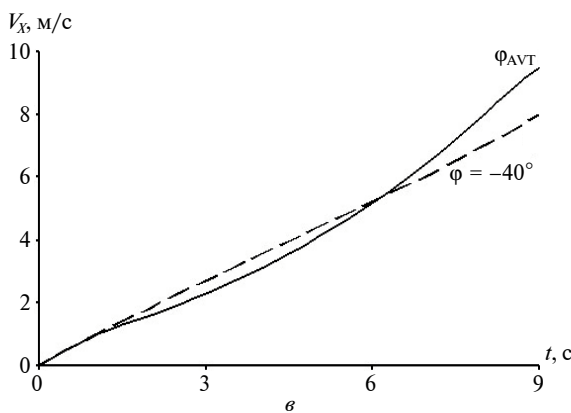
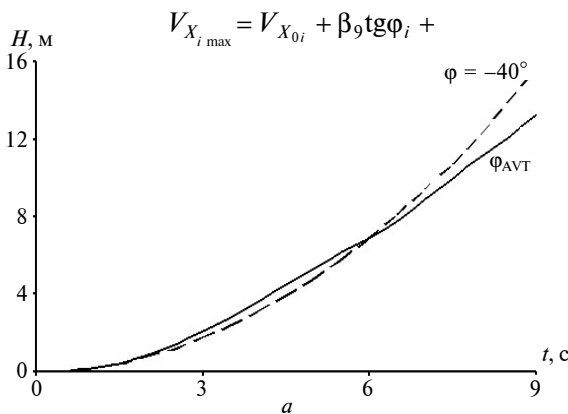
$$\beta_4 = -\left(\frac{C_5}{2} C_4 V_Y + C_4^2 V_X\right) V^2; \beta_5 = -\frac{\bar{P}_{\Sigma_i}}{\tilde{P}_{\Sigma_i}} \frac{1}{2} (C_6 + C_7) V_Y;$$

$$\beta_6 = \frac{\bar{P}_{\Sigma_i}}{\tilde{P}_{\Sigma_i}} \frac{1}{2} (C_6 + C_7) V_X; \quad (34)$$

$$\beta_7 = -\frac{\bar{P}_{\Sigma_i}}{\tilde{P}_{\Sigma_i}} \frac{1}{2} (C_6 + C_7) V_Y C_4 V^2;$$

$$\beta_8 = \frac{\bar{P}_{\Sigma_i}}{\tilde{P}_{\Sigma_i}} \tilde{\Phi}_i.$$

Тоді вираз для визначення максимального значення швидкості $V_{X_{i \max}}$ у кінці i -ї ділянки зльоту матиме вигляд



$$+ [\bar{P}_{\Sigma_i} \cos \varphi_i + \beta_1 + \beta_8 \operatorname{tg} \varphi_i + \bar{P}_{\Sigma_i} \operatorname{tg} \varphi_i \sin \varphi_i] T_i + [-\beta_2 \bar{P}_{\Sigma_i} \cos \varphi_i - \beta_3 \tilde{P}_{\Sigma_i} \sin \varphi_i - \beta_3 \tilde{\Phi}_i - \beta_4 - \beta_5 \operatorname{tg} \varphi_i \bar{P}_{\Sigma_i} \cos \varphi_i - \beta_6 \operatorname{tg} \varphi_i \tilde{P}_{\Sigma_i} \sin \varphi_i - \beta_6 \tilde{\Phi}_i \operatorname{tg} \varphi_i - \beta_7 \operatorname{tg} \varphi_i] T_i^2, \quad (35)$$

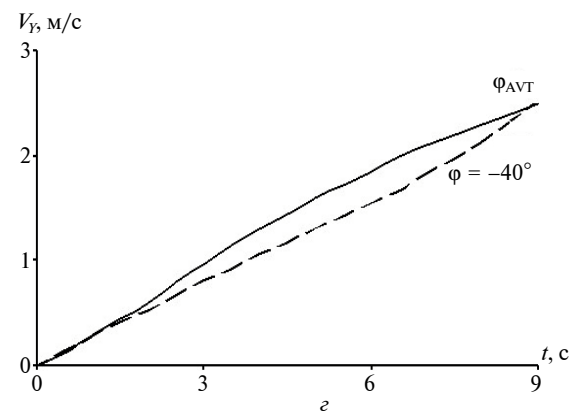
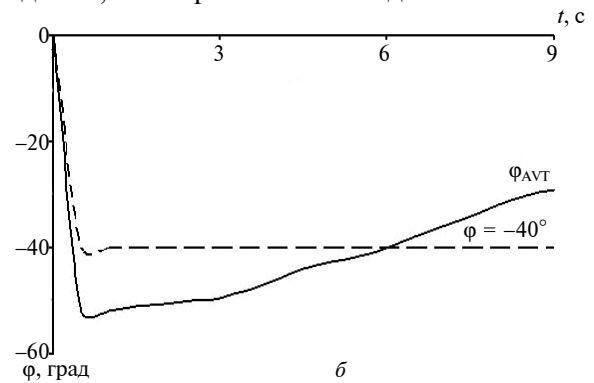
де $\beta_9 = \frac{\bar{P}_{\Sigma_i}}{\tilde{P}_{\Sigma_i}} V_Y.$

Приклад моделювання

Порівняння ефективності ручного (при $\varphi = -40^\circ$) і автоматичного керування ($\varphi_{\text{АВТ}}$) відхиленням вектора тяги за синтезованим алгоритмом при виконанні зльоту дирижабля з досягненням висоти $H = 15,2$ м і заданої вертикальної швидкості $V_Y = 2,5$ м/с проведемо моделювання динаміки зльоту дирижабля на ЕОМ. При цьому алгоритм керування (31) матиме вигляд

$$\tilde{P}_{\Sigma_i} \sin \varphi_i = \frac{6(15,2 - H)}{T_i^2} - \frac{2(2V_Y + 2,5)}{T_i} - \tilde{\Phi}_i.$$

Результати порівняння параметрів зльоту дирижабля з ручним і автоматичним керуванням відхиленням вектора тяги показано на рисунку: a – висота; b – кут карбування; e – горизонтальна швидкість; z – вертикальна швидкість.



Порівняння параметрів зльоту дирижабля з ручним (- -) та автоматичним (—) керуванням відхиленням вектора тяги

Отримано, що при заданих термінальних умовах та застосуванні на дирижаблі автоматичного відхилення вектора тяги за синтезованим алгоритмом, вектор тяги спочатку відхиляється на кадрування на кут приблизно 50° для здійснення більш крутого зльоту, а потім відхилення вектора тяги зменшується на перехідному режимі для забезпечення необхідної крейсерської швидкості. При такому керуванні досягається зліт дирижабля з коротким пробігом по землі або без торкання землі і забезпечуються більші повітряні швидкості на заданій висоті. Так, з рисунка видно, що застосування автоматичного керування відхиленням вектора тяги забезпечує на заданій висоті (15,2 м) більшу на 20–25% горизонтальну швидкість, ніж при ручному керуванні [15].

Висновки

У статті показано, що застосування автоматичного керування зльотом дирижабля за синтезованим алгоритмом підвищує маневреність апарата, покращує його зльотні характеристики, забезпечує можливість здійснення практично вертикального та короткого зльоту порівняно з ручним керуванням.

Запропонований підхід до оптимізації керування зльотом дирижабля з використанням математичного апарата диференціальних перетворень функцій та рівнянь дає змогу значно спростити вирішення проблеми синтезу замкнених законів термінального керування і продовжити дослідження в цьому напрямі.

В.П. Гусьнін, А.В. Гусьнін

СИНТЕЗ АЛГОРИТМА ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ ДВИЖЕНИЕМ АЭРОСТАТИЧЕСКОГО ЛЕТАТЕЛЬНОГО АППАРАТА НА ЭТАПЕ ВЗЛЕТА

Предложен подход к синтезу алгоритма оптимального управления движением аэростатического летательного аппарата на этапе взлета. Синтезирован алгоритм автоматического управления отклонением вектора тяги аэростатического летательного аппарата на этапе взлета. Возможность и эффективность применения синтезированного алгоритма управления отклонением вектора тяги продемонстрированы моделированием взлета аэростатического летательного аппарата типа "Zeppelin NT".

V.P. Gusynin, A.V. Gusynin

OPTIMAL CONTROL ALGORITHM SYNTHESIS OF AEROSTATIC VEHICLE MOVEMENT ON THE TAKE-OFF PHASE

This study proposes a novel approach to optimal control algorithm synthesis of aerostatic vehicle movement on the take-off phase. Furthermore, we synthesize the automated control algorithm by declination of aerostatic vehicle thrust vector on the take-off phase. Through the simulation of "Zeppelin NT" type aerostatic vehicle take-off, we demonstrate the effectiveness of the synthesized control algorithm by declination of aerostatic vehicle thrust vector.

1. *Гусьнін А.В.* Тенденції розвитку сучасного дирижаблебудування за кордоном. I. Дирижаблі напівжорсткої і жорсткої схем // Наукові вісті НТУУ "КПІ". – 2002. – № 4. – С. 95–102.
2. *Гусьнін А.В.* Тенденції розвитку сучасного дирижаблебудування за кордоном. II. Дирижаблі м'якої схеми // Там же. – № 5. – С. 99–104.
3. *Гусьнін В.П., Гусьнін А.В.* Застосування керованого вектора тяги на дирижаблях // Вісник НАУ. – 2005. – № 3(25). – С. 79–84.
4. *Гусьнін В.П., Гусьнін А.В.* Оценка эффективности управления вектором тяги дирижабля на этапах взлета и посадки // Тр. VII Междунар. молодежной науч.-практ. конф. "Человек и космос". – Днепропетровск: НЦАОМУ, 2005. – С. 125.
5. *Гусьнін А.В.* Синтез алгоритма управління відхиленням вектора тяги аэростатического летательного аппарата на этапе взлета: Дис. ...канд. техн. наук: 05.13.03. – К., 2007. – 132 с.
6. *Jex H.R., Magdaleno R.E., Golhausen P., Tischer M.P.* Pre- and-Post Flight Test Models versus measured Skyship-500 Control Responses // AIAA Paper 87-2508. – 1987. – P. 87–99.
7. *Бэлман Р.* Динамическое программирование. – М.: Изд-во иностр.лит-ры, 1969. – 457 с.
8. *Лухов Г.Е.* Дифференциальные спектры и модели. – К.: Наук. думка, 1990. – 184 с.
9. *Баранов В.Л., Гусьнін В.П., Гусьнін А.В., Жуков І.А., Алексеева Л.О.* Диференціальні перетворення в задачах керування рухом літальних апаратів: Навч. посіб. – К.: НАУ, 2003. – 158 с.

10. *Критерии* летной годности для дирижаблей. – М.: РВО, 1999. – 143 с.
11. *Airship Design Criteria*. – U.S. Department of Transport, Federal Aviation Administration, № FAA-P-8110-2, 1987. – 120 p.
12. *Transport Airship Airworthiness Requirements (TAR)*. – Luftfahrt-Bundesamt, in NfL II 22/01, Offenbach/Braunschweig, 2001. – 80 p.
13. *Баранов В.Л., Гусынин В.П., Гусынин А.В.* Спектральная модель движения аэростатического летательного аппарата // Пробл. информатики та управління. – 2004. – № 1. – С. 41–49.
14. *Gusynin V.P., Gusynin A.V.* Spectral model of the airship dynamics // Proc. of the 5th International Airship Convention and Exhibition. – Oxford (England). – August 19–22. – Oxford, 2004.
15. *Gusynin A.V.* Application of differential transformations for the modeling motion of aerostatic vehicles and for the synthesis of control algorithms // Proc. of NAU. – 2005. – N 2(24). – P. 83–88.

Рекомендована Радою Міжуніверситетського медико-інженерного факультету НТУУ “КПІ”

Надійшла до редакції
5 листопада 2007 року

УДК 621.375.826:621

В.П. Котляров, Салаваті Хамідреза

ТЕХНІЧНЕ ЗАБЕЗПЕЧЕННЯ ПРОЦЕДУР ЛАЗЕРНОЇ ТЕРАПІЇ**Вступ**

Тематика розробок ініційована великим інтересом громадськості до нетрадиційних методів діагностики і лікування, яка використовує унікальні властивості лазерного випромінювання. Застосування лазерного променя в терапії, хірургії, урології, онкології, косметології ґрунтується на різних механізмах впливу електромагнітного випромінювання на біологічну тканину, причому позитивний результат визначається найчастіше комплексним ефектом [1, 2]. Велика розмаїтість видів взаємодії випромінювання з живою тканиною і їх залежність від основних параметрів пучка, таких, як довжина хвилі випромінювання, інтенсивність у зоні опромінення, тривалість впливу і сумарна доза введеної енергії дає можливість багатоканального керування процесом опромінення [3]. Так, наприклад, використовуючи вибіркоче поглинання клітинами фотонів з різною квантовою енергією, можна домогтися селективного пошкодження або знищення клітин тканини, які мають певні властивості.

На відміну від первісних спроб використання лазерів у медицині в 70–80-х роках минулого століття, коли переважно використовувався тепловий механізм впливу випромінювання на біотканину (лазерний скальпель, фізіотерапія тощо), а процедура виконувалася вручну, склад і конструкція приладів для сучасної лазерної медицини істотно ускладнилися. Широко застосовується процесорна техніка, світловолоконні оптичні транспортуючі системи, сканери на гальванометричних і п'єзоприводах, розробка і експлуатація яких потребує спеціальної підготовки персоналу [4]. Суттєве значення має й вартість устаткування для сучасної лазерної медицини [5], що безпосередньо впливає на ціну медичних послуг, а отже, й на їх доступність для широкого кола населення. Не секрет, що послуги приватних лікувальних центрів, таких, як "Оптімед", "Ексімер", "Біомед", Центру дерматології при госпіталі МВС України, а також численних косметологічних центрів і кабінетів через дорожнечу обслуговування доступні лише еліті. Потрібно також

зауважити, що останньою обставиною визначається локалізація медичних лазерних центрів – поблизу зосередження капіталу: Київ і регіональні фінансові центри – Донецьк, Харків, Дніпропетровськ, Одеса та інші великі міста. Це тим більше затрудняє доступ до їх послуг жителям провінційних міст і сіл України.

Постановка задачі

Зважаючи на викладені вище обставини, було визначено *мету даних розробок* – створити технологічне та технічне оснащення лазерних терапевтичних процедур, що частіше проводяться, приладами простої конструкції і дешевої комплектації (без дорогої і складної процесорної техніки та приводів) з можливостями, які не поступаються сучасній і дорогій фізіотерапевтичній системі, впровадити технічні розробки в клінічну практику. Досягнення цієї мети можливе в результаті вирішення ряду завдань:

- аналізу застосовності лазерів для лікування різних видів захворювань із врахуванням досягнення позитивного ефекту (часткового чи повного лікування);
- вибору схем опромінення різних за формою і розмірами ділянок тканини та розробки відповідних кінематичних схем приладів;
- конструювання приладів для лазерної терапії на базі елементарних механічних систем (приводів, сканерів, дзеркальних, волоконних і заломлювальних елементів), які не потребують керуючих систем на базі процесорної техніки;
- виготовлення і налагодження приладів, апробації їх в амбулаторних умовах.

Основні параметри опромінювання в процедурах лазерної терапії

Незважаючи на великі обмеження на склад і комплектацію розроблювальної гами приладів, необхідною умовою є *автоматизація процедури опромінення* пацієнта, в тому числі й по розмірах ділянки тіла, що опромінюється, тривалості сеансу та кількості їх повторювань. Для цієї мети передбачається використовувати кулачкові механізми і реверсивні двигуни.

Як керуючі параметри, якими визначаються поточні і кінцеві ефекти впливу випромінювання на тканину, прийняті розміри одиничної зони опромінення d_0 , інтенсивність випромінювання в її межах I_p та час експозиції t .

Залежно від оптичної схеми приладу розмір зони опромінення може визначатися розміром пучка випромінювання D (із врахуванням його розходження θ) або параметрами фокусуємого елемента F (також із врахуванням розбіжності):

$$d_0 \approx D,$$

$$d_0 \approx F\theta.$$

Інтенсивність у зоні опромінення I_p залежить від енергетичного режиму роботи лазера: для безперервного режиму подачі енергії

$$I_p = 4P/\pi d_0^2;$$

при імпульсному опроміненні

$$I_p = 4E/\pi d_0^2 \tau,$$

де P – потужність випромінювання; E – імпульсна енергія випромінювання; τ – тривалість імпульсу випромінювання.

Час експозиції t визначається тривалістю імпульсу (для імпульсної подачі енергії) і швидкістю переміщення пучка по поверхні тіла пацієнта V :

для безперервного режиму опромінення

$$t = d_0/V;$$

при імпульсній подачі енергії:

$$t = \tau.$$

Тривалістю експозиції (опромінення) разом із рівнем інтенсивності визначається питомий внесок енергії в тканину W_E :

для безперервної подачі енергії

$$W_E = I_0 t = I_0 d_0/V = P/V \left(\frac{\pi d_0^2}{4} + tV \right); \quad (1)$$

при імпульсному опроміненні

$$\begin{aligned} W_E &= I_p \tau = E / \left(\frac{\pi d_0^2}{4} + V\tau d_0 \right) = \\ &= E/d_0 \left(\frac{\pi d_0}{4} + V\tau \right). \end{aligned} \quad (2)$$

У розробках має також враховуватися кінематичне збільшення (зменшення) часу експозиції в різних схемах опромінення.

Принципи побудови лазерних терапевтичних установок

Лазерні терапевтичні установки (ЛТУ), призначені для стимуляції регенерації тканин і інтенсифікації обмінних процесів у кісткових тканинах, що досягається при інтенсивності опромінення I_p до 0,1–100 мВт/см², як правило, складаються із стійки, на якій закріплений лазер (частіше He-Ne) з довжиною хвилі випромінювання $\lambda = 632,8$ нм, потужністю P від 2 до 25 мВт і сканера, за допомогою якого переміщується промінь по поверхні ділянки, яка опромінюється, уздовж вибраної траєкторії, зумовленої формою ділянки. Для повної відповідності траєкторії формі зони опромінення слід використовувати пристрої з програмним керуванням, наприклад, сканери на сферичному дзеркалі або системи плоских гальванометричних дзеркал. Однак простішими є конструкція і обслуговування пристрою для ручного сканування, в якому використовується волоконний світловод 2 для доставки променевої енергії і пристрій для перетворення розміру пучка 5 (рис. 1).

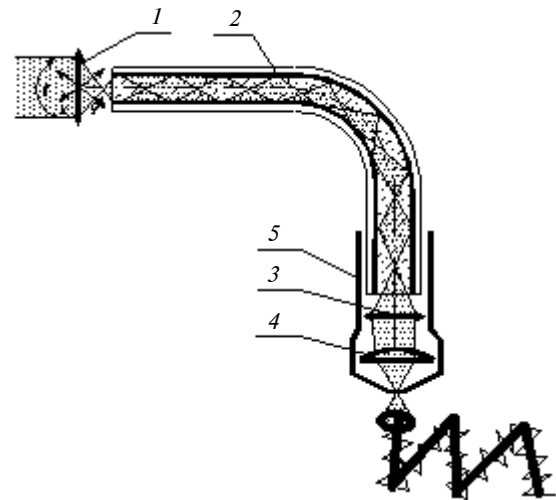


Рис. 1. Ручний сканер для терапевтичних процедур: 1 – вузол вводу лазерного променя у світловод; 2 – світловод; 3 – колимуюча лінза; 4 – фокусуєча лінза; 5 – державка маніпулятора

Проте стабільність параметрів опромінення при ручному покритті променем процедурної зони невисока, тому краще використовувати механізовані сканери із стабільними і керованими характеристиками сканування. Щоб спростити елементний склад пристрою і технологічне забезпечення процедури опромінення, режим сканування можна уніфікувати, за-

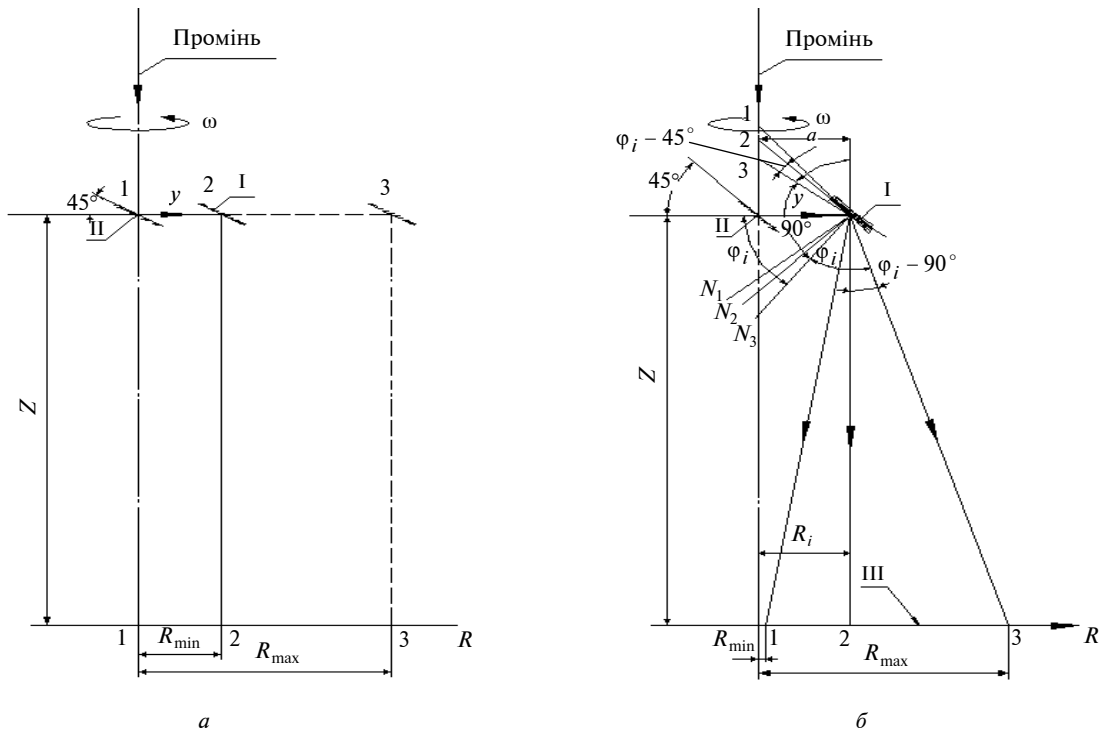


Рис. 2. Схеми спірального сканування променя: *a* – з поступовим рухом дзеркала (цикл роботи: один прохід з реверсом); *б* – з кутовим рухом дзеркала (цикл роботи: *n* – проходів без реверсу)

безпечуючи покриття зон опромінення різної форми скануванням уздовж спіралі Архімеда. Принципово всі конструкції обох дзеркальних сканерів можна об'єднати у дві групи, а саме: з поступальним переміщенням рухомого дзеркала (рис. 2,*a*) і з кутовим його коливанням (рис. 2,*б*).

На рис. 3–5 показано принципові схеми сканерів з рівномірним поступальним переміщенням дзеркала 7, яке сканує промінь 8 (у конструкції сканера на рис. 3 [6] його поверхня 9 являє собою суперпозицію дискретних послідовних положень одиничних дзеркал – багатогранний дзеркальний конус). Щоправда, ці схеми мають різні недоліки, однак їх об'єднує загальна властивість – збільшення радіуса сканування відбувається на сталу величину, яка дорівнює кроку спіралі, що систематично зменшує питомий внесок енергії у периферійні ділянки зони опромінення (1), (2) при незмінній кутовій швидкості сканування ω і змінній лінійній $V_i = \omega R_i$. Деякі ускладнення конструкцій сканерів (наприклад, нанесення спіральної канавки на криволінійну поверхню корпусу 2 (рис. 5)) можуть трохи зменшити нестабільність W_E , але це істотно погіршує технологічність пристрою [7].

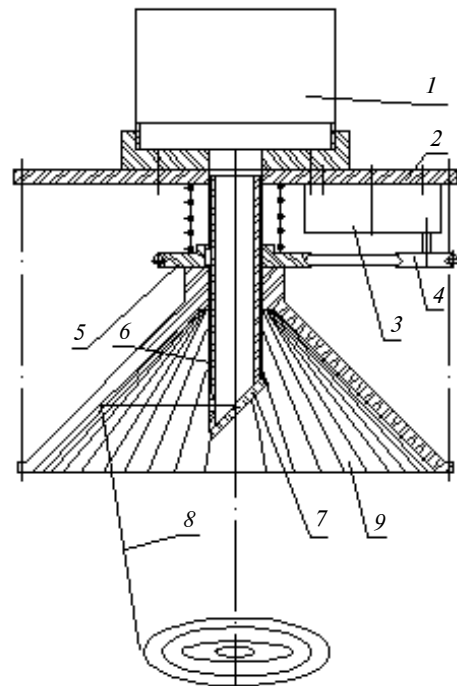


Рис. 3. Пристрій для сканування променя вздовж спіралі: 1 – двигун; 2 – корпус; 3 – двигун; 4, 5 – ремінна передача; 6 – різьбова втулка; 7 – поворотне дзеркало; 8 – промінь; 9 – дзеркальний конус

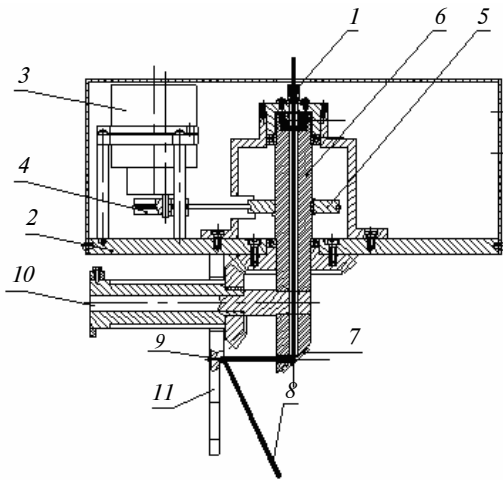


Рис. 4. Сканер з гвинтовим приводом переміщення дзеркала: 1 – вузол доставки променя; 2 – корпус; 3 – двигун; 4, 5 – ремінна передача; 6 – втулка; 7 – поворотне дзеркало; 8 – промінь; 9 – скануюче дзеркало; 10 – гвинт; 11 – гайка розсувна

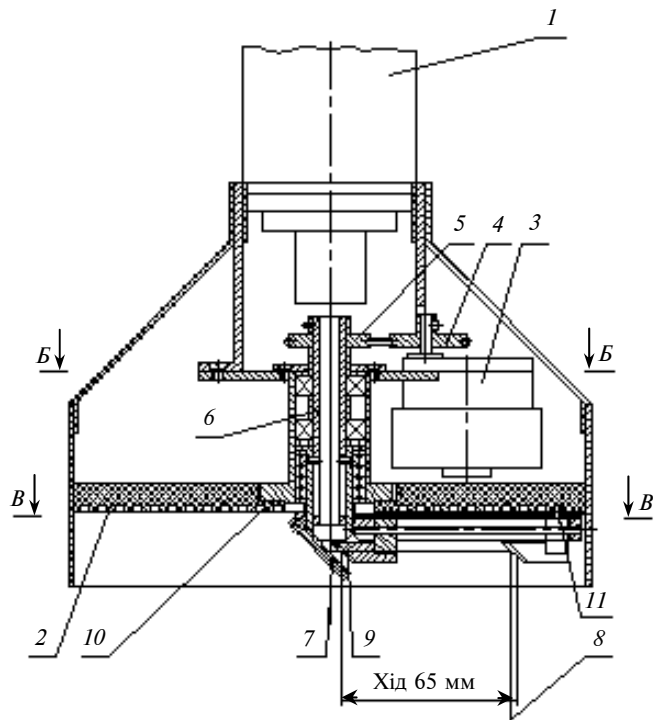


Рис. 5. Сканер із спіральним приводом переміщення дзеркала: 1 – лазер; 2 – корпус; 3 – двигун; 4, 5 – ремінна передача; 6 – втулка; 7 – поворотне дзеркало; 8 – промінь; 9 – скануюче дзеркало; 10 – спіральна канавка; 11 – поводок

Для схеми з кутовим коливанням скануючого дзеркала (рис. 2,б) завдання рівномірного опромінення кожної ділянки зони вирішується кінематичними засобами.

Закон зміни радіуса сканування R можна встановити, використовуючи графічні побудови на рис. 2,б. У схемі опромінення прийнято такі позначення: I – поворотне дзеркало із змінюваним кутом нахилу; II – поворотне дзеркало; III – опромінювана ділянка поверхні, розташована на відстані Z від сканера; φ – кут нахилу скануючого дзеркала до напрямку осі променя; a – відстань між похилим і скануючим дзеркалом.

Як видно з цього рисунка, при різних положеннях скануючого дзеркала (1, 2 або 3) промінь направляється на поверхню, яка опромінюється, під різними кутами φ_i , а виходить на різних відстанях від центра зони опромінення:

$$R_i = a + Z \operatorname{tg}(2\varphi_i - 90). \quad (3)$$

Для переміщення променя вздовж спіралі радіуса R_i необхідно змінити кут нахилу дзеркала φ_i :

$$\varphi_i = 45 + 0,5 \arctg\left(\frac{R_i - a}{Z}\right), \quad (4)$$

причому, крок спіралі S_i через збільшення лінійної швидкості сканування V_i (1) і (2) має бути меншим діаметра променя d_0 , щоб компенсувати повторним опроміненням ділянки завширшки $\Delta_i = d_0 - S_i$ зниження питомої енергії W_E на ділянці радіусом R_{i+1} (рис. 6). Закон зміни кроку S_i установлюється при відомих параметрах пучка випромінювання для вибраних режимів і схеми опромінення.

Для здійснення такого закону сканування променем потрібний програмно керований привід коливання дзеркала, що суперечить прийнятому принципу спрощення і здешевлення приладу. Це завдання вирішується в наступній конструкції сканера (рис. 7) за допомогою кулачка 10 для нелінійного керування кутом нахилу дзеркала 11. Обертання від вала двигуна 3 з редуктором ($n = 2$ об/хв) блок шківів 1–2 (шків 1 – змінний) передається поворотному дзеркалу 12, установленому на шляху

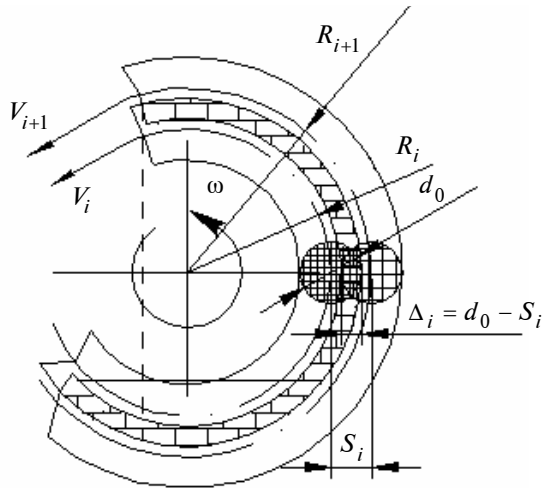


Рис. 6. Схема перекриття суміжних слідів опромінювання

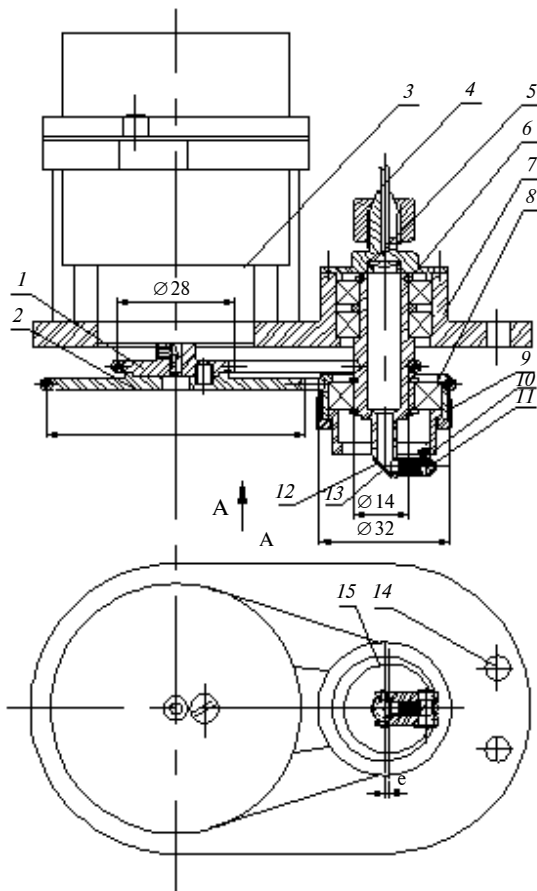


Рис. 7. Конструкція сканера з коливним дзеркалом: 1, 2 – шків; 3 – двигун; 4 – світловод; 5 – колююча лінза; 6 – втулка; 7 – корпус; 8 – стакан; 9 – гайка; 10 – кулачок; 11 – скануюче дзеркало; 12 – дзеркало поворотне; 13 – отвір; 14 – отвори кріпільні; 15 – ексцентричний отвір

променя у втулці 6, і стакані 8 з кулачком 10 у вигляді ексцентричного отвору 19. Розходження в передавальних відношеннях приводів ($i_2 = 2$ і $i_3 = 2,07$) забезпечує відносно повільне обертання дзеркала 12 і кулачка 10, чим продовжується процедура опромінення ділянки діаметром 300 мм до 7,5 хв із плавним зменшенням кроку від центра до периферії зони (від $S_i = 0,2d_0$ до $S_n = 0,9d_0$).

До пацієнта лазерний промінь від випромінювача подається через світловод 4, вузол введення з лінзою 5, що колимує промінь, і пару дзеркал 13 і 11. Уздовж осі променя у дзеркалі 13 є отвір 12 (діаметром 0,3 мм для відводу частини променя до пацієнта при центруванні приладу щодо опромінюваної ділянки). Ця процедура виконується завдяки ступеням свободи маніпулятора (штанги штатива), до якого за допомогою отворів 14 у корпусі 7 прикріплюється прилад. Кулачок 10 звільняється гайкою 9 і його обертанням основна частина променя, відбита дзеркалами 13 і 11, установлюється на краю опромінюваної ділянки (у межах максимального віддалення від центру – 150 мм). Вмикається привод 3 вбік наближення променя до центра ділянки. Якщо наприкінці шляху привод не вимикають, то промінь міняє напрямок руху на протилежний – від центра, і процедура повторюється. За допомогою змінного шківів 1 змінюється тривалість процедури при незмінних розмірах ділянки.

Результати клінічних досліджень ЛТУ

Першу групу становили досліджувані 14 хворих віком від 30 до 75 років із трофічними виразками, які розвилися через венозну недостатність на ґрунті тромбофлебиту глибоких вен нижніх кінцівок. Захворювання тривало від кількох місяців до 15 років і більше.

Сканування лазерним променем проводилось щодня. Тривалість кожного сеансу становила від 4 до 15 хв. Загальна кількість сеансів коливалася від 10 до 25. Додаткового медикamentозного лікування хворі не одержували.

Критерієм оцінки ефективності лазерної терапії є: відторгнення некротичних тканин, час розвитку грануляції, початок епітелізації, строки загоєння рани і дані цитологічного та бактеріологічного досліджень.

У клінічному розвитку рани зміни вбік поліпшення спостерігалися після трьох–п'яти сеансів опромінення: поверхня виразки очи-

щалася від некротичних тканин, фібринозного нальоту, з'являлися яскраво-червоні грануляції, а після семи-восьми сеансів появлялась острівкова і крайова епітелізація. Після десяти сеансів спостерігалася деяка стабілізація ознак епітелізації.

У трьох хворих було помічено поліпшення: утворювалися яскраво-червоні грануляції, появлялася крайова епітелізація, зменшувалося ранове відокремлювання. В одного хворого після проведеного курсу лікування спостерігалось погіршення, яке було пов'язано із розміром виразки (площею до 40 см²) та гнобленням регенеративних процесів на тлі цукрового діабету.

Отримані дані свідчать про те, що застосування лазерної установки є ефективним методом лікування трофічних виразок, зумовлених хронічною венозною недостатністю. Лазерна терапія прискорює загоєння шкіряних дефектів, знижує біль і зменшує строки перебування хворих у стаціонарі в середньому на 35 днів.

Друга група досліджуваних складалась з 23 хворих віком 18–76 років. Лазерну терапію було введено в комплекс лікувальних заходів у хворих із гнійними ранами м'яких тканин кінцівок різної етіології.

Лікувальна тактика визначалася фазою розвитку гнійного процесу. При цьому керувалися основними засадами лікування ранової інфекції і нормалізації ранозаживної регенерації, які полягають у зміні засобів, що підвищують загальну реактивність організму, його імунні властивості, а також у проведенні повноцінної хірургічної обробки рани.

Лазерна терапія ран, як правило, призначалась у фазі регенерації після очищення її від гнійно-некротичних мас і появи грануляції. Залежно від фази визначався ефект лазерної терапії. У запально-реструктивній фазі лазерна терапія була малоефективною.

Курс лікування складався з 15–20 щоденних сеансів по 6–20 хв кожний. Максимум терапевтичного ефекту з'являвся з третього по десятий–п'ятнадцятий день опромінення, після чого помітно знижувалася реакція організму.

Аналізуючий ефект виникав на третьому–п'ятому сеансі, після чого починався активний ріст грануляції, зменшувалася набряклість і пі-фільтрація тканин та прискорювалася епітелізація рани. Наприкінці курсу лікування кількість мікробних клітин у препараті зменшувалася. При великих ранах лазерна терапія сприяла зменшенню ран в розмірах, підготовлювала

їх до шкірно-пластичної операції. Опромінення пересаджуваної ділянки шкіри в післяопераційний період поліпшувало її приживлення, попереджало розвиток нагноєння та утворення глибокого колоїдного рубця.

Повне загоєння ран спостерігалось в 19 хворих, у чотирьох воно було частковим, що потребувало виконання шкірно-пластичних операцій. Ці дані підтверджують ефективність лазерної біостимуляції ран, які гояться протягом довгого часу. При використанні лазера в комплексному лікуванні строк перебування хворих у стаціонарі скоротився до двох-трьох днів.

Третя група досліджуваних складалась з 9 хворих віком 16–62 років з тромбозом гемороїдальних вузлів другого-третього ступенів. У хворих були інтенсивні постійні болі, які збільшувались під час ходьби і в сидячому положенні. Шкіра і слизова оболонка кишки, які покривають гемороїдальні вузли, були набряклі і напружені.

Всім хворим, крім звичайної консервативної терапії, спрямованої на зменшення болювого синдрому і місцевих запальних змін, було проведено лазерну терапію. Курс лікування становив сім–дев'ять сеансів щодня по три–дев'ять хвилин кожний.

Лазерне опромінювання виявилось ефективним для всіх хворих. Порівняно з контрольною групою (сім осіб) у хворих, підданих лазерному біостимуляційному впливові, швидко зменшувався болювий синдром, прискорився процес відторгнення некротичних тканин і регенерації дефектів слизової оболонки. Строк перебування в стаціонарі скоротився на два–три дні.

Комбінований вплив лазерної енергії червоного і синього світлового діапазону хвиль є досить ефективним методом лікування алергійних дерматитів.

В нашому випадку лікування алергійного дерматиту потребувало 120 хворих віком від 14 до 66 років, 80 – віком від 30 до 55 років (43 чоловіки і 27 жінок).

У 23 хворих було зареєстровано поширену екзему, в 41 – обмежену (дисгидротичну – 10, позатравматичну – 18, мікотичну – 7, рогову – 6). Всі хворі алергійними дерматитами одержували лазерну терапію в стадії загострення шкіряного процесу. Джерело синього світла – He–Cd-лазер ЛГ – 70 ($\lambda = 441,6$ нм, $P = 20$ мВт), джерело червоного кольору – He–Ne-лазер ЛГ – 111 ($\lambda = 632,8$ нм, $P = 25$ мВт).

Таблиця. Результати лікування різних хвороб (за даними лікарні № 25 в період з 30.09.05 до 30.11.06 р.)

| Хвороба | Тривалість сеансу, хв | Курс лікування, сеансів | Всього хворих, кількість осіб | Одужання, кількість осіб | Покращення, кількість осіб | Без ефекту, кількість осіб | Наявність ефекту, % | Скорочення курсу лікування, днів |
|-----------------------|-----------------------|-------------------------|-------------------------------|--------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------|----------------------------------|
| Трофічні язви | 5–12 | 23–26 | 500 | 362 | 121 | 17 | 97 | 4,2 |
| Ревматоїдний артрит | 0,5–7 | 15–19 | 62 | – | 57 | 5 | 92 | – |
| Гнійні рани | 5–20 | 7–30 | 118 | 81 | 22 | 15 | 83 | 3–5 |
| Опіки | 1–10 | 12–16 | 104 | 54 | 29 | 21 | 75 | до 10 |
| Переломи | 6–8 | 24 | 46 | 35 | 8 | 3 | 94 | 30–45 |
| Нейродерміт дифузний | – | – | 26 | 13 | 11 | 2 | 88 | – |
| Нейродерміт обмежений | – | – | 29 | 14 | 12 | 3 | 89,6 | – |
| Екзема поширена | – | – | 23 | 10 | 11 | 2 | 91,3 | – |
| Екзема обмежена | – | – | 41 | 19 | 17 | 5 | 87,8 | – |

Вогнища поразки опромінювались синім світлом при інтенсивності $I_p = 100\text{--}200 \text{ мВт/см}^2$ і тривалістю 60–240 с. При поширеному шкіряному процесі на вогнища поразки впливали позавертебрально 60–120 с. Через 10–15 хв на ці місця діяли червоним світлом He–Ne-лазера такої ж інтенсивності і тривалості опромінення. Процедури проводилися шість разів на тиждень. На курс лікування призначалося 20 процедур.

У процесі лазерної терапії не призначалися препарати, які могли істотно впливати на протікання захворювання. Зовнішнє лікування проводилося пиреферентними мазями.

Було встановлено, що комбінована терапія дерматитів викликає виражений клінічний ефект (див. таблицю). Загострення дерматитів і патологічні зміни на шкірі і внутрішніх органах після лазерної терапії не спостерігалися.

При лікуванні дифузійного нейродерміту таке суб'єктивне явище, як сверблячка зменшувалося після трьох–чотирьох процедур, а після сьомої–дев'ятої процедури сверблячка зникала, шкіра ставала м'якою, еластичною, сверблячка в місцях типової локалізації (шиї, згину тильної поверхні великих суглобів) появлявся лише вночі при порушенні дієти. Згодом, після лікування зникали й ці явища.

У хворого, який страждав на супутнє захворювання (bronхіальну астму), поліпшення шкіряного процесу позитивно впливало на зменшення кількості і тривалості нападів бронхіальної астми. У двох хворих, які постійно порушували дієти, напади бронхіальної астми продовжувались.

Зменшення сверблячки при обмеженому нейродерміті починалося, як правило, після чотирьох–п'яти процедур, а вже після восьми–дев'яти процедур вона зникала. При поширеній екземі сверблячка зникала повільніше, ніж при нейродерміті, однак у другій половині курсу, після 10–12 процедур, ефект від лікування був досить стійкий.

Обмежена екзема в стадії загострення піддавалася лікуванню важче. На думку лікарів, при наявності локриту доцільно перед початком лікування за допомогою примочок його припинити, а потім вже починати лазерну терапію.

Екзема розвивається в результаті варикозного розширення вен. Повне лікування її проблематично у зв'язку з тим, що наявний тромбофлебіт підтримується патологічним процесом у шкірі.

При проведенні лазерної терапії хворим алергічними дерматитами з'являється можливість не вдаватись до медикаментозних засобів,

які в ряді випадків є причиною додаткової сенсифікації організму і підтримують патологічний процес.

Висновки

1. Аналіз літературних даних показав, що процес лазерного опромінення супроводжується різноманітними ефектами взаємодії випромінювання і тканини, причому вид найбільш вивченого ефекту – теплового – залежить від рівня інтенсивності опромінення і часу експозиції.

2. Перевага того чи іншого ефекту впливу залежить від поєднання довжини хвилі випромінювання і виду тканини (та її стану). Це дає змогу широко варіювати глибину терапевтичного впливу на хворі клітини.

3. Селективне поглинання випромінювання різними компонентами тканини дозволяє припустити ефективність пошуку схем і режимів опромінення в процедурах вибіркового руй-

нування елементів тканини, наприклад, у лазерній хірургії онкологічних захворювань.

4. Нескладні конструкції сканерів, які не потребують застосування процесорної техніки для керування ними, можна створити із спіральною траєкторією руху променя по полю опромінення, що спрощує перетворення обертального руху приводу в поступальне-обертальне переміщення променя.

5. Найбільш ефективними є конструкції сканерів з кулачковим пристроєм розгорнення променя, оскільки в них дотримується принцип простоти конструкції і керування сканером, а також автоматизації багатопрохідного циклу опромінення зони тканини без використання процесора.

6. На нашу думку, прилади розробленої конструкції можуть знайти застосування поряд із сучасними двокоординатними сканерами з процесорною системою керування, особливо в умовах недофінансованих районних і сільських лікарень та медпунктів.

В.П. Котляров, Салавати Хамидреза

ТЕХНИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ПРОЦЕДУР ЛАЗЕРНОЙ ТЕРАПИИ

Разработаны для нужд медицинских учреждений с небольшими доходами простые конструкции сканеров лазерного луча с движением вдоль спирали, которая позволяет облучать участки тела любой формы.

V.P. Kotlyarov, Salavati Hamidreza

MAINTENANCE ENGINEERING OF LASER THERAPY PROCEDURES

This paper presents a simple design of the laser beam scanners with movements along a spiral, allowing to irradiate any body areas, developed for the low-income medical institutions.

1. Байбеков И.М., Касымов А.Х., Козлов В.И. Морфологические основы низкоинтенсивной лазеротерапии. – Ташкент: Изд-во им. Ибн Сины, 1991. – 224 с.
2. Svaasand L.O., Gomer C.J. Optics of Tissue. In Muller G.J., Slinev D.H.(eds.), Dosimeter of Laser Radiation in Medicine and Biology // SPIE 1-st. – 1989. – Ser. IS5. – 156 p.
3. Гримблатов В.М. Современная аппаратура и проблемы низкоинтенсивной лазерной терапии // Применение лазеров в биологии и медицине: Сб. науч. тр. – К.: Техніка, 1996. – С. 123–127.
4. Прохончук А.А., Жижина Н.А. Лазеры в клинической медицине: Руководство для врачей / Под ред. С.Д. Плетнева. – М.: Медицина, 1996. – 354 с.
5. McKibbin L., Downie R. Treatment of Post Herpetic Neuralgia using a 904nm (infrareded) Low Incident Energy Laser: a Clinical Study // LLLT for Post Herpetic Neuralgia. – 1991. – P. 35–39.
6. Авт. свид. № 1494281 C21d. Установка для лазерной терапии / В.П. Котляров, Д.В. Котляров, В.С. Коваленко, 1998.
7. Авт. свид. № 1480181 C21d 08/23. Лазерная терапевтическая установка / В.П. Котляров, Д.В. Котляров, В.С. Коваленко, 1989.

Рекомендована Радою
Механіко-машинобудівного інституту
НТУУ “КПІ”

Надійшла до редакції
4 лютого 2008 року

УДК 629.13.014

Г.Є. Янкелевич, С.П. Маляров, В.Г. Цірук

ПОЛІПШЕНИЙ МЕТОД НАЙСКОРІШОГО СПУСКУ**Вступ**

Метод найскорішого спуску, чи градієнтний метод, використовується для знаходження параметрів систем, оптимальних за заданим критерієм якості. При цьому в процесі знаходження параметрів, які задають мінімальне або максимальне значення заданого критерію, використовуються перші похідні від функціонала критерію якості по зазначених параметрах [1, 2]. В той же час, є задачі, в яких параметри, по яких проводиться оптимізація, входять у функціонал критерію якості у вигляді добутку. Наприклад, в системах керування виникає необхідність компенсувати похибки датчика первинної інформації, а саме похибку коефіцієнта передачі та зміщення нуля. Для цього можна в процесі підготовки системи керування до роботи порівняти показання такого датчика з точним значенням вимірюваної величини. І тут критерієм якості може бути функціонал, мінімальне значення якого треба знайти.

Постановка задачі

Метою даної статті є доопрацювання методу найскорішого спуску в такий спосіб, щоб врахувати взаємний вплив параметрів, що оптимізуються. Такий вплив може мати місце внаслідок наявності відповідних нелінійних членів у функціоналі якості. Розв'язання цієї задачі дасть змогу підвищити ефективність зазначеного методу особливо у випадках, коли співвідношення між значенням вимірюваної величини при підготовці системи керування до роботи, тобто в процесі знаходження параметрів, по яких проводиться оптимізація, і значенням вимірюваної величини в процесі основної роботи системи становить кілька порядків.

Математичні засади

Розглянемо функціонал

$$I = (za - wzak)^2, \quad (1)$$

де za – точне значення вимірюваної величини; $wzak$ – відповідне відкореговане показання датчика; I – квадратичний критерій якості.

Необхідно знайти його мінімальне значення. Подамо показання датчика як

$$wza = kza + d, \quad (2)$$

де k – коефіцієнт передачі, який через похибку відрізняється від одиниці; d – зміщення нуля датчика. Звісно, що ці величини невідомі, їх треба відкорегувати способом мінімізації функціонала (1).

Відкореговане показання датчика запишемо таким чином:

$$wzak = wza + dk(wza + dd) + dd, \quad (3)$$

де dk – параметр, який компенсує похибку коефіцієнта передачі k ; dd – параметр, який компенсує зміщення нуля d . Ці параметри повинні забезпечувати мінімум критерію (1).

Можна помітити, що у вираз (3), а тому і у функціонал (1) входить добуток параметрів $dk \cdot dd$, а у виразах, які застосовуються в градієнтних методах для знаходження оптимальних значень параметрів, а саме $dk_{i+1} = dk_i - \varepsilon_1 \frac{\partial I}{\partial dk}$, $dd_{i+1} =$

$dd_i - \varepsilon_2 \frac{\partial I}{\partial dd}$, де $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ – малі додатні величини,

використовуються тільки перші похідні функціонала якості від зазначених параметрів. Це заважає повною мірою врахувати взаємний вплив параметрів, що оптимізуються.

Щоб врахувати взаємний вплив параметрів, які оптимізуються, при наявності нелінійних членів у функціоналі якості, доцільно, виходячи з фізичного змісту похідних, використати, крім перших, і другі похідні, а також змішані похідні від функціонала якості по названих параметрах, тобто вирази для послідовного знаходження цих параметрів записати таким чином:

$$dk_{i+1} = dk_i - \varepsilon_1 \left[\frac{\partial I}{\partial dk} + \frac{\partial^2 I}{\partial dk^2} (dk_{i+1} - dk_i) + \frac{\partial^2 I}{\partial dk \partial dd} (dd_{i+1} - dd_i) \right], \quad (4)$$

$$dd_{i+1} = dd_i - \varepsilon_2 \left[\frac{\partial I}{\partial dd} + \frac{\partial^2 I}{\partial dd^2} (dd_{i+1} - dd_i) + \frac{\partial^2 I}{\partial dk \partial dd} (dk_{i+1} - dk_i) \right].$$

Запишемо систему рівнянь (4) у вигляді

$$\begin{pmatrix} 1 + \varepsilon_1 \frac{\partial^2 I}{\partial dk^2} & \varepsilon_1 \frac{\partial^2 I}{\partial dk \partial dd} \\ \varepsilon_2 \frac{\partial^2 I}{\partial dk \partial dd} & 1 + \varepsilon_2 \frac{\partial^2 I}{\partial dd^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta dk_{i+1} \\ \Delta dd_{i+1} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \frac{\partial I}{\partial dk} \\ \varepsilon_2 \frac{\partial I}{\partial dd} \end{pmatrix}, \quad (5)$$

де введені позначення

$$\begin{aligned} \Delta dk_{i+1} &= dk_{i+1} - dk_i, \\ \Delta dd_{i+1} &= dd_{i+1} - dd_i. \end{aligned} \quad (6)$$

Розв'язавши цю систему рівнянь, матимемо

$$\begin{aligned} \Delta dk_{i+1} &= \frac{\Delta k_{i+1}}{\Delta_{i+1}}, \\ \Delta dd_{i+1} &= \frac{\Delta d_{i+1}}{\Delta_{i+1}}, \end{aligned} \quad (7)$$

де визначниками є:

$$\Delta_{i+1} = \begin{vmatrix} 1 + \varepsilon_1 \frac{\partial^2 I}{\partial dk^2} & \varepsilon_1 \frac{\partial^2 I}{\partial dk \partial dd} \\ \varepsilon_2 \frac{\partial^2 I}{\partial dk \partial dd} & 1 + \varepsilon_2 \frac{\partial^2 I}{\partial dd^2} \end{vmatrix},$$

$$\Delta k_{i+1} = \begin{vmatrix} -\varepsilon_1 \frac{\partial I}{\partial dk} & \varepsilon_1 \frac{\partial^2 I}{\partial dk \partial dd} \\ -\varepsilon_2 \frac{\partial I}{\partial dd} & 1 + \varepsilon_2 \frac{\partial^2 I}{\partial dd^2} \end{vmatrix},$$

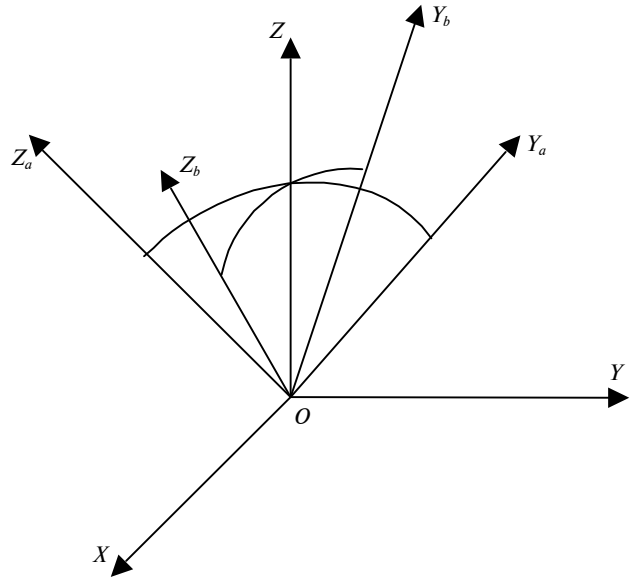
$$\Delta d_{i+1} = \begin{vmatrix} 1 + \varepsilon_1 \frac{\partial^2 I}{\partial dk^2} & -\varepsilon_1 \frac{\partial I}{\partial dk} \\ \varepsilon_2 \frac{\partial^2 I}{\partial dk \partial dd} & -\varepsilon_2 \frac{\partial I}{\partial dd} \end{vmatrix}.$$

Таким чином, знайдено вирази для послідовного знаходження уточнених значень параметрів, в яких враховано їх взаємний вплив. Як малі додатні величини $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ доцільно використовувати випадкові величини, які рівномірно розподілені на заданому числовому інтервалі, меншому одиниці.

Якщо необхідно знайти максимум функціонала (1), то треба у виразах (4) і (5) змінити знаки перед $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ на протилежні. Як видно, зазначений метод можна легко поширити на більшу кількість змінних і параметрів оптимізації.

Приклад застосування

Розглянемо можливість застосування наведеного методу для компенсації похибок блока датчика кутових швидкостей (БДКШ), який виконано на базі динамічно настроюваних гіроскопів, осі чутливості яких розташовані по конусу у двох взаємно перпендикулярних площинах (рисунок).



Системи координат, зв'язані з осями чутливостей блока датчика кутових швидкостей OY_a, OZ_a, OY_b, OZ_b і з осями об'єкта OX, OY, OZ

Кут між віссю OZ системи координат, зв'язаної з об'єктом, на якому розташований БДКШ, та осями чутливості OZ_a, OZ_b, OY_a, OY_b датчиків, становить $\alpha = 45$ кут. град. Проекції кутової швидкості об'єкта на осі чутливості датчиків визначаються виразами

$$\begin{aligned} za &= \cos\alpha(-\omega_y + \omega_z), \\ ya &= \cos\alpha(\omega_y + \omega_z), \\ zb &= \cos\alpha(\omega_x + \omega_z), \\ yb &= \cos\alpha(-\omega_x + \omega_z), \end{aligned} \quad (8)$$

де za, ya, zb, yb – проекції кутової швидкості об'єкта на осі чутливості датчиків; $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ – проекції кутової швидкості об'єкта на осі OX, OY, OZ . Показання датчиків, відповідно, визначаються як

$$\begin{aligned}
 wza &= kza \cdot za + dza, \\
 wya &= kya \cdot ya + dya, \\
 wzb &= kzb \cdot zb + dzb, \\
 wyb &= kyb \cdot yb + dyb,
 \end{aligned} \tag{9}$$

де kza, kya, kzb, kyb – коефіцієнти передачі датчиків із врахуванням похибок; dza, dya, dzb, dyb – зміщення нуля датчиків.

Визначимо відхилення квадрата істинної кутової швидкості від квадрата кутової швидкості, який розраховується на основі даних, одержаних із датчиків. Для цього з формул (8) і (9) виразимо величини оцінок проекцій кутової швидкості $\omega_{xo}, \omega_{yo}, \omega_{zo}$ через показання датчиків, а потім знайдемо ω_o^2 за формулою $\omega_o^2 = \omega_{xo}^2 + \omega_{yo}^2 + \omega_{zo}^2$. Матимемо

$$\begin{aligned}
 \omega_o^2 &= 0,625(wza^2 + wya^2 + wzb^2 + wyb^2) + \\
 &+ 0,25(wya \cdot wyb + wya \cdot wzb + wza \cdot wyb + wza \cdot wzb) - \\
 &- 0,75(wya \cdot wza + wyb \cdot wzb). \tag{10}
 \end{aligned}$$

Відхилення квадрата істинної кутової швидкості $\omega^2 = \omega_x^2 + \omega_y^2 + \omega_z^2$ від ω_o^2 можна оцінювати з формули

$$A_o = |\omega^2 - \omega_o^2|. \tag{11}$$

Аналогічно для визначення функціонала якості запишемо величину, яка характеризує відхилення квадрата істинної кутової швидкості від квадрата модуля кутової швидкості, обчисленого за відкорегованими показаннями датчиків

$$\begin{aligned}
 A &= \omega^2 - 0,625(wzak^2 + wyak^2 + wzbk^2 + wybk^2) - \\
 &- 0,25(wyak \cdot wybk + wyak \cdot wzbk + \\
 &+ wzak \cdot wybk + wzak \cdot wzbk) + \\
 &+ 0,75(wyak \cdot wzak + wybk \cdot wzbk), \tag{12}
 \end{aligned}$$

де $wzak, wyak, wzbk, wybk$ – відкореговані показання датчиків:

$$\begin{aligned}
 wzak &= wza + dkza(wza + ddza) + ddza, \\
 wyak &= wya + dky a(wya + ddy a) + ddy a, \\
 wzbk &= wz b + dkz b(wz b + ddz b) + ddz b, \\
 wybk &= wyb + dky b(wyb + ddy b) + ddy b,
 \end{aligned} \tag{13}$$

де $dkza, dky a, dkz b, dky b$ – параметри, які компенсують похибку відповідних коефіцієнтів передачі датчиків; $ddza, ddy a, ddz b, ddy b$ – параметри, які компенсують відповідні зміщення нуля датчиків.

Крім того, для формування функціонала якості також використовувалася величина, яка характеризує різницю відкорегованих показань датчиків на вісь симетрії OZ , а саме

$$A_1 = wzak + wyak - wzbk - wybk. \tag{14}$$

Таким чином, функціонал критерію якості задамо виразом

$$I = 0,5(A^2 + A_1^2). \tag{15}$$

Тепер, згідно з наведеною методикою, знайдемо похідні від I як функції багатьох змінних. Матимемо

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial I}{\partial dkza} &= A \frac{\partial A}{\partial dkza} + A_1 \frac{\partial A_1}{\partial dkza}, \dots, \frac{\partial I}{\partial dkyb} = A \frac{\partial A}{\partial dkyb} + \\
 &+ A_1 \frac{\partial A_1}{\partial dkyb}, \\
 \frac{\partial I}{\partial ddza} &= A \frac{\partial A}{\partial ddza} + A_1 \frac{\partial A_1}{\partial ddza}, \dots, \frac{\partial I}{\partial ddyb} = A \frac{\partial A}{\partial ddyb} + \\
 &+ A_1 \frac{\partial A_1}{\partial ddyb},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^2 I}{\partial dkza^2} &= \left(\frac{\partial A}{\partial dkza} \right)^2 + A \frac{\partial^2 A}{\partial dkza^2} + \\
 &+ \left(\frac{\partial A_1}{\partial dkza} \right)^2 + A_1 \frac{\partial^2 A_1}{\partial dkza^2}, \dots, \frac{\partial^2 I}{\partial dkyb^2} = \left(\frac{\partial A}{\partial dkyb} \right)^2 + \\
 &+ A \frac{\partial^2 A}{\partial dkyb^2} + \left(\frac{\partial A_1}{\partial dkyb} \right)^2 + A_1 \frac{\partial^2 A_1}{\partial dkyb^2}, \tag{16}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^2 I}{\partial ddza^2} &= \left(\frac{\partial A}{\partial ddza} \right)^2 + A \frac{\partial^2 A}{\partial ddza^2} + \\
 &+ \left(\frac{\partial A_1}{\partial ddza} \right)^2 + A_1 \frac{\partial^2 A_1}{\partial ddza^2}, \dots, \frac{\partial^2 I}{\partial ddyb^2} = \left(\frac{\partial A}{\partial ddyb} \right)^2 + \\
 &+ A \frac{\partial^2 A}{\partial ddyb^2} + \left(\frac{\partial A_1}{\partial ddyb} \right)^2 + A_1 \frac{\partial^2 A_1}{\partial ddyb^2},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^2 I}{\partial ddza \partial dkza} &= \\
 &= \frac{\partial A}{\partial dkza} \frac{\partial A}{\partial ddza} + A \frac{\partial^2 A}{\partial ddza \partial dkza} + \frac{\partial A_1}{\partial dkza} \frac{\partial A_1}{\partial ddza} + \\
 &+ A_1 \frac{\partial^2 A_1}{\partial ddza \partial dkza}, \dots, \frac{\partial^2 I}{\partial ddyb \partial dkyb} = \frac{\partial A}{\partial dkyb} \frac{\partial A}{\partial ddyb} + \\
 &+ A \frac{\partial^2 A}{\partial ddyb \partial dkyb} + \frac{\partial A_1}{\partial dkyb} \frac{\partial A_1}{\partial ddyb} + A_1 \frac{\partial^2 A_1}{\partial ddyb \partial dkyb}.
 \end{aligned}$$

Далі знайдемо похідні від A і A_1 :

$$\frac{\partial A}{\partial ddza} = Iza(dkza + 1), \dots, \frac{\partial A}{\partial ddyb} = Iyb(dkyb + 1),$$

де

$$Iza = -1,3wzak - 0,25(wybk + wzbk) + 0,75wyak;$$

$$Iya = -1,3wyak - 0,25(wybk + wzbk) + 0,75wzak;$$

$$Izb = -1,3wzbk - 0,25(wyak + wzak) + 0,75wybk;$$

$$Iyb = -1,3wybk - 0,25(wyak + wzak) + 0,75wybk;$$

$$\frac{\partial A}{\partial dkza} = Iza(wza + ddza), \dots, \frac{\partial A}{\partial dkyb} = Iyb(wyb + ddyb),$$

$$\frac{\partial^2 A}{\partial ddza \partial dkza} = -1,3(wza + ddza)(dkza + 1) +$$

$$+ Iza, \dots, \frac{\partial^2 A}{\partial ddyb \partial dkyb} =$$

$$= -1,3(wyb + ddyb)(dkyb + 1) + Iyb,$$

$$\frac{\partial^2 A}{\partial ddza^2} = -1,3(dkza + 1)^2, \dots, \frac{\partial^2 A}{\partial ddyb^2} =$$

$$= -1,3(dkyb + 1)^2, \quad (17)$$

$$\frac{\partial^2 A}{\partial dkza^2} = -1,3(wza + ddza)^2, \dots, \frac{\partial^2 A}{\partial dkyb^2} =$$

$$= -1,3(wyb + ddyb)^2,$$

$$\frac{\partial A_1}{\partial ddza} = dkza + 1, \quad \frac{\partial A_1}{\partial ddya} = dkyb + 1,$$

$$\frac{\partial A_1}{\partial ddzb} = -dkzb - 1, \quad \frac{\partial A_1}{\partial ddyb} = -dkyb - 1,$$

$$\frac{\partial A_1}{\partial dkza} = wza + ddza, \quad \frac{\partial A_1}{\partial dkya} = wya + ddya,$$

$$\frac{\partial A_1}{\partial dkzb} = -wzb - ddzb, \quad \frac{\partial A_1}{\partial dkyb} = -wyb - ddyb,$$

$$\frac{\partial^2 A_1}{\partial ddza^2} = \frac{\partial^2 A_1}{\partial ddya^2} = \frac{\partial^2 A_1}{\partial ddzb^2} = \frac{\partial^2 A_1}{\partial ddyb^2} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 A_1}{\partial dkza^2} = \frac{\partial^2 A_1}{\partial dkya^2} = \frac{\partial^2 A_1}{\partial dkzb^2} = \frac{\partial^2 A_1}{\partial dkyb^2} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 A_1}{\partial ddza \partial dkza} = \frac{\partial^2 A_1}{\partial ddya \partial dkya} = 1,$$

$$\frac{\partial^2 A_1}{\partial ddzb \partial dkzb} = \frac{\partial^2 A_1}{\partial ddyb \partial dkyb} = -1.$$

Підставивши вирази (17) в (16), дістанемо значення похідних від I . Тепер можна скласти системи рівнянь, аналогічні формулам (5) і (6). Розв'язавши ці системи так, як (7), матимемо

$$dkza_{i+1} = dkza_i + \frac{\Delta kza_{i+1}}{\Delta za_{i+1}}, \quad (18)$$

$$ddza_{i+1} = ddza_i + \frac{\Delta dza_{i+1}}{\Delta za_{i+1}},$$

де визначниками є:

$$\Delta kza_{i+1} = \begin{vmatrix} -\varepsilon za_1 \frac{\partial I_i}{\partial dkza} & \varepsilon za_1 \frac{\partial^2 I_i}{\partial dkza \partial ddza} \\ -\varepsilon za_2 \frac{\partial I_i}{\partial ddza} & 1 + \varepsilon za_2 \frac{\partial^2 I_i}{\partial ddza^2} \end{vmatrix},$$

$$\Delta dza_{i+1} = \begin{vmatrix} 1 + \varepsilon za_1 \frac{\partial^2 I_i}{\partial dkza^2} & -\varepsilon za_1 \frac{\partial I_i}{\partial dkza} \\ \varepsilon za_2 \frac{\partial^2 I_i}{\partial dkza \partial ddza} & -\varepsilon za_2 \frac{\partial I_i}{\partial ddza} \end{vmatrix},$$

$$\Delta za_{i+1} = \begin{vmatrix} 1 + \varepsilon za_1 \frac{\partial^2 I_i}{\partial dkza^2} & \varepsilon za_1 \frac{\partial^2 I_i}{\partial dkza \partial ddza} \\ \varepsilon za_2 \frac{\partial^2 I_i}{\partial dkza \partial ddza} & 1 + \varepsilon za_2 \frac{\partial^2 I_i}{\partial ddza^2} \end{vmatrix};$$

$$dkya_{i+1} = dkya_i + \frac{\Delta kya_{i+1}}{\Delta ya_{i+1}}, \quad (19)$$

$$ddy_{i+1} = ddy_i + \frac{\Delta dya_{i+1}}{\Delta ya_{i+1}},$$

де визначниками є:

$$\Delta kya_{i+1} = \begin{vmatrix} -\varepsilon ya_1 \frac{\partial I_i}{\partial dkya} & \varepsilon ya_1 \frac{\partial^2 I_i}{\partial dkya \partial ddy} \\ -\varepsilon ya_2 \frac{\partial I_i}{\partial ddy} & 1 + \varepsilon ya_2 \frac{\partial^2 I_i}{\partial ddy^2} \end{vmatrix},$$

$$\Delta dya_{i+1} = \begin{vmatrix} 1 + \varepsilon ya_1 \frac{\partial^2 I_i}{\partial dky a^2} & -\varepsilon ya_1 \frac{\partial I_i}{\partial dky a} \\ \varepsilon ya_2 \frac{\partial^2 I_i}{\partial dky a \partial ddy a} & -\varepsilon ya_2 \frac{\partial I_i}{\partial ddy a} \end{vmatrix}, \quad \Delta dyb_{i+1} = \begin{vmatrix} 1 + \varepsilon yb_1 \frac{\partial^2 I_i}{\partial dky b^2} & -\varepsilon yb_1 \frac{\partial I_i}{\partial dky b} \\ \varepsilon yb_2 \frac{\partial^2 I_i}{\partial dky b \partial ddy b} & -\varepsilon yb_2 \frac{\partial I_i}{\partial ddy b} \end{vmatrix},$$

$$\Delta ya_{i+1} = \begin{vmatrix} 1 + \varepsilon ya_1 \frac{\partial^2 I_i}{\partial dky a^2} & \varepsilon ya_1 \frac{\partial^2 I_i}{\partial dky a \partial ddy a} \\ \varepsilon ya_2 \frac{\partial^2 I_i}{\partial dky a \partial ddy a} & 1 + \varepsilon ya_2 \frac{\partial^2 I_i}{\partial ddy a^2} \end{vmatrix}; \quad \Delta yb_{i+1} = \begin{vmatrix} 1 + \varepsilon yb_1 \frac{\partial^2 I_i}{\partial dky b^2} & \varepsilon yb_1 \frac{\partial^2 I_i}{\partial dky b \partial ddy b} \\ \varepsilon yb_2 \frac{\partial^2 I_i}{\partial dky b \partial ddy b} & 1 + \varepsilon yb_2 \frac{\partial^2 I_i}{\partial ddy b^2} \end{vmatrix}.$$

$$dkzb_{i+1} = dkzb_i + \frac{\Delta kzb_{i+1}}{\Delta zb_{i+1}},$$

$$ddzb_{i+1} = ddzb_i + \frac{\Delta dzb_{i+1}}{\Delta zb_{i+1}},$$

де визначниками є:

$$\Delta kzb_{i+1} = \begin{vmatrix} -\varepsilon zb_1 \frac{\partial I_i}{\partial dkzb} & \varepsilon zb_1 \frac{\partial^2 I_i}{\partial dkzb \partial ddzb} \\ -\varepsilon zb_2 \frac{\partial I_i}{\partial ddzb} & 1 + \varepsilon zb_2 \frac{\partial^2 I_i}{\partial ddzb^2} \end{vmatrix},$$

$$\Delta dzb_{i+1} = \begin{vmatrix} 1 + \varepsilon zb_1 \frac{\partial^2 I_i}{\partial dkzb^2} & -\varepsilon zb_1 \frac{\partial I_i}{\partial dkzb} \\ \varepsilon zb_2 \frac{\partial^2 I_i}{\partial dkzb \partial ddzb} & -\varepsilon zb_2 \frac{\partial I_i}{\partial ddzb} \end{vmatrix},$$

$$\Delta zb_{i+1} = \begin{vmatrix} 1 + \varepsilon zb_1 \frac{\partial^2 I_i}{\partial dkzb^2} & \varepsilon zb_1 \frac{\partial^2 I_i}{\partial dkzb \partial ddzb} \\ \varepsilon zb_2 \frac{\partial^2 I_i}{\partial dkzb \partial ddzb} & 1 + \varepsilon zb_2 \frac{\partial^2 I_i}{\partial ddzb^2} \end{vmatrix};$$

$$dkyb_{i+1} = dkyb_i + \frac{\Delta kyb_{i+1}}{\Delta yb_{i+1}},$$

$$ddyb_{i+1} = ddyb_i + \frac{\Delta dyb_{i+1}}{\Delta yb_{i+1}},$$

де визначниками є:

$$\Delta kyb_{i+1} = \begin{vmatrix} -\varepsilon yb_1 \frac{\partial I_i}{\partial dkyb} & \varepsilon yb_1 \frac{\partial^2 I_i}{\partial dkyb \partial ddyb} \\ -\varepsilon yb_2 \frac{\partial I_i}{\partial ddyb} & 1 + \varepsilon yb_2 \frac{\partial^2 I_i}{\partial ddyb^2} \end{vmatrix},$$

Випадкові величини із формул (18)–(21) $\varepsilon za_1 \in (0, 1)$, $\varepsilon za_2 \in (0, 1)$, $\varepsilon ya_1 \in (0, 1)$, $\varepsilon ya_2 \in (0, 1)$, $\varepsilon zb_1 \in (0, 1)$, $\varepsilon zb_2 \in (0, 1)$, $\varepsilon yb_1 \in (0, 1)$, $\varepsilon yb_2 \in (0, 1)$ мають рівномірне розподілення в зазначених інтервалах.

Таким чином, одержано вирази для знаходження параметрів, використання яких у формулах (13) дає можливість частково компенсувати похибки вимірювачів і мінімізувати критерій (15).

Математичне моделювання

Для перевірки ефективності розглянутого методу було проведено математичне моделювання процесу мінімізації критерію (15). При цьому як істинна величина ω використовувалася кутова швидкість обертання Землі навколо своєї осі. В процесі моделювання вибиралися параметри, які відповідали мінімальному значенню величини I серед мінімальних значень I , що обчислювалися при різних значеннях випадкових величин εza_1 , εza_2 , ..., εzb_1 , εzb_2 . Початкові значення параметрів були нульовими. Знайдені в процесі мінімізації параметри потім використовувалися для корегування показань датчиків у процесі основної роботи при кутових швидкостях, які на кілька порядків перевищували кутову швидкість обертання Землі. Для оцінки ефективності алгоритму використовувалося відношення коренів квадратних із сум квадратів відхилень від істинних значень проекцій кутової швидкості на осі чутливості датчиків і відповідних показань датчиків, а також їх відкорегованих значень. Розрахунки проводилися при різних орієнтаціях осей чутливості датчиків відносно осі обертання Землі, при різних кутових швидкостях руху в процесі основної роботи та при різних значеннях похибок датчиків. Результати моделювання наведено в таблиці.

З даних таблиці видно, що в процесі початкового виставлення при відкиданні максимального і мінімального значень математичне сподівання відношення коренів квадратних із сум квадратів відхилень від істинних значень проекцій кутової швидкості на осі чутливості датчиків і відповідних показань датчиків, а також їх відкорегованих значень дорівнює 1,3674, середньоквадратичне відхилення – 0,2251. У процесі руху з наведеними в таблиці кутовими швидкостями при відкиданні максимального і мінімального значень математичне сподівання відношення квадратних коренів із сум квадратів відхилень від істинних значень проекцій кутової швидкості на осі чутливості датчиків і відповідних показань датчиків, а також їх відкорегованих значень дорівнює 1,1730, середньоквадратичне відхилення – 0,1017, а математичне сподівання відношення модулів відхилень від квадрата істинного значення кутової швидкості квадрата кутової швидкості, обчисленої за показаннями датчиків, а також

за їх відкорегованими значеннями, дорівнює 1,1293, середньоквадратичне відхилення – 0,3951. З наведених результатів випливає, що після корекції похибки показань датчиків зменшилися в середньому на 12%. Проведене математичне моделювання процесу мінімізації критерію (15) при використанні методу найшвидшого спуску без застосованих поліпшень дає гірші результати.

Висновки

Запропонований поліпшений метод найшвидшого спуску може бути використаний для синтезу систем автоматичного керування, зокрема для компенсації похибок датчиків первинної інформації. В подальшому буде проведено аналіз повторюваності параметрів, які знаходяться за допомогою цього методу для компенсації похибок зазначених датчиків.

Г.Е. Янкелевич, С.П. Маляров, В.Г. Цирук

УЛУЧШЕННЫЙ МЕТОД НАИСКОРЕЙШЕГО СПУСКА

Предлагается улучшенный метод наискорейшего спуска, который учитывает вторые и смешанные производные по оптимизируемым параметрам от функционала критерия качества. Рассматривается пример применения этого метода для коррекции погрешностей масштабного коэффициента и смещения нуля датчиков первичной информации.

G.Ye. Yankelevich, S.P. Malyarov, V.G. Tsiрук

IMPROVED METHOD OF THE QUICKEST DESCENT

This study proposes the improved method of the quickest descent, which takes into account the second and mixed derivatives on optimized parameters of a quality criterion. We demonstrate this with the method application for the correction of scale factor errors and a zero displacement of the primary information gauges.

1. *Заинцев И.В.* Нейронные сети: основные модели. – Воронеж: ВГУ, 1999. – 76 с.

2. *Уоссерман Ф.* Нейрокомпьютерная техника. – М.: Мир, 1992. – 118 с.

Рекомендована Радою НАЦ критичних технологій навігаційного приладобудування НТУУ "КПІ"

Надійшла до редакції
4 лютого 2008 року

Таблиця. Співвідношення похибок вимірювання кутових швидкостей

| Параметри початкового виставлення і наступного руху: широта f , град, азимут r , град, кутові швидкості руху $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ (рад/с) | У процесі початкового виставлення при кутовій швидкості Землі $\omega = 4,848 \cdot 10^{-6}$ (рад/с) | | | | | | | | У процесі руху з кутовими швидкостями $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ | | |
|---|--|---------------|---------------|---------------|--|------------|------------|------------|--|--|--|
| | Параметри датчиків | | | | | | | | Відношення квадратних коренів суми квадратів відхилень від істинних кутових швидкостей по вимірювальних осях без корекції та з корекцією | Відношення квадратних коренів суми квадратів відхилень від істинних кутових швидкостей по вимірювальних осях без корекції та з корекцією | Відношення модулів відхилень від істинних кутових швидкостей без корекції та з корекцією |
| | Передавальні коефіцієнти і їх корегувальні параметри | | | | Зміщення сигналів (рад/с) ($\times 10^{-8}$) і їх корегувальні параметри | | | | | | |
| | $kza/dkza$ | $kzb/dkzb$ | $kya/dkya$ | $kyb/dkyb$ | $dza/ddza$ | $dzb/ddzb$ | $dya/ddya$ | $dzb/ddzb$ | | | |
| $f=50, r=25, \omega_x=-1,3, \omega_y=0,1, \omega_z=-1,5$ | 1,02/0,0028 | 1,01/-0,0064 | 0,99/0,0034 | 1,03/-0,0011 | -3/4,0035 | 2/-2,5581 | -2/2,6352 | 4/-3,2484 | 1,8985 | 1,1445 | 1,3021 |
| $f=50, r=25, \omega_x=-1,3, \omega_y=-0,1, \omega_z=-1,5$ | 0,98/0,0018 | 1,01/-0,0051 | 0,99/0,0039 | 0,98/-0,0009 | -3/3,6665 | 2/-2,2567 | -5/2,8642 | -4/-3,4754 | 1,8985 | 1,3398 | 19,4447 |
| $f=50, r=25, \omega_x=-1,3, \omega_y=0,1, \omega_z=-1,5$ | 0,98/0,0008 | 1,01/0,0004 | 0,99/0,0024 | 0,98/-0,0003 | 5/0,91436 | -2/0,16408 | -5/1,2837 | -4/-1,1029 | 1,8985 | 1,0273 | 0,90203 |
| $f=50, r=25, \omega_x=-1,3, \omega_y=0,1, \omega_z=-1,5$ | 0,983/0,0020 | 1,004/-0,0027 | 0,993/0,0032 | 0,986/-0,0005 | -5/2,3217 | 2/-1,9988 | -3/2,4788 | -4/-2,2675 | 1,8985 | 1,2442 | 0,5667 |
| $f=50, r=25, \omega_x=0,3, \omega_y=0,1, \omega_z=1,5$ | 0,983/0,0017 | 1,004/-0,0035 | 0,993/0,0027 | 0,986/-0,0008 | -5/2,5867 | 2/-0,2150 | -3/1,9301 | -4/-2,4478 | 1,8985 | 1,1179 | 0,96379 |
| $f=50, r=65, \omega_x=0,3, \omega_y=0,1, \omega_z=1,5$ | 0,987/0,0006 | 1,01/-0,0004 | 0,99/0,0074 | 0,989/-0,0017 | 5/1,8601 | 2/-2,2923 | -5/3,9484 | 4/-1,9782 | 1,8985 | 1,131 | 1,9335 |
| $f=20, r=65, \omega_x=0,3, \omega_y=-1,1, \omega_z=1,2$ | 0,987/0,0005 | 1,005/0,0001 | 0,991/0,0108 | 0,989/0,0003 | -2/-0,5312 | -2/0,13072 | -5/4,9249 | 4/-3,5415 | 8,6 | 1,0332 | 1,0176 |
| $f=40, r=35, \omega_x=-1,3, \omega_y=0,1, \omega_z=-1,5$ | 0,995/0,0007 | 1,003/0,0006 | 0,99/0,0062 | 0,994/0,0000 | -5/1,8549 | -2/0,21991 | -5/2,9611 | -4/-3,0256 | 1,8985 | 1,3615 | 0,4134 |
| $f=20, r=45, \omega_x=-1,3, \omega_y=0,1, \omega_z=-1,5$ | 1,007/-0,0009 | 1,01/-0,0028 | 0,994/-0,0028 | 1,003/-0,0004 | -3/1,478 | -2/-2,1249 | 2/-1,4205 | -4/1,0401 | 1,8985 | 1,2333 | 1,2203 |
| $f=20, r=45, \omega_x=1,1, \omega_y=1,1, \omega_z=-0,5$ | 1,007/-0,0009 | 1,01/-0,0023 | 0,994/-0,0021 | 1,003/-0,0004 | -3/1,4028 | -2/-1,515 | 2/-1,2082 | -4/0,70558 | 1,8985 | 1,1186 | 1,1287 |
| Математичне сподівання | | | | | | | | | 1,3674 | 1,1730 | 1,1293 |
| Середньоквадратичне відхилення | | | | | | | | | 0,2251 | 0,1017 | 0,3951 |

ПРОБЛЕМИ БІОТЕХНОЛОГІЇ

УДК 577.152.3

М.А. Григор'єва, В.В. Клочко,
Т.С. Тодосійчук

ОПТИМІЗАЦІЯ СКЛАДУ ПОЖИВНОГО СЕРЕДОВИЩА ДЛЯ БІОСИНТЕЗУ ФЕРМЕНТНОГО КОМПЛЕКСУ ПРОДУЦЕНТОМ р. *Streptomyces*

Вступ

Серед ряду біологічно активних речовин ферменти посідають одне з провідних місць у практичному застосуванні в різних галузях промисловості, народного господарства та медицини. Слід також зазначити, що за економічністю і ефективністю отримання таких препаратів саме біотехнологічний спосіб є найдоцільнішим. Тому закономірно, що в усьому світі науковці і біоінженери активно працюють у напрямку пошуку нових продуцентів ензимів та вдосконалення методів їх отримання.

До основних факторів, які впливають на рівень біосинтезу мікроорганізмами ферментів, крім умов культивування, слід віднести склад поживного середовища та співвідношення його окремих компонентів. Значна кількість наукової літератури присвячена саме питанню впливу компонентів середовища на біосинтез ферментів, оптимізації поживних середовищ для культивування різних продуцентів, в тому числі й стрептоміцетів, що продукують широкий спектр ензимів. Так, при вирощуванні *Streptomyces olivaceoviridis* E-86 – продуценту ксиланази – було показано, що ксилан і м'ясний пептон – найкращі джерела вуглецю й азоту, відповідно. Також відзначалося підвищення ферментативної активності в два рази при внесенні в середовище 1,5% (за об'ємом) твіну-80 [1]. Вивчалися утворення штамом *Streptomyces sp.* F 2621 ендоксиланази, ендоглюканази і пероксидази на основному середовищі з солями і дріжджовим екстрактом, що містить різні джерела вуглецю. Найбільші активності ендоглюканази (22,4 од/мл) і пероксидази (0,58 од/мл) були виявлені після двох–чотирьох днів інкубації при 30 °С на основному середовищі, що містило 0,4% ксилану і 0,6% дріжджового екстракту. Це відповідало співвідношенню С:N = 6:1 [2].

Штам *S. lavendulae* NCIM 2421 синтезує ендо- і екзоклітинну холестеролоксидазу (COD).

Оптимальним субстратом для біосинтезу ферменту був картопляний крохмаль – через 72 год культивування активність позаклітинного ферменту становила 2 од/мл. У бульйоні культура також синтезувала внутрішньоклітинну COD з активністю до 104,3 од/мл [3]. Штам *Streptomyces sp.* АМТ-3 мав високу ксиланолітичну активність на середовищі, що містило комерційні ксилани та агропромислові відходи. Найбільший синтез ксиланази (до 70 од/мл) спостерігався на середовищі з ксиланом з деревини; ксилан з пивоварної барди давав активність лише на рівні 16 од/мл [4].

Штам *Streptomyces recifensis var. lyticus* 2435/М при вирощуванні на середовищах на основі соєвого борошна, глюкози та крохмалю синтезує літичний ферментний комплекс, до складу якого входять протеази, протеїнази, глікозидази та мурамідази [5]. Отриманий під час селекційної роботи із застосуванням мутагенезу продуцент має достатньо високий рівень біосинтезу продукту, який можна використовувати як основу медичних та побутових антисептичних засобів широкого спектра антимікробної дії [6].

При врахуванні специфічності процесів біосинтезу ферментів постає питання щодо необхідності досліджень умов культивування і поживних середовищ для оптимального росту штамів-продуцентів і високого рівня синтезу ензимів.

Постановка задачі

Потенційно широкі сфери практичного застосування ферментного комплексу, що синтезується *Streptomyces recifensis var. lyticus* 2435/М, зумовлюють необхідність оптимізації умов його отримання, в тому числі й оптимізації складу поживного середовища на основі попередньо проведених досліджень. Встановлення впливу окремих компонентів середовища на біосинтетичну здатність продуцента та їх оптимального співвідношення дасть можливість збільшити вихід продукту та в цілому підвищити ефективність біотехнологічного процесу його отримання.

Метою даного дослідження було встановлення впливу основних та альтернативних компонентів поживного середовища на рівень біосинтезу ферментного комплексу *Streptomyces recifensis var. lyticus* 2435/М та розробка оптимізованого поживного середовища за ознакою цільової (літичної) активності продукту.

Матеріали і методи дослідження

Об'єктом дослідження був мікробний продуцент лізоензимного комплексу *Streptomyces recifensis* var. *lyticus* 2435/М, депонований за номером ІМВ Ас-5001, з музею кафедри промислової біотехнології НТУУ "КПІ". Культуру вирощували на рідкому середовищі Чапека (посівному) та раніше підбраному ферментаційному поживному середовищі [7, 8], а також на модифікованих експериментальних середовищах, в яких містились попередньо досліджені аеросил і альтернативне джерело азоту та вуглецю, а саме спеціально оброблене ІЧ-опромінюванням для підвищення поживної ціннос-

ті соєве борошно із серії "пробуджених продуктів" виробництва ТОВ "ЕСО" (Україна) [9].

Отримання посівного матеріалу відбувалось на рідкому середовищі Чапека в колбах на 250 мл із 100 мл поживного середовища на качалках при частоті обертання 220 хв^{-1} протягом 48 год при температурі $28 \pm 1^\circ\text{C}$. Культивування проводилось у колбах Ерленмейера на 750 мл з 200 мл ферментаційного середовища на качалках при частоті обертання 240 хв^{-1} протягом 96 год при температурі $28 \pm 1^\circ\text{C}$.

Поживне середовище оптимізували за вмістом джерел вуглецевого, азотного і фосфорного живлення, а також за вмістом мікроелементів. За контроль брали попередньо розроблене сере-

Таблиця 1. Схема планування експерименту: вісім факторів на чотирьох рівнях [10]

| № п/п | Рівні | Фактор | | | | | | | |
|----------|-------|--------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| | | X_1 | X_2 | X_3 | X_4 | X_5 | X_6 | X_7 | X_8 |
| 1 | | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 2 | | 1 | 2 | 1 | 3 | 4 | 4 | 2 | 3 |
| 3 | | 1 | 3 | 2 | 1 | 3 | 4 | 4 | 2 |
| 4 | | 1 | 4 | 2 | 3 | 2 | 1 | 3 | 4 |
| 5 | | 1 | 1 | 3 | 4 | 4 | 2 | 3 | 2 |
| 6 | | 1 | 2 | 3 | 2 | 1 | 3 | 4 | 4 |
| 7 | | 1 | 3 | 4 | 4 | 2 | 3 | 2 | 1 |
| 8 | | 1 | 4 | 4 | 2 | 3 | 2 | 1 | 3 |
| 9 | | 2 | 2 | 3 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 |
| 10 | | 2 | 1 | 3 | 4 | 3 | 3 | 1 | 4 |
| 11 | | 2 | 4 | 1 | 2 | 4 | 3 | 3 | 1 |
| 12 | | 2 | 3 | 1 | 4 | 1 | 2 | 4 | 3 |
| 13 | | 2 | 2 | 4 | 3 | 3 | 1 | 4 | 1 |
| 14 | | 2 | 1 | 4 | 1 | 2 | 4 | 3 | 3 |
| 15 | | 2 | 4 | 2 | 3 | 1 | 4 | 1 | 2 |
| 16 | | 2 | 3 | 2 | 1 | 4 | 1 | 2 | 4 |
| 17 | | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 |
| 18 | | 3 | 4 | 3 | 1 | 2 | 2 | 4 | 1 |
| 19 | | 3 | 1 | 4 | 3 | 1 | 2 | 2 | 4 |
| 20 | | 3 | 2 | 4 | 1 | 4 | 3 | 1 | 2 |
| 21 | | 3 | 3 | 1 | 3 | 2 | 4 | 1 | 4 |
| 22 | | 3 | 4 | 1 | 4 | 3 | 1 | 2 | 2 |
| 23 | | 3 | 1 | 2 | 2 | 4 | 1 | 4 | 3 |
| 24 | | 3 | 2 | 2 | 4 | 1 | 4 | 3 | 1 |
| 25 | | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 |
| 26 | | 4 | 3 | 4 | 2 | 1 | 1 | 3 | 2 |
| 27 | | 4 | 2 | 3 | 4 | 2 | 1 | 1 | 3 |
| 28 | | 4 | 1 | 3 | 2 | 3 | 4 | 2 | 1 |
| 29 | | 4 | 4 | 2 | 1 | 1 | 3 | 2 | 3 |
| 30 | | 4 | 3 | 2 | 3 | 4 | 2 | 1 | 1 |
| 31 | | 4 | 2 | 1 | 1 | 3 | 2 | 3 | 4 |
| 32 | | 4 | 1 | 1 | 3 | 2 | 3 | 4 | 2 |

довище такого складу (г/л): глюкоза ($C_6H_{12}O_6$) – 6,0 (в ферментаційному середовищі використовувались замість глюкози гідролізований крохмаль – 10,0); соєве борошно – 8,0; хлорид натрію ($NaCl$) – 14,0; фосфат калію двозаміщений (K_2HPO_4) – 2,0; сульфат магнію ($MgSO_4 \cdot 7H_2O$) – 5,8; хлорид марганцю ($MnCl_2$) – 0,04; хлорид кальцію ($CaCl_2$) – 4,5.

Для проведення експерименту використовували метод ортогональних латинських прямокутників [10]. Схему планування експерименту наведено в табл. 1. Вплив того чи іншого компонента середовища на біосинтетичну здатність культури оцінювали за рівнем літичної активності (ЛА), утворюваного штамом-продуцентом ферментного комплексу.

На основі стандартних кількісних характеристик середовищ було складено матриці за вісьмома факторами (кількість компонентів середовища) на чотирьох рівнях (концентрації кожного компонента) для подальшої роботи. Були приготовані 32 варіанти посівного і ферментаційного середовища, а також варіант з контрольним поживним середовищем (К).

Для визначення літичної активності використовували тест-культуру *Lactobacillus bulgaricus* 51 – ліофільно висушений препарат (ДП “Ензим”, м. Ладижин), яку суспендували у дистильованій воді до оптичної густини 0,7–0,8 (при 540 нм, кюветі 0,5 см). За одиницю літичної активності бралась кількість ферменту, яка знижує оптичну густину суспензії тест-культури на 0,001 за одну хвилину, при розведенні культуральної рідини, що забезпечує лізис суспензії на 25–30 %.

Визначення літичної активності культуральної рідини проводили турбідиметричним методом [11] у такій модифікації: до 4 мл суспензії тест-культури додавали 0,1–0,3 мл культуральної рідини та інкубували протягом 10 хв при 50 °С. До контрольного варіанта додавали 0,1–0,3 мл дистильованої води і інкубували в тих самих умовах. За різницею оптичної густини суспензії до (D_n) та після (D_k) інкубації визначали рівень ЛА. Оптичну густину визначали на фотоколориметрі КФК-3 при $\lambda = 540$ нм в кюветі 0,5 см (контроль – дистильована вода).

Літичну активність визначали за формулою

$$ЛА = (D_n - D_k C) N / 0,001 \tau, \text{ од/мл,}$$

де C – коефіцієнт автолізу (відношення D_n / D_k контролю); N – розведення проби в реакційній суміші, раз.

Результати і їх обговорення

Аналіз результатів попередніх досліджень впливу основних джерел живлення на біосинтетичну здатність продуцента лізоензимного комплексу *Streptomyces recifensis* var. *lyticus* 2435/М показав доцільність використання в складі ферментаційного середовища спеціально обробленого ІЧ-опромінюванням соєвого борошна [9]. У процесі роботи також було встановлено стимулюючий вплив аеросилу марки А-300, який додавали до середовища при культивуванні, а також здатність культури утилізувати не лише гідролізований, а й нативний крохмаль. Враховуючи це, у складі дослідних поживних середовищ використовували саме ці компоненти, а в контрольних варіантах – базові поживні середовища, наведені вище.

За допомогою методу ортогональних латинських прямокутників та із врахуванням стандартних кількісних характеристик середовищ були складені матриці за вісьмома факторами (кількість компонентів середовища) на чотирьох рівнях (концентрації кожного компонента).

Досліджувані варіанти поживних середовищ та отримані після проведення біосинтезу у вказаних вище умовах значення виходу продукту (лізоензимного комплексу) наведено в табл. 2 і 3.

Вихід продукту залежно від компонентного і кількісного складу варіантів поживних середовищ описувався рівнянням

$$y_{i,j,k,\dots} = b_0 + b_i + b_j + b_k + \dots + \dot{y}_{i,j,k,\dots},$$

де $y_{i,j,k,\dots}$ – похибка вимірювання.

За ортогональною схемою планування проводилась оцінка ефектів впливу для всіх рівнів кожного фактора за формулами (1) і (2) [10]:

$$b_0 = \frac{\sum_{j=1}^N y_j}{N},$$

$$b_{ik} = \frac{\sum_{j=1}^N y_{ij}^k}{N/m} - b_0,$$

де y_j – вихід в j -му варіанті планування; N – загальна кількість варіантів у плані; m – число рівнів кожного фактора; y_{ij}^k – сума виходів у тих варіантах плану, де i -й фактор знаходиться на k -му рівні.

Таблиця 2. Схема оптимізації посівного середовища і вихід продукту в досліджуваних варіантах

| № п/п | Концентрація компонентів, г/л | | | | | | | | ЛА, од/мл (вихід продукту) |
|----------|-------------------------------|------------------|------|---------------------------------|-------------------|-------------------|-------------------|---------|-------------------------------|
| | Глюкоза | Соєве борошно | NaCl | K ₂ HPO ₄ | CaCl ₂ | MgSO ₄ | MnCl ₂ | Аеросил | |
| 1 | 5 | 10 | 1 | 0,5 | 1,5 | 1 | 0 | 0 | 2230 |
| 2 | 5 | 15 | 1 | 2 | 6 | 7 | 0,04 | 5 | 2700 |
| 3 | 5 | 20 | 5 | 0,5 | 4,5 | 7 | 0,1 | 1 | 2110 |
| 4 | 5 | 25 | 5 | 2 | 3 | 1 | 0,08 | 10 | 2060 |
| 5 | 5 | 10 | 10 | 2,5 | 6 | 2,5 | 0,08 | 1 | 2820 |
| 6 | 5 | 15 | 10 | 1,5 | 1,5 | 5 | 0,1 | 10 | 2130 |
| 7 | 5 | 20 | 15 | 2,5 | 3 | 5 | 0,04 | 0 | 2250 |
| 8 | 5 | 25 | 15 | 1,5 | 4,5 | 2,5 | 0 | 5 | 1770 |
| 9 | 10 | 15 | 10 | 1,5 | 3 | 2,5 | 0,04 | 1 | 2760 |
| 10 | 10 | 10 | 10 | 2,5 | 4,5 | 5 | 0 | 10 | 2540 |
| 11 | 10 | 25 | 1 | 1,5 | 6 | 5 | 0,08 | 0 | 1920 |
| 12 | 10 | 20 | 1 | 2,5 | 1,5 | 2,5 | 0,1 | 5 | 1550 |
| 13 | 10 | 15 | 15 | 2 | 4,5 | 1 | 0,1 | 0 | 1920 |
| 14 | 10 | 10 | 15 | 0,5 | 3 | 7 | 0,08 | 5 | 1590 |
| 15 | 10 | 25 | 5 | 2 | 1,5 | 7 | 0 | 1 | 1480 |
| 16 | 10 | 20 | 5 | 0,5 | 6 | 1 | 0,04 | 10 | 1800 |
| 17 | 15 | 20 | 10 | 2 | 4,5 | 5 | 0,08 | 5 | 2390 |
| 18 | 15 | 25 | 10 | 0,5 | 3 | 2,5 | 0,1 | 0 | 1950 |
| 19 | 15 | 10 | 15 | 2 | 1,5 | 2,5 | 0,04 | 10 | 1750 |
| 20 | 15 | 15 | 15 | 0,5 | 6 | 5 | 0 | 1 | 1820 |
| 21 | 15 | 20 | 1 | 1,5 | 3 | 7 | 0 | 10 | 1620 |
| 22 | 15 | 25 | 1 | 2,5 | 4,5 | 1 | 0,04 | 1 | 1310 |
| 23 | 15 | 10 | 5 | 1,5 | 6 | 1 | 0,1 | 5 | 1710 |
| 24 | 15 | 15 | 5 | 2,5 | 1,5 | 7 | 0,08 | 0 | 1500 |
| 25 | 20 | 25 | 15 | 2,5 | 6 | 7 | 0,1 | 10 | 1450 |
| 26 | 20 | 20 | 15 | 1,5 | 1,5 | 1 | 0,08 | 1 | 2360 |
| 27 | 20 | 15 | 10 | 2,5 | 3 | 1 | 0 | 5 | 1360 |
| 28 | 20 | 10 | 10 | 1,5 | 4,5 | 7 | 0,04 | 0 | 1630 |
| 29 | 20 | 25 | 5 | 0,5 | 1,5 | 5 | 0,04 | 5 | 1930 |
| 30 | 20 | 20 | 5 | 2 | 6 | 2,5 | 0 | 0 | 1740 |
| 31 | 20 | 15 | 1 | 0,5 | 4,5 | 2,5 | 0,08 | 10 | 1690 |
| 32 | 20 | 10 | 1 | 2 | 3 | 5 | 0,1 | 1 | 1430 |
| К | | | | | | | | | 2300 |

Таблиця 3. Схема оптимізації ферментаційного середовища і рівень накопичення продукту в досліджуваних варіантах

| № п/п | Концентрація компонентів, г/л | | | | | | | | ЛА, од/мл (вихід продукту) |
|----------|-------------------------------|------------------|------|---------------------------------|-------------------|-------------------|-------------------|---------|-------------------------------|
| | Крохмаль | Соєве борошно | NaCl | K ₂ HPO ₄ | CaCl ₂ | MgCl ₂ | MnCl ₂ | Аеросил | |
| 1 | 5 | 10 | 1 | 0,5 | 1,5 | 0,5 | 0 | 0 | 2150 |
| 2 | 5 | 15 | 1 | 2 | 6 | 3 | 0,04 | 5 | 2710 |
| 3 | 5 | 20 | 5 | 0,5 | 4,5 | 3 | 0,1 | 1 | 2210 |
| 4 | 5 | 25 | 5 | 2 | 3 | 0,5 | 0,08 | 10 | 1910 |
| 5 | 5 | 10 | 10 | 2,5 | 6 | 1 | 0,08 | 1 | 3000 |
| 6 | 5 | 15 | 10 | 1,5 | 1,5 | 2 | 0,1 | 10 | 2380 |
| 7 | 5 | 20 | 15 | 2,5 | 3 | 2 | 0,04 | 0 | 1610 |

Закінчення табл. 3

| № п/п | Концентрація компонентів, г/л | | | | | | | | ЛА, од/мл (вихід продукту) |
|-------|-------------------------------|---------------|------|---------------------------------|-------------------|-------------------|-------------------|---------|-------------------------------|
| | Крохмаль | Соєве борошно | NaCl | K ₂ HPO ₄ | CaCl ₂ | MgCl ₂ | MnCl ₂ | Аеросил | |
| 8 | 5 | 25 | 15 | 1,5 | 4,5 | 1 | 0 | 5 | 1750 |
| 9 | 10 | 15 | 10 | 1,5 | 3 | 1 | 0,04 | 1 | 2730 |
| 10 | 10 | 10 | 10 | 2,5 | 4,5 | 2 | 0 | 10 | 2650 |
| 11 | 10 | 25 | 1 | 1,5 | 6 | 2 | 0,08 | 0 | 2020 |
| 12 | 10 | 20 | 1 | 2,5 | 1,5 | 1 | 0,1 | 5 | 2930 |
| 13 | 10 | 15 | 15 | 2 | 4,5 | 0,5 | 0,1 | 0 | 2420 |
| 14 | 10 | 10 | 15 | 0,5 | 3 | 3 | 0,08 | 5 | 2570 |
| 15 | 10 | 25 | 5 | 2 | 1,5 | 3 | 0 | 1 | 2460 |
| 16 | 10 | 20 | 5 | 0,5 | 6 | 0,5 | 0,04 | 10 | 2290 |
| 17 | 15 | 20 | 10 | 2 | 4,5 | 2 | 0,08 | 5 | 2650 |
| 18 | 15 | 25 | 10 | 0,5 | 3 | 1 | 0,1 | 0 | 2680 |
| 19 | 15 | 10 | 15 | 2 | 1,5 | 1 | 0,04 | 10 | 2600 |
| 20 | 15 | 15 | 15 | 0,5 | 6 | 2 | 0 | 1 | 2640 |
| 21 | 15 | 20 | 1 | 1,5 | 3 | 3 | 0 | 10 | 2990 |
| 22 | 15 | 25 | 1 | 2,5 | 4,5 | 0,5 | 0,04 | 1 | 2740 |
| 23 | 15 | 10 | 5 | 1,5 | 6 | 0,5 | 0,1 | 5 | 2670 |
| 24 | 15 | 15 | 5 | 2,5 | 1,5 | 3 | 0,08 | 0 | 2310 |
| 25 | 20 | 25 | 15 | 2,5 | 6 | 3 | 0,1 | 10 | 2430 |
| 26 | 20 | 20 | 15 | 1,5 | 1,5 | 0,5 | 0,08 | 1 | 2840 |
| 27 | 20 | 15 | 10 | 2,5 | 3 | 0,5 | 0 | 5 | 2040 |
| 28 | 20 | 10 | 10 | 1,5 | 4,5 | 3 | 0,04 | 0 | 2600 |
| 29 | 20 | 25 | 5 | 0,5 | 1,5 | 2 | 0,04 | 5 | 2630 |
| 30 | 20 | 20 | 5 | 2 | 6 | 1 | 0 | 0 | 2870 |
| 31 | 20 | 15 | 1 | 0,5 | 4,5 | 1 | 0,08 | 10 | 2650 |
| 32 | 20 | 10 | 1 | 2 | 3 | 2 | 0,1 | 1 | 2260 |
| К | | | | | | | | | 2640 |

На основі розрахунків складено таблиці ефектів впливу різних компонентів посівного (табл. 4) та ферментаційного (табл. 5) середовищ.

На основі аналізу даних ефектів впливу (табл. 4 і 5) було отримано склади оптимізованих посівного і ферментаційного середовищ, які використовували для біосинтезу продукту та перевірки ефекту проведеної оптимізації (табл. 6).

Практична перевірка показала, що вирощування досліджуваного продуцента з використанням оптимізованих середовищ призводить до збільшення виходу продукту в середньому на 15 %.

Слід відзначити схожі закономірності впливів окремих солей у складі посівного і ферментаційного поживних середовищ на біосинтетичну здатність продуцента. Так, в обох оптимізованих поживних середовищах виявився зменшений вміст NaCl, K₂HPO₄ і солі магнію. На-

томість, однаково підвищилася концентрація MnCl₂ і CaCl₂. Незважаючи на загальновідому роль Ca²⁺ в процесах проникнення поживних речовин у мікробну клітину, очевидно, в даному випадку бажано було б у наступних дослідженнях визначити його вплив у більш вузькому діапазоні, зважаючи на наведені коливання рівня ефектів Ca²⁺.

Разом з тим, підвищення виходу продукту на 15 % при культивуванні продуцента на запропонованому ферментаційному середовищі дозволяє говорити про можливість його використання на етапі виробничого біосинтезу лізоenzимного комплексу. Доцільність використання запропонованого поживного середовища визначається також заміною гідролізованого крохмалю в його складі на дещо збільшену кількість нативного крохмалю (див. табл. 6), що здешевить процес підготовки виробничого поживного середовища, оскільки етап гідролізу крохмалю ферментними препаратами виключа-

Таблиця 4. Ефекти впливу компонентів півного середовища на рівень літичної активності продуцента

| Глюкоза | Соеве борошно | | NaCl | | CaCl ₂ | | K ₂ HPO ₄ | | MgSO ₄ | | MnCl ₂ | | Аеросил | |
|---------|-------------------|---------|-------------------|---------|-------------------|--------|---------------------------------|--------|-------------------|---------|-------------------|---------|-------------------|--------|
| | Концентрація, г/л | Ефект | Концентрація, г/л | Ефект | Концентрація, г/л | Ефект | Концентрація, г/л | Ефект | Концентрація, г/л | Ефект | Концентрація, г/л | Ефект | Концентрація, г/л | Ефект |
| 5 | +344,06* | +47,81 | 1 | -108,44 | 1,5 | -48,44 | 0,5 | -24,69 | 0 | -70,94 | 0 | -94,69 | 0 | -22,19 |
| 10 | +30,31 | +70,31 | 5 | -123,44 | 3,0 | -37,19 | 1,5 | +72,81 | 2,5 | +89,06 | 0,04 | +101,56 | 1 | +96,56 |
| 15 | -158,44 | +62,81 | 10 | +282,81 | 4,5 | +5,31 | 2,0 | +19,06 | 5,0 | +136,56 | 0,08 | +126,56 | 5 | -39,69 |
| 20 | -215,94 | -180,94 | 15 | -50,94 | 6,0 | +80,31 | 2,5 | -67,19 | 7,0 | -154,69 | 0,1 | -133,44 | 10 | -34,69 |

Таблиця 5. Ефекти впливу компонентів ферментаційного середовища на рівень літичної активності продуцента

| Крохмаль | Соеве борошно | | NaCl | | CaCl ₂ | | K ₂ HPO ₄ | | MgCl ₂ | | MnCl ₂ | | Аеросил | |
|----------|-------------------|---------|-------------------|---------|-------------------|---------|---------------------------------|--------|-------------------|---------|-------------------|--------|-------------------|---------|
| | Концентрація, г/л | Ефект | Концентрація, г/л | Ефект | Концентрація, г/л | Ефект | Концентрація, г/л | Ефект | Концентрація, г/л | Ефект | Концентрація, г/л | Ефект | Концентрація, г/л | Ефект |
| 5 | -265,94 | +81,56 | 1 | +75,31 | 1,5 | +56,56 | 0,5 | -3,44 | 0,5 | -98,44 | 0 | -37,19 | 0 | -148,44 |
| 10 | +27,81 | +4,06 | 5 | -62,19 | 3,0 | -132,19 | 1,5 | +16,56 | 1,0 | +170,31 | 0,04 | +7,81 | 1 | +129,06 |
| 15 | +179,06 | +67,81 | 10 | +110,31 | 4,5 | -22,19 | 2,0 | +4,06 | 2,0 | -125,94 | 0,08 | +12,81 | 5 | +12,81 |
| 20 | +59,06 | -153,44 | 15 | -123,44 | 6,0 | +97,81 | 2,5 | -17,19 | 3,0 | +54,06 | 0,1 | +16,56 | 10 | +6,56 |

* Максимальні значення ефектів впливу компонентів поживних середовищ на рівень літичної активності продуцента.

Таблиця 6. Порівняльна характеристика біосинтетичної здатності культури *Streptomyces recifensis* var. *lyticus* 2435/М при культивуванні на вихідних і оптимізованих поживних середовищах

| Компонент | Концентрація, г/л | | | |
|---------------------------------|--------------------|-------------------|--------------------------|-------------------|
| | Посівне середовище | | Ферментаційне середовище | |
| | до оптимізації | після оптимізації | до оптимізації | після оптимізації |
| Глюкоза | 6,0 | 5,0 | – | – |
| Крохмаль гідролізований | – | – | 10,0 | – |
| Крохмаль нативний | – | – | – | 15,0 |
| Соеве борошно | 8,0 | 15,0 | 8,0 | 10,0 |
| NaCl | 14,0 | 10,0 | 14,0 | 10,0 |
| K ₂ HPO ₄ | 2,0 | 1,5 | 2,0 | 1,5 |
| MgSO ₄ | 5,8 | 5,0 | – | – |
| MgCl ₂ | – | – | 2,2 | 1,0 |
| MnCl ₂ | 0,04 | 0,08 | 0,04 | 0,1 |
| CaCl ₂ | 4,5 | 6,0 | 2,0 | 6,0 |
| Аеросил | – | 1,0 | – | 1,0 |
| Літична активність, од/мл | 2300 ± 17 | 2730 ± 15 | 2640 ± 15 | 3000 ± 19 |

ється. Використовуваний продуцент є мутантним штамом, що має підвищену біосинтетичну здатність щодо вихідного штаму *Streptomyces recifensis* var. *lyticus* 2435 та змінене співвідношення ферментів у складі продукту [5]. Вірогідно, що штам-мутант набув здатності синтезувати лізоenzимний комплекс із підвищеним вмістом, в тому числі й амілаз.

Застосований у складі поживних середовищ аеросил, очевидно, впливає стабілізуюче саме на мікробну клітину, підвищуючи її стійкість “по типу іммобілізації”, що відзначалося також у проаналізованій літературі [12].

Той факт, що по відношенню до більшості досліджуваних компонентів посівного і ферментаційного поживних середовищ встановлено подібні закономірності їх впливу, свідчить про адекватність застосованого методу для оптимізації даних середовищ, в тому числі й з погляду на їх економічність, що, однак, не виключає можливості подальшої роботи з метою більш істотного збільшення синтезу продукту.

Висновки

1. Визначені концентрації компонентів досліджуваних середовищ і склад ферментаційно-

го поживного середовища для біосинтезу лізоenzимного комплексу штамом *Streptomyces recifensis* var. *lyticus* 2435/М (див. табл. 6) дають можливість підвищити рівень синтезу цільового продукту в середньому на 15 %.

2. У складі поживного середовища гідролізований крохмаль може бути замінений нативним, що відчутно здешевить процес підготовки виробничого поживного середовища.

3. Аеросил у концентрації одного відсотка виявляє активуючий вплив на біосинтетичний процес, вірогідно, завдяки стабілізації культури продуцента.

Таким чином, проведена оптимізація складу поживного середовища для біосинтезу ферментного комплексу штамом *Streptomyces recifensis* var. *lyticus* 2435/М сприяє підвищенню виходу продукту і ефективності біотехнологічного процесу його отримання.

Надалі доцільно використовувати оптимізоване поживне середовище на стадії біосинтезу в технології для отримання даного ферментного препарату.

М.А. Григорьева, В.В. Клочко, Т.С. Тодосійчук

ОПТИМИЗАЦИЯ СОСТАВА ПИТАТЕЛЬНОЙ СРЕДЫ ДЛЯ БИОСИНТЕЗА ФЕРМЕНТНОГО КОМПЛЕКСА ПРОДУЦЕНТОМ р. *Streptomyces*

Исследовано влияние основных и альтернативных компонентов питательных сред на биосинтетическую активность штамма-продуцента лизоэнзимного комплекса *Streptomyces recifensis* var. *lyticus* 2435/M. На основе ранее полученных результатов в качестве альтернативного источника основного питания использовано специально обработанную ИК-облучением соевую муку и как дополнительный компонент – аэросил марки А-300. В результате проведенной оптимизации определены концентрации компонентов исследуемых сред и состав ферментационной питательной среды для биосинтеза лизоэнзимного комплекса штаммом *Streptomyces recifensis* var. *lyticus* 2435/M, что позволяет повысить уровень синтеза целевого продукта в среднем на 15 %. Культивирование продуцента на предложенных по результатам оптимизации питательных средах повысит выход продукта при одновременном снижении стоимости промышленной питательной среды и самого процесса ее подготовки.

M.A. Grygorieva, V.V. Klochko, T.C. Todosiychuk

COMPONENTS CONTENT OPTIMIZATION OF NUTRITION MEDIUM FOR BIOSYNTHESIS OF ENZYME COMPLEX BY р.*Streptomyces* PRODUCER

In this paper, we study the influence of basic and alternative nutrition medium components on the biosynthetic activity of the lysoenzyme complex *Streptomyces recifensis* var. *lyticus* 2435/M producer. Drawing on the results obtained, we argue that specially treated IR-radiation soy-bean flour can be used as an alternative source of basic feed and the aerosil A-300 can be used as an additional component. As a result of the optimization, we discover the concentration of the examined mediums as well as the composition of a fermentation medium for the biosynthesis of the lysoenzyme complex by the *Streptomyces recifensis* var. *lyticus* 2435/M strain, allowing to increase the level of the product synthesis by 15%. It can be concluded that the producer cultivation on the optimized nutrition medium allows promoting the product output at the simultaneous decline of fermentation nutrition medium cost and its preparation.

1. Ding C.H., Jiang Z.Q., Li X.T. et al. High activity xylanase production by *Streptomyces olivaceoviridis* E-86 // Word J. Microbiol. and Biotechnol. – 2004. – 20, N 1. – P. 7–10.
2. Tuncer M., Kuru A., Isiki M. et al. Optimization of extracellular endoxylanase, endoglucanase and peroxidase production by *Streptomyces* sp. F 2621 isolated in Turkey // J. Appl. Microbiol. – 2004. – 97, N 4. – P. 783–792.
3. Varma R., Nene S. Biosynthesis of cholesterol oxidase by *Streptomyces lavendulae* NCIM 2421 // Enzyme and Microb. Technol. – 2003. – 33, N 2-3. – P. 286–291.
4. Nascimento R., Coelho R., Marques S. et al. Production and partial characterization of xylanase from *Streptomyces* sp. strain AMT-3 isolated from Brazilian cerrado soil // Ibid. – 2002. – 31, N 4. – P. 549–555.
5. Шинкаренко Л.М., Тодосійчук Т.С., Хоккер Х. Дослідження компонентного складу і специфічності літичного ферментного комплексу *Streptomyces recifensis* var. *lyticus* IMB Ac-5001 // Наукові вісті НТУУ “КПІ”. – 2004. – № 1. – С. 138–143.
6. Тодосійчук Т.С., Шинкаренко Л.М., Федоренко В.О., Басілія Л.І. Отримання мутантів *Streptomyces recifensis* var. *lyticus* зі зміненою бактеріолітичною активністю // Мікробіол. журн. – 1998. – № 4. – С. 49–56.
7. Бабенко Ю.С., Шинкаренко Л.Н., Клочко Т.П. Регуляція біосинтезу літичних ферментів штаммом *Actinomyces recifensis* var. *lyticus* 2435 // Тез. докл. V сьезда Укр. микроб. общества. – К., 1980. – С. 25.
8. Тодосійчук Т.С. Розробка технології гідролітичного ферментного препарату циторіцифен: Автореф. дис. ... канд. техн. наук. – К., 2000. – 25 с.
9. Григор'єва М.А., Тодосійчук Т.С., Москаленко Н.В., Поводзинський В.М. Вплив альтернативних джерел живлення на біосинтетичну здатність продуцента лізоензимного комплексу // Наукові праці НУХТ. – 2007. – № 22. – С. 29–32.
10. Бирюков В.В., Кантере В.М. Оптимизация микробиологических процессов микробиологического синтеза. – М.: Наука, 1985. – 296 с.
11. Павлова И.Н., Жолнер Л.Г., Захарова И.Я. и др. Серинная протеиназа с литическими свойствами // Микробиология. – 1988. – 57, № 3. – С. 398–404.
12. Геращенко И.И., Штатко Е.И., Бондарчук О.И., Чуйко Н.А. Особенности взаимодействия микроорганизмов и ферментов с высокодисперсным кремнеземом // Медицинская химия. – 2003. – 7, № 8. – С. 153–167.

ПРОБЛЕМИ ХІМІЇ ТА ХІМІЧНОЇ ТЕХНОЛОГІЇ

УДК 504.064.4:658.567.3+544.77

О.М. Лавриненко

УТВОРЕННЯ УЛЬТРАДИСПЕРСНИХ ФЕРИТІВ НІКЕЛЮ, МІДІ ТА ЦИНКУ В СИСТЕМІ ГАЛЬВАНOKONTAKTY ЗАЛІЗО–ВУГЛЕЦЬ. 2. АНАЛІЗ КОЛОЇДНО-ХІМІЧНИХ МЕХАНІЗМІВ УТВОРЕННЯ УЛЬТРАДИСПЕРСНИХ ФЕРИТІВ У СИСТЕМІ ГАЛЬВАНOKONTAKTY ЗАЛІЗО–ВУГЛЕЦЬ

Вступ

У першій частині дослідження [1] було проведено вивчення впливу фізико-хімічних умов фазоутворення в системі гальваноконтакту залізо–вуглець (Ст3–кокс) на склад ультрадисперсних осадів: моногідратів і оксидів заліза α - і γ -морфологічних рядів, феритів важких металів, основних солей різного складу та водовмісту. Експериментальні дані свідчать про те, що утворення залізо-кисневих структур і феритів важких металів проходить при всіх умовах проведення процесу гальванокоагуляції: в діапазоні значень рН дисперсійного середовища від 1,5 до 11,5, при вихідних концентраціях $C_{Me^{2+}} = 10\text{--}300$ мг/дм³ (де Me^{2+} – цинк, нікель, мідь або інші метали) в розчинах хлориду, нітрату та сульфату цинку, нікелю та міді, але їх фазовий розподіл не стабільний і залежить від багатьох параметрів процесу гальванокоагуляції. Під час досліджень було встановлено оптимальні значення рН і $C_{Me^{2+}}$ (мг/дм³) при яких у складі осаду утворюється до 35% феритів нікелю і цинку або до 25% суміші феритів міді $CuFe_2O_4 + CuFeO_2$. В той же час, залишається відкритим питання: за якими колоїдно-хімічними механізмами відбувається формування ультрадисперсних структур, в тому числі й феритів важких металів, і які умови мають виконуватися для повного зв'язування катіонів дисперсійного середовища в структури оксидів і феритів при гальванокоагуляційному процесі. Автори гальванокоагуляційного методу водоочищення [2, 3] встановили п'ять механізмів, за якими проходить вилучення шкідливих компонентів із дисперсійного середовища, а саме: катодне відновлення металів, утворення феритів, утворення сполук-включень (клатратів), коагуляція грубодисперсних домішок і сорбція органічних сполук на новоутворених фазах, але поглибленого аналізу процесів фазоутворення проведено не було. У попередній нашій статті [4], присвяченій вивченню електрохімічних закономірностей утворення феритів, запропоновано ме-

ханізми формування феритних структур залежно від відношення стандартних потенціалів електродів $E_{Zn(II)/Zn}^0$ (–0,76 В), $E_{Ni(II)/Ni}^0$ (–0,25 В), $E_{Cu(II)/Cu}^0$ (+0,337 В) до стандартного електродного потенціалу $E_{Fe(II)/Fe}^0$ (–0,44 В), але такий підхід теж недостатньо повно характеризує процеси, які відбуваються в системі гальваноконтакту залізо–вуглець, і не висвітлює особливості феритоутворення залежно від форми знаходження в дисперсійному середовищі катіонів важких металів.

Постановка задач

Вивчення процесів утворення феритів важких металів за високотемпературною технологією та при сумісному осадженні солей заліза і важких металів у водному середовищі при додаванні лугів було проведено досить детально в [5–8]. Аналіз впливу параметрів процесу фазоутворення на фазовий розподіл залізо-кисневих структур, здійснений в експериментальній частині дослідження [1], дає змогу встановити колоїдно-хімічні механізми утворення феритів важких металів, які реалізуються в системі гальваноконтакту залізо–вуглець, і порівняти їх із механізмами утворення феритів у водному дисперсійному середовищі при їх отриманні за іншими технологіями.

Мета статті – за допомогою аналізу термодинамічних функцій реакцій феритоутворення у водному дисперсійному середовищі в діапазоні значень рН 1,5–11,5 і фізико-хімічних умов проходження гальванокоагуляційного процесу встановити колоїдно-хімічні механізми утворення феритів важких металів в системі гальваноконтакту Ст3–кокс.

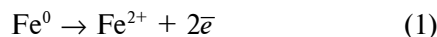
Результати дослідження

Об'єкти і методи дослідження. Об'єктами дослідження вибрано колоїдно-хімічні механізми утворення феритів заліза, нікелю, міді і цинку в процесі гальванокоагуляції в системі гальваноконтакту залізо–вуглець. Метод дослідження – аналіз термодинамічних функцій реакцій феритоутворення в системі гальваноконтакту Ст3–кокс залежно від значення рН дисперсійного середовища із врахуванням форми знаходження в ньому важких металів.

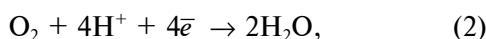
Аналіз процесів, які супроводжують формування феритів важких металів при гальванокоагуляції в системі гальваноконтакту залізо–вуглець. Процес формування залізо-кисневих структур у системі гальваноконтакту залізо–вуглець пов'язаний із

проходженням електрохімічних реакцій на поверхні напівелементів гальванопари, продукти яких (Fe(II) і гідроксил) є одночасно і первинними продуктами реакцій утворення зародкових залізо-кисневих структур феригідриту $\text{Fe}_5\text{O}_3(\text{OH})_9$ і протолепідокрокитів $\text{Fe}_2\text{FeO}_2(\text{OH})_3$ і $\text{FeFeO}_2(\text{OH})$. Подальший розвиток таких структур пов'язаний з їх трансформацією в сорбційно-активні моногідрати заліза – гетит $\alpha\text{-FeOOH}$ і лепідокрокит $\gamma\text{-FeOOH}$. Взаємодія моногідратів заліза і компонентів дисперсійного середовища, наприклад, через адсорбцію катіонних форм заліза або інших важких металів на поверхні, спричиняє залучення катіонів до кристалічних ґраток моногідратів і їх фазові перетворення з видаленням води, які призводять до формування щільних структур оксидів заліза: гематиту $\alpha\text{-Fe}_2\text{O}_3$, магеміту $\gamma\text{-Fe}_2\text{O}_3$ або магнетиту Fe_3O_4 і феритів важких металів MeFe_2O_4 .

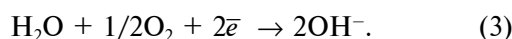
Умови надходження в систему вихідних компонентів. Джерелом первинних продуктів гальванокоагуляційного процесу, які беруть участь у формуванні зародкових залізо-кисневих структур, визначено електродні реакції анодного розчинення заліза



і відновлення кисню, яка в кислому дисперсійному середовищі відбувається за реакцією



а в нейтральному або лужному – за реакцією



Проходження катодної реакції змінює значення рН приелектродного простору до значень 6,5–8,5 [1]. За методикою, наведеною в статті [9], встановлено залежність потенціалів залізного і вуглецевого елементів гальванопари та її компромісного потенціалу від речовинного складу водного дисперсійного середовища. На рис. 1 наведено залежності потенціалу сталевого електрода (рис. 1, а), коксового електрода (рис. 1, б) та компромісного потенціалу гальванопари СтЗ–кокс (рис. 1, в) від значення рН водного дисперсійного середовища, в якому містяться катіони цинку, нікелю і міді. Отримані дані свідчать про те, що компромісний потенціал гальванопари СтЗ–кокс корозійний і становить $(-0,30) - (-0,35)$ В, при цьому наявність у дисперсійному середовищі катіонів важких металів за умов $C_{\text{Me}^{2+}} = 100 \text{ мг/дм}^3$ практично не впливає на перебіг електрохімічного процесу.

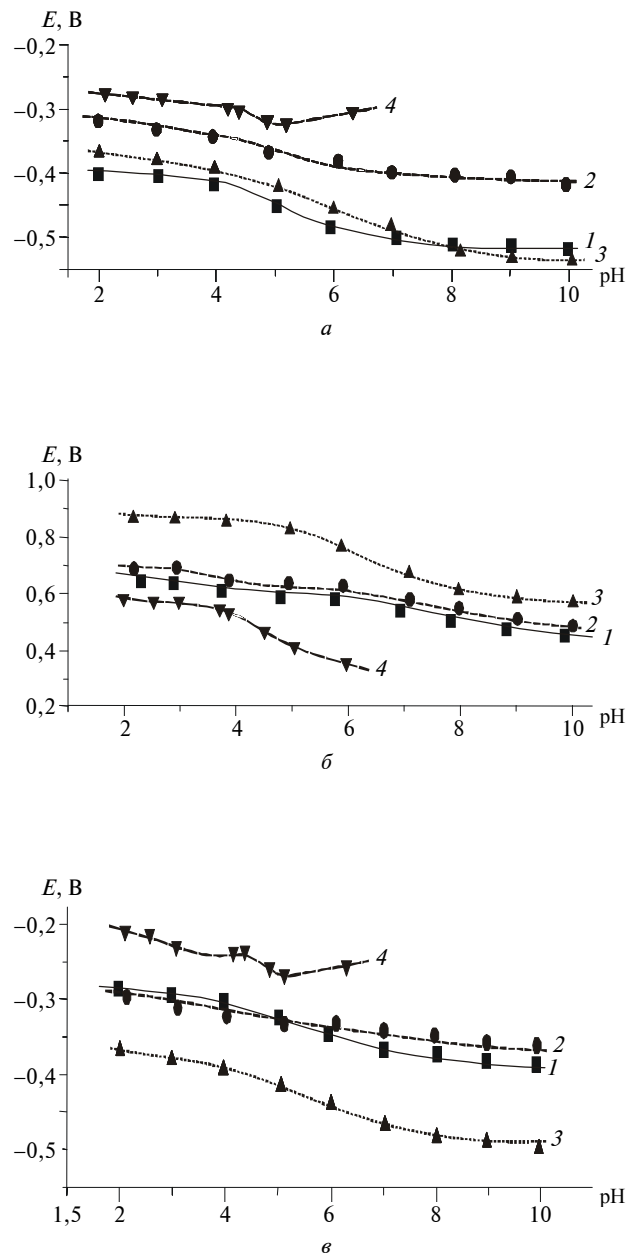


Рис. 1. Залежність потенціалу від значення рН дисперсійного середовища: а – сталевого електрода (СтЗ); б – коксового електрода; в – компромісного потенціалу гальванопари СтЗ–кокс; дисперсійне середовище: 1 – вода; 2 – розчин ZnCl_2 ; 3 – розчин NiNO_3 ; 4 – розчин CuSO_4 , в якому $C_{\text{Me}^{2+}} = 100 \text{ мг/дм}^3$

Продукти електрохімічного процесу видаляються з поверхні гальванопари і надходять у приелектродний простір, в який одночасно з об'ємним дифундують компоненти дисперсійного середовища. На нашу думку, процеси формування залізо-кисневих структур відбуваються в дифузійному (приелектродному) просторі, де встановлюються прийнятні для фазоутворення кон-

центрації катіонів металів і значення рН. Утворені в приелектродному просторі ультрадисперсні залізо-кисневі частинки можуть наблизитися до поверхні електродів і утримуватися на них силами адгезії, але при обертанні барабанної камери гальванокоагулятора та механічному перемішуванні складових гальванопари вони видаляються з поверхонь електродів, що забезпечує їх поновлення і безперервність електрохімічного процесу. Інший процес формування щільних структур оксидів заліза безпосередньо на поверхні залізного (сталевого) електрода висвітлено в численних фахових виданнях, наприклад в [10], і не є предметом нашого дослідження.

Для встановлення ролі кисню повітря при окисненні катіонів Fe(II), які надійшли в дисперсійне середовище, зроблено порівняння кінетичних залежностей зміни концентрації катіонів заліза (II) і (III) при фазоутворенні в системах сталевого електрода та гальваноконтакту Ст3–кокс (рис. 2) за умов насиченості приелектродного простору киснем повітря завдяки змінному контакту поверхонь електродів із повітрям і дисперсійним середовищем. Аналіз отриманих результатів вказує на те, що при відсутності гальваноконтакту в системі відбувається накопичення катіонів Fe(II), в той час як наявність гальваноконтакту сприяє окисненню Fe(II) та його зв'язуванню в залізо-кисневі структури. Таким чином, вірогідно, кисень повітря відновлюється при катодному процесі та окиснює катіони Fe(II) у дифузійному просторі [11].

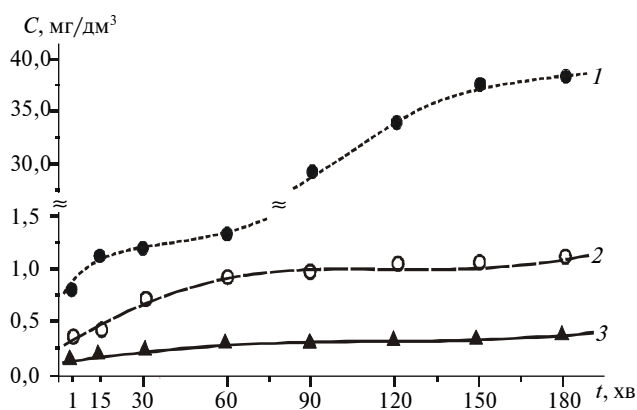
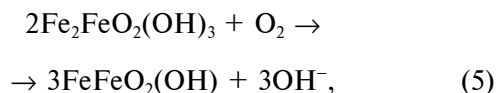


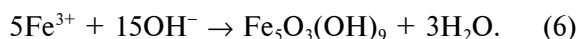
Рис. 2. Кінетичні залежності вмісту катіонів у дисперсійно-середовищі при формуванні залізо-кисневих структур: в системі сталевого електрода: 1 – Fe(II) + Fe(III), мг/дм³; 2 – Fe(III), мг/дм³; в гальваноконтакті Ст3–кокс: 3 – Fe(II) + Fe(III), мг/дм³

Формування зародкових залізо-кисневих структур. Надходження в приелектродний простір гальванопари продуктів гальванокоагуляційного процесу – катіонів заліза (II) і аніонів гідроксиду – при наявності кисню має відбуватися при умовах, сприятливих для утворення зародкових нанорозмірних залізо-кисневих структур. Як показали наші дослідження [12, 13], залежно від ступеня окиснення заліза в системах сталевого електрода і в гальваноконтакті Ст3–кокс можливе утворення двох типів структур: феригідриту Fe₅O₃(OH)₉, в якому містяться виключно катіони Fe(III), і протолепідокрокітів Fe₂FeO₂(OH)₃ і FeFeO₂(OH), в структуру яких входять катіони Fe(II) і Fe(III). Особливістю структур протолепідокрокітів є їх розвиток від гідроксиду Fe(OH)₂ до лепідокрокіту γ-FeOOH стадійним окисненням Fe(II) в структурі кристалічних ґраток без їх перебудови [14].

Механізм утворення структур феригідриту і протолепідокрокітів за участю гідролізованих катіонних форм Fe(II) і Fe(III) висвітлено в наших статтях [13, 15]. В загальному випадку утворення протолепідокрокітів окисненням заліза(II) в кристалічній структурі описується рівняннями



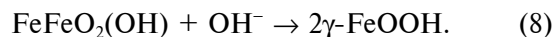
а утворення феригідриту при взаємодії катіонів Fe(III) з гідроксидом – рівнянням



Структури феригідриту і протолепідокрокітів нестійкі [12, 14] – вони переходять у структури моногідратів заліза – гетит α-FeOOH і лепідокрокіт γ-FeOOH. Для феригідриту фазове перетворення відбувається з видаленням води:



а для протолепідокрокіту – доокисненням Fe(II) у структурі протофази:



Саме ці моногідрати заліза завдяки розвиненій структурі [17] і сорбційній активності здатні вбудовувати у свої кристалічні ґратки катіони важких металів [18] з утворенням феритів [19, 4].

Форми знаходження металів у водному дисперсійному середовищі залежно від його значення рН

Розгляд процесів формування структур феритів у водному дисперсійному середовищі в діапазоні значень рН від 1,5 до 11,5 неможливо провести без врахування катіонних форм металів, які визначають гідроліз, формування моно- і поліядерних аквагідросокомплексів та утворення гідроксидів.

Катіону Fe(II) у водному дисперсійному середовищі до значення рН = 6,0 існують переважно в гідратованій формі Fe^{2+} , в діапазоні рН від 6,0 до 9,7 відбувається гідроліз із формуванням моноядерного гідросокомплексу $FeOH^+$, а в більш лужному середовищі в системі утворюється гідроксид $Fe(OH)_2$ [20].

Для **катіонів Fe(III)** область гідролізу фіксується в кислому середовищі: до значення рН = 1,5 в системі можливе існування гідратованих катіонів, у діапазоні значень рН від 1,5 до 2,5 значний відсоток катіонів $Fe(III)$ гідролізується і переходить у моноядерні гідросокомплекси $FeOH^{2+}$ і $Fe(OH)_2^+$; при рН = 2,5 в системі починається процес димеризації з утворенням $Fe_2(OH)_2^{4+}$ і Fe_2OH^{5+} та подальша полімеризація димерів за умов концентрації заліза, при якій гідролізованими комплексами долається "моноядерний бар'єр"; при значенні рН = 4,1 в системі утворюється аморфний гідроксид $Fe(OH)_3$ [20, 21].

Гідроліз цинку починається при значенні рН водного дисперсійного середовища вище 6,3 і на початковій стадії відбувається з утворенням моноядерного комплексу $ZnOH^+$ (рН = 6,31) або димеру $Zn_2(OH)^{3+}$ (рН = 6,5) [22]. В таких умовах феритоутворення можливе при їх взаємодії з катіонами заліза(II), гідроксидом заліза(III) або його моногідратом. Гідроксид цинку утворюється при значенні рН > 6,5, тобто в умовах існування як моногідратів заліза, так і його гідроксидів, в останньому випадку їх взаємодія аналогічна процесу сумісного осадження гідроксидів заліза і цинку.

Утворення **гідроксиду нікелю** відбувається при значенні рН = 6,7 і за формою розміщення катіонних форм заліза і нікелю процес феритоутворення наближений до цинквмісних систем. Відмінності полягають у можливості існування у водному середовищі катіонних форм нікелю із ступенем окиснення (I), (II), (III) і утворенні, крім фериту і гідроксиду нікелю (II), оксидів Ni_2O і NiO і моногідрату $NiOOH$. За даними [22],

процес феритоутворення в лужному нікельвмісному дисперсійному середовищі проходить стадії утворення основних солей змінного складу, гідроксиду нікелю $Ni(OH)_2$, моногідрату $NiOOH$ α -, β - або γ -модифікації.

Гідроліз солей міді відбувається в кислому середовищі і закінчується при значеннях рН = 4,3, тобто діапазони значень рН гідролізу $Cu(II)$ і $Fe(III)$ збігаються. За таких умов неможливе проходження реакцій між гідросокомплексом $FeOH^+$ і катіонами міді (II), маловірогідною є і взаємодія між моногідратом заліза і $CuOH^+$. В той же час, продуктами процесу фазоутворення в мідьвмісних системах можуть бути оксиди і гідроксиди міді із ступенем окиснення (I), (II) і (III). За даними [23], формування гідроксидів міді аналогічне нікельвмісним системам і проходить стадії утворення основних солей сталого складу, структур типу $Cu(OH)_2 \cdot H_2O$, $(CuO \cdot CuSO_4) \cdot 2Cu(OH)_2 \cdot H_2O$, оксидів і гідроксидів міді.

Термодинамічний аналіз реакцій феритоутворення для залізо-, цинк-, нікель- і мідьвмісних систем

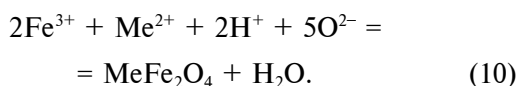
Виходячи з викладеного, для встановлення механізму формування структур феритів важких металів у системі гальваноконтакту залізо–вуглець було проведено оцінку потенціалу Гіббса для запропонованих нами реакцій феритоутворення із врахуванням форми розміщення в дисперсійному середовищі катіонів $Fe(II)$, $Fe(III)$, $Zn(II)$, $Ni(II)$ і $Cu(II)$. Розрахунок потенціалу Гіббса здійснювався для стандартних умов ($T = 298\text{ K}$) згідно із стандартною формулою [24]

$$(\Delta G)_{T_{\text{реакції}}} = (\Delta H)_{298_{\text{реакції}}} - T(\Delta S)_{298_{\text{реакції}}} - T \Delta C_p \left(\ln \frac{T}{298,15^\circ} + \frac{298,15^\circ}{T} - 1 \right). \quad (9)$$

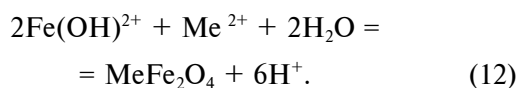
Оскільки експеримент проводився при стандартній температурі, то температурна поправка, що задається останнім членом рівняння (9), не враховувалась. Аналогічне скорочення досягається при використанні формули М.І.Темкіна і Л.О. Шварцмана, в якій коефіцієнти M_0 , M_1 , M_2 в останньому члені рівняння при $T = 298\text{ K}$ дорівнюють нулю або при умові незалежності в стандартних умовах ентропії від температури $(\Delta S)_{298_{\text{реакції}}} = \text{const}$ [24]. Термодинамічні властивості іонів і сполук взято з довідників [25–28].

У сильнокислому дисперсійному середовищі при значенні рН < 1,5 в системі практично

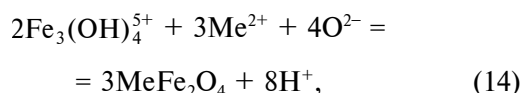
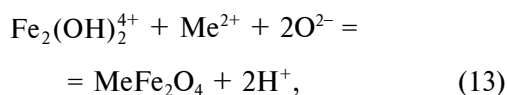
немає іонів гідроксилу, а катіони заліза і важких металів розміщуються виключно в гідратованій формі. За таких умов взаємодія катіонів може відбуватись при наявності кисню за реакцією



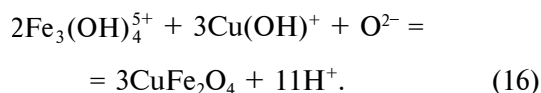
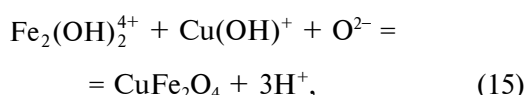
При значенні рН від 1,5 до 2,5 в системі можлива взаємодія моноядерних гідроксокомплексів $\text{Fe}(\text{OH})_2^{4+}$ і $\text{Fe}(\text{OH})_4^{5+}$ з гідратованими катіонами заліза(II), цинку, нікелю і міді (Me^{2+}):



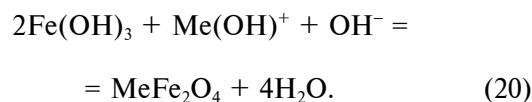
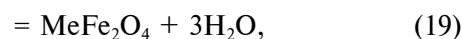
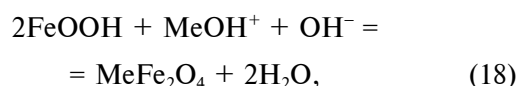
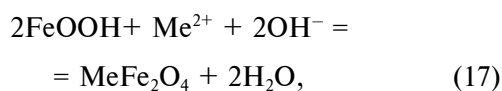
При значенні рН від 2,5 до 4,1 в системі утворюються $\text{Fe}_2(\text{OH})_2^{4+}$ і $\text{Fe}_3(\text{OH})_4^{5+}$, катіони цинку, нікелю і заліза(II) гідратовані, а катіони міді(II) гідролізуються і переходять у гідроксокомплекс $\text{Cu}(\text{OH})^+$. Феритоутворення за участю катіонів $\text{Fe}(\text{II})$, Ni , Zn можливе за реакціями



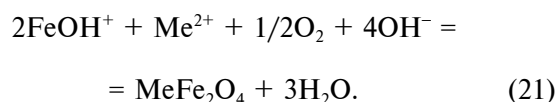
а для $\text{Cu}(\text{II})$ – за реакціями



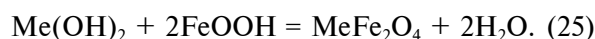
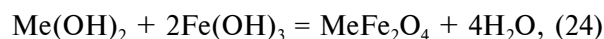
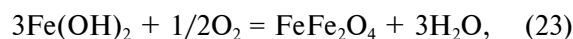
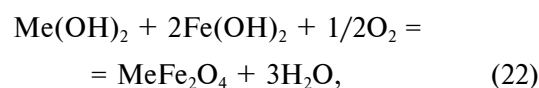
У нейтральному дисперсійному середовищі (при значенні рН від 6,0 до 8,0) утворення феритів можливе при взаємодії як гідроксиду заліза(III), так і його моногідрату з гідратованими і гідролізованими катіонами Me^{2+} :



Водночас, при значенні рН від 5,5 до 8,0 в системі проходить гідроліз заліза(II) з утворенням гідроксокомплексу FeOH^+ і реакція феритоутворення має вигляд



В лужному середовищі при значенні рН > 8 в системі існують лише гідроксиди та моногідрати, тому феритоутворення вірогідне за твердофазними реакціями (сумісне осадження):



Реакція (23) є окремим випадком реакції (22) утворення магнетиту.

У табл. 1 наведено значення розрахованих потенціалів Гіббса для реакцій феритоутворення у водному дисперсійному середовищі, яке містить залізо(II) і (III), цинк, нікель і мідь.

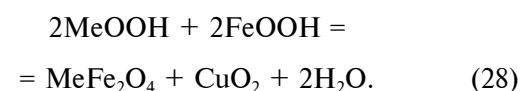
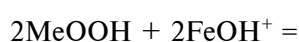
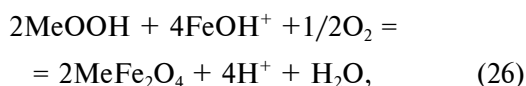
Аналіз отриманих даних вказує на те, що, з термодинамічної точки зору, всі запропоновані реакції феритоутворення у водному дисперсійному середовищі, які проходять за участю гідратованих і гідролізованих катіонних форм важких металів, при взаємодії катіонних форм з гідроксидами і моногідратами заліза, а також за допомогою твердофазних реакцій між ними при стандартних умовах проведення процесу можливі. Виняток становить реакція (12), в якій гідроксокомплекс заліза(III) $\text{Fe}(\text{OH})_4^{5+}$ вступає в реакцію феритоутворення з гідролізованим катіоном будь-якого важкого металу. Разом з тим, невелика різниця стандартних потенціалів реагуючих речовин у реакціях (11) і (25) свідчить про те, що вони можуть проходити лише за певних концентрацій: в першому випадку – $\text{Fe}(\text{OH})_2^{4+}$ і Me^{2+} , а в другому – $\text{Me}(\text{OH})_2$ і FeOOH . З іншого боку, реакції (11)–(16) протікають у кислому середовищі і супроводжуються утворенням протонів, що спричиняє зсув рівноважного значення рН в кислу область, але та-

Таблиця 1. Розрахунок значень потенціалу Гіббса для реакцій утворення феритів важких металів у водному дисперсійному середовищі

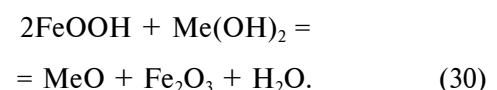
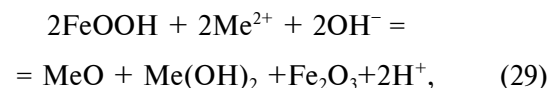
| Номер рівняння реакції феритоутворення | Розраховане значення потенціалу Гіббса ($\Delta G_{\text{рівняння}}$ ккал/(моль·град)) для реакцій феритоутворення, де Me(II) це Zn, Ni, Cu або Fe | | | |
|--|---|---------|---------|---------|
| | Zn(II) | Ni(II) | Cu(II) | Fe(II) |
| (10) | -249,8 | -245,9 | -317,2 | -249,28 |
| (11) | -6,166 | -2,227 | -4,63 | -5,65 |
| (12) | 4,60 | 8,50 | 6,13 | 5,11 |
| (13) | -96,54 | -92,64 | -95,01 | -96,03 |
| (14) | -173,48 | -161,79 | -168,90 | -171,93 |
| (15) | -41,24 | -39,79 | -38,72 | -50,96 |
| (16) | -58,74 | -54,39 | -51,18 | -36,73 |
| (17) | -28,52 | -24,63 | -27,00 | -28,01 |
| (18) | -21,83 | -20,38 | -19,31 | -14,94 |
| (19) | -47,51 | -43,61 | -45,98 | -46,99 |
| (20) | -28,00 | -26,55 | -25,48 | -21,01 |
| (21) | -107,31 | -103,41 | -105,78 | -106,79 |
| (22), (23) | -64,23 | -61,71 | -84,85 | -61,90 |
| (24) | -12,73 | -10,22 | -33,36 | -10,68 |
| (25) | -6,66 | -4,14 | -27,28 | -4,34 |

ке положення суперечить експериментальним даним для процесу гальванокоагуляції [1]. Тому для обмеження кола реакцій феритоутворення в системі гальваноконтакту СтЗ–кокс слід врахувати значення рН (нейтральне або слабколужне середовище) і стадійність процесу феритоутворення (взаємодію катіонів важких металів з попередньо утвореною дисперсною фазою моногідратів або гідроксидів заліза). За таких обмежень найвірогіднішими є реакції, які описують процес утворення феритів важких металів при гальванокоагуляції і проходять за участю моногідратів (17), (18), (25). Менш вірогідне утворення феритів при гальванокоагуляції при фазових трансформаціях суміші гідроксидів за реакціями (19), (20), (22), (24).

В іншій групі окисно-відновлювальних реакцій розглядаються шляхи утворення феритів за участю моногідратів Ni(III) і Cu(III) з гідросокомплексами заліза(II) або моногідратом заліза(III):



Ще в одній групі реакцій розглядається вірогідність формування в системі гальваноконтакту СтЗ–кокс структур оксидів і гідроксидів важких металів, а не феритів:



Отримані значення потенціалу Гіббса реакцій (26), (27), (28) і (30) вказують на їх принципову неможливість, реакція (29) вірогідна для мідьвмісної системи ($\Delta G_{\text{рівняння}} = -15,95$ ккал/(моль·град)) і має концентраційні обмеження для нікельвмісної системи ($\Delta G_{\text{рівняння}} = -2,63$ ккал/(моль·град)).

Порівняльний аналіз процесів феритоутворення у водному дисперсійному середовищі методами гальвано- та електрокоагуляції, сумісним осадженням солей

Для формулювання уявлень про механізми утворення феритів у водному дисперсійному середовищі і встановленні головних фізико-хімічних чинників, які впливають на процес утворення феритів, проведено їх порівняльний аналіз для умов гальванокоагуляції (або електрокоагуляції) і сумісного осадження солей у лужному середовищі (табл. 2).

Як видно з табл. 2, суттєва відмінність у процесі феритоутворення сумісним осадженням і гальванокоагуляцією пов'язана з джерелом надходження в систему вихідних компонентів і їх співвідношенням. Так, якщо при співосадженні вихідні компоненти – катіони заліза і важких металів – надходять у систему у формі солей, а джерелом гідроксиду є розчини лугів, то при електро- і гальванокоагуляції їх надходження в систему забезпечують електродні процеси. Водночас, якщо при гальвано- і електрокоагуляції анодний процес проходить за загальною реакцією (1), а подальший розвиток структури $\text{Fe}(\text{OH})_2$

Таблиця 2. Порівняння параметрів та продуктів процесу фазоутворення при сумісному осадженні солей заліза і важких металів у лужному середовищі і гальванокоагуляції в системі гальваноконтакту Ст3–кокс

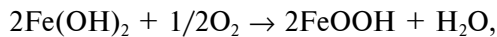
| Параметр | Процеси фазоутворення при сумісному осадженні гідроксидів у лужному середовищі* | Гальванокоагуляційне фазоутворення в системі залізо–вуглець |
|--|--|---|
| <i>Умови надходження в систему вихідних компонентів</i> | | |
| Джерело заліза | Розчини солей заліза (II) і (III) (у заданому співвідношенні з іншими компонентами) | Реакція анодного розчинення залізної складової гальванопари (1) |
| Джерело гідроксиду | Розчини NaOH , NH_4OH (у заданому співвідношенні з іншими компонентами) | Реакції катодної деполаризації кисню (2) і (3) |
| Джерело катіонів важких металів | Розчини відповідних солей (у заданому співвідношенні з іншими компонентами) | Розчини відповідних солей (у широкому діапазоні концентрацій: від 10 до 2000 мг/л) |
| Джерело кисню – повітря | Дифузія в дисперсійне середовище через межу розділу з повітрям | Насичення тонких плівок приповерхневих шарів складових гальванопари при обертанні гальванокоагулятора |
| <i>Процес феритоутворення</i> | | |
| Температура проведення процесу | Термообробка суспензії гідроксидів є обов'язковою операцією при промисловому отриманні феритів | Процес проводять при температурі навколишнього середовища |
| Порядок надходження компонентів у дисперсійне середовище | Впливає порядок осадження гідроксидів | Формування первинних залізо-кисневих структур і їх взаємодія з компонентами дисперсійного середовища |
| Співвідношення реагуючих компонентів | Для кожного металу встановлено “феритне співвідношення” компонентів, порушення якого спричиняє утворення додаткових фаз або формування рентгеноаморфних структур | Концентрація розчину впливає на ступінь вилучення важких металів у процесі гальванокоагуляції і, відповідно, кількість феритів у складі осаду |
| Значення рН проведення процесу | Співвідношення масових частинок солі і лугів визначає кінцевий склад продукту реакції | Значення рН процесу фазоутворення регулюється катодними реакціями (2) і (3) |

Кінець табл. 2

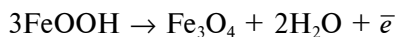
| Параметр | Процеси фазоутворення при сумісному осадженні гідроксидів у лужному середовищі* | Гальванокоагуляційне фазоутворення в системі залізо–вуглець |
|---|---|--|
| <i>Продукти процесу фазоутворення</i> | | |
| Залізо-кисневі сполуки | Магнетит Fe ₃ O ₄ , гетит α-FeOOH | Гетит α-FeOOH, лепідокрокіт γ-FeOOH, магнетит Fe ₃ O ₄ , магеміт γ-Fe ₂ O ₃ , гематит α-Fe ₂ O ₃ |
| Ферити важких металів | ZnFe ₂ O ₄ , NiFe ₂ O ₄ , CuFe ₂ O ₄ (при кип'ятінні суспензії) | ZnFe ₂ O ₄ , NiFe ₂ O ₄ , CuFe ₂ O ₄ , CuFeO ₂ |
| Гідроксиди важких металів та їх обводнені форми | Zn(OH) ₂ , Ni(OH) ₂ , Cu(OH) ₂ (× nH ₂ O) | Zn(OH) ₂ , Ni(OH) ₂ , Cu(OH) ₂ (× nH ₂ O) |
| Моногідрати важких металів | CuOOH, NiOOH | CuOOH, NiOOH |
| Оксиди важких металів | CuO, Cu ₂ O, 6CuO·Cu ₂ O (внаслідок деструкції гідроксидів міді); NiO, ZnO (при порушенні "феритного співвідношення" компонентів) | CuO, Cu ₂ O, 6CuO·Cu ₂ O, NiO, ZnO (як самостійні фази) |
| Основні солі | Основні солі важких металів як продукти проміжної стадії утворення гідроксидів | Основні солі важких металів як самостійні фази і фази-включення в залізо-кисневих структурах |

*За даними праць [7, 8, 22, 23, 29–34].

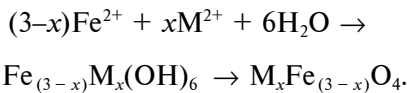
до моногідрату FeOOH пов'язаний з окисненням Fe(II) в кристалічних ґратках, тобто



то катодні процеси суттєво різняться: при гальванокоагуляції мають місце реакції (2) або (3), а при електрокоагуляційному процесі, згідно з [16], в катодному просторі проходить відновлення моногідрату протонами з утворенням магнетиту



і одночасне утворення феритів за схемою



Атомне співвідношення Fe(II):Fe(III) (1:2) в процесі співосадження гідроксидів визначає не тільки кількість, а й якість фериту заліза – магнетиту [30] і суттєво впливає на хід самого процесу феритизації [31]. При гальванокоагуляції наявність у дисперсійному середовищі катіонів заліза(II) інтенсифікує процес фазоутворення, а катіони і гідроксиди заліза(III), навпаки, гальмують утворення залізо-кисневих структур [32]. Утворення структур феритів при сумісному осадженні залежить від багатьох факторів, зокрема від "феритного співвідношення" компонентів у системі, порушення якого веде реакції фазоу-

творення до утворення або феритів, або основних солей [7, 8]. Наприклад, для фериту міді оптимальне атомне співвідношення Cu(II):Fe(II) становить 1:3–1:5, а для фериту нікелю – співвідношення Ni(II):Fe(II) дорівнює 0,51 [32]. При гальванокоагуляційному феритоутворенні таких залежностей встановлено не було. Вплив аніонної складової в процесі утворення магнетиту сумісним осадженням досліджено в статті [33], а при гальванокоагуляційному процесі – проілюстровано в [1], воно полягає у фазовому розподілі залізо-кисневих структур і визначає загальну масу ультрадисперсного осаду. В процесі формування феритів важких металів сумісним осадженням значну роль відіграє порядок осадження гідроксидів, а для гальвано- і електрокоагуляції його забезпечує первинне утворення структур моногідратів заліза. Для сумісного осадження істотне значення має температура і час обробки суспензії сумісно осаджених гідроксидів [7, 8], а для гальванокоагуляції – час контакту складових гальванопари з компонентами дисперсійного середовища, або швидкість потоку розчину через систему гальваноконтактів. Швидкість утворення феритів при сумісному осадженні залежить від ступеня неоднорідності розчину і від здатності окремих гідроксидів до дегідратації: якщо один із компонентів легко дегідратує, то цю властивість успадковує і твердий розчин; навпаки,

якщо в обох гідроксидах дегідратація відбувається досить повільно (утворюються $\text{Cu}(\text{OH})_2$ і $\text{Fe}(\text{OH})_2$), то процес старіння і феритоутворення значно ускладнюється [6]. Для гальванокоагуляційного феритоутворення найважливішим процесом є координаційна фіксація катіонів важких металів гідроксидами (моногідратами) заліза і клатрування інших компонентів дисперсійного середовища завдяки їх "тунельній будові" [34]. В [35] встановлено, що механізм утворення феритів при сумісному осадженні гідроксидів складається з двох стадій: хімічних реакцій на межі розподілу вихідних фаз і дифузії реагуючих компонентів через шар новоутвореної феритної фази, тобто процес проходить за рахунок двох видів дифузії – поверхневої, яка має перевагу при відносно низьких температурах, і об'ємної, вплив якої зростає з часом контактування реагуючих фаз і при підвищенні температури. Наприклад, для системи $\text{Zn}(\text{OH})_2$ – α - FeOOH кінетику утворення фериту при $T = 40^\circ\text{C}$ описує рівняння $x = kt^{0,255}$, а при $T = 100^\circ\text{C}$, відповідно, $x = kt^{0,085}$. Для гальванокоагуляції кінетичні обмеження пов'язані з проходженням електродних реакцій, утворенням моногідратів заліза і їх взаємодією з компонентами дисперсійного середовища. Аналіз кінцевих продуктів процесу фазоутворення вказує на різноманітніший спектр залізо-кисневих структур при гальванокоагуляційному процесі, в той час як склад інших структур, які містять катіони важких металів, в обох системах практично не відрізняється один від одного.

Висновки

1. Процес формування залізо-кисневих структур, в тому числі феритів важких металів, в системі гальваноконтакту Ст3–кокс стадійний і забезпечується проходженням просторово розділених електрохімічних реакцій анодного розчинення сталевих складових і відновлення кисню, продукти яких – $\text{Fe}(\text{II})$ і гідроксил – при наявності окисника утворюють зародкові структури феригідриту $\text{Fe}_5\text{O}_3(\text{OH})_9$ і протолепідокрокитів $\text{Fe}_2\text{FeO}_2(\text{OH})_3$ та $\text{FeFeO}_2(\text{OH})$, подальший розвиток яких пов'язаний із фазовою трансформацією в сорбційно-активні моногідрати заліза – гетит α - FeOOH і лепідокрокит γ - FeOOH [12, 13]. Взаємодія моногідратів заліза з компонентами дисперсійного середовища спричиняє їх залучення до кристалічних ґраток і фазові перетворення з формуванням щільних структур ок-

сидів заліза: гематиту α - Fe_2O_3 , магеміту γ - Fe_2O_3 або магнетиту Fe_3O_4 і феритів важких металів MeFe_2O_4 .

2. Аналіз термодинамічних функцій реакцій феритоутворення у водному дисперсійному середовищі за участю гідратованих і гідролізованих катіонних форм важких металів, при взаємодії катіонних форм з гідроксидами і моногідратами заліза і за допомогою твердофазних реакцій при стандартних умовах проведення процесу вказує на їх принципову можливість у всьому діапазоні значень рН (1,5–11,5). Водночас, при гальванокоагуляції маловірогідними є реакції феритоутворення в кислому середовищі, які супроводжуються утворенням протонів, що істотно обмежує коло реакцій. Інше обмеження полягає у формуванні в системі гальваноконтакту Ст3–кокс на першому етапі фазоутворення структур моногідратів або гідроксидів заліза, що характерно для нейтрального або слаболужного середовища. Тому найвірогідніші реакції, за якими відбувається утворення феритів у системі гальваноконтакту Ст3–кокс, проходять за участю моногідратів заліза і описуються рівняннями (17), (18), (25).

3. Порівняльний аналіз механізмів утворення феритів у водному дисперсійному середовищі при гальванокоагуляції (електрокоагуляції) і сумісному осадженні солей у лужному середовищі характеризується суттєвою відмінністю в джерелі надходження в зону реакції вихідних компонентів та їх співвідношенні. Головними фізико-хімічними параметрами, які визначають умови феритоутворення при гальванокоагуляції, є хімічний склад і значення рН дисперсійного середовища, час контакту складових гальванопар з компонентами розчину. Для сумісного осадження гідроксидів переважну роль відіграють атомне співвідношення заліза та інших металів, порядок осадження гідроксидів, температура і час обробки суспензії, здатність окремих гідроксидів до дегідратації. В той же час кінцеві продукти фазоутворення в обох випадках мають аналогічний склад, відмінність їх полягає в різноманітнішому спектрі залізо-кисневих структур, які утворюються при гальванокоагуляційному процесі.

Подальші дослідження мають бути спрямовані на встановлення кінетичних залежностей формування структур феритів заліза, нікелю, цинку, міді, кобальту і срібла при гальванокоагуляції, їх узагальнення для інших феритів важких металів і їх порівняння з кінетичними залежностями формування феритів у водному дисперсійному середовищі за іншими технологіями.

Е.Н. Лавриненко

ОБРАЗОВАНИЕ УЛЬТРАДИСПЕРСНЫХ ФЕРРИТОВ НИКЕЛЯ, МЕДИ И ЦИНКА В СИСТЕМЕ ГАЛЬВАНOKONTAKTA ЖЕЛЕЗО–УГЛЕРОД. 2. АНАЛИЗ КОЛЛОИДНО-ХИМИЧЕСКИХ МЕХАНИЗМОВ ОБРАЗОВАНИЯ УЛЬТРАДИСПЕРСНЫХ ФЕРРИТОВ В СИСТЕМЕ ГАЛЬВАНOKONTAKTA ЖЕЛЕЗО–УГЛЕРОД

Установлены коллоидно-химические механизмы реакций образования ферритов цинка, никеля и меди и состав компонентов дисперсионной среды, участвующих в процессе ферритообразования. Определены оптимальные условия ферритообразования в системах, содержащих катионы никеля, меди и цинка.

O.M. Lavrynenko

FORMATION OF ULTRADISPERSE FERRITES OF NICKEL, COPPER, AND ZINC IN THE IRON–CARBON GALVANOCONTACT SYSTEM. 2. ANALYSIS OF COLLOIDAL-CHEMICAL MECHANISMS OF ULTRADISPERSE FERRITES FORMATION IN THE IRON–CARBON GALVANOCONTACT SYSTEM

This paper makes a case for colloid-chemical mechanisms of zinc, nickel and copper ferrites formation reactions, as well as composition of dispersed medium compounds, which take part in the ferrite-formation process. It highlights the optimal conditions for ferrite-formation in the systems containing nickel, copper, and zinc cations.

1. *Лавриненко О.М.* Утворення ультрадисперсних феритів нікелю, міді та цинку в системі гальваноконтакту залізо–вуглець. 1. Фізико-хімічні закономірності утворення ультрадисперсних феритів у системі гальваноконтакту залізо–вуглець // Наукові вісті НТУУ "КПІ". – 2007. – № 6. – С. 131–139.
2. *Способ и устройство для очистки растворов от различных примесей / В.А. Феофанов, В.Г. Вдовкин, Л.П. Жданович, Б.С. Луханин* // Техническое предложение. – Алма-Ата, 1985. – 23 с.
3. *Электрокоагуляционный способ очистки промышленных сточных вод* // Бюл. техн.-эконом. информации. – 1976. – № 9. – С. 37.
4. *Прокопенко В.А., Лавриненко Е.Н., Мамуня С.В.* Влияние природы катиона на процесс формирования дисперсных фаз ферритов тяжелых металлов в условиях гальваноконтакта железо–углерод // Наукові вісті ОДУ. – 2005. – 10, вип. 1-2. – С. 155–165.
5. *Филатов С.К.* Высокотемпературная кристаллохимия. Теория, методы и результаты исследований. – Л.: Недра, Ленингр. отд., 1990. – 288 с.
6. *Левин Б.Е., Третьяков Ю.Д., Летюк Л.М.* Физико-химические основы получения, свойства и применение ферритов / Под ред. Б.Е. Левина. – М.: Металлургия, 1979. – 472 с.
7. *Влияние условий осаждения на состав, структуру и свойства гидроксидных ферритных порошков / Е.Н. Лукачина, В.И. Стеценко, А.И. Гурченко, А.С. Костенко и др.* // Хим. технологии. – 1979. – № 3. – С. 21–23.
8. *Чалый В.П.* Образование ферритов при старении гидроксидов металлов // Укр. хим. журн. – 1959. – XXV, вып. 3. – С. 285–287.
9. *О механизме процессов в гальванопаре железо–углерод (кокс) в аэрированном растворе, содержащем ионы тяжелых металлов / В.В. Зозуля, Е.Н. Лавриненко, В.А. Прокопенко, Н.В. Перцов* // Там же. – 2000. – 66, № 7. – С. 48–50.
10. *Данков П.Д., Игнатов Д.В., Шишаков Н.А.* Электронно-графические исследования окисных и гидроокисных пленок на металлах. – М.: Изд-во АН СССР, 1953. – 208 с.
11. *Кинетика окисления ионов двухвалентного железа кислородом воздуха и хлором / В.В. Сысоева, Г.Н. Доброхотов, И.А. Строева, А.Л. Ротинян* // Журн. прикл. химии. – 1968. – № 9. – С. 1946–1950.
12. *Прокопенко В.А., Лавриненко Е.Н., Мамуня С.В.* Локализация процессов образования наноразмерных железо-кислородных структур в системе $Fe^0-H_2O-O_2$ // Наносистемы, наноматериалы, нанотехнологии. – 2005. – 3, № 2. – С. 513–520.
13. *Влияние температуры на развитие наноразмерных зародышевых железо-кислородных структур в системе $Fe^0-H_2O-O_2$ / Е.Н. Лавриненко, В.А. Прокопенко, Н.И. Лебовка, С.В. Мамуня* // Коллоидный журн. – 2008. – 70, № 3. – С. 1–8.
14. *Гипергенные окислы железа в геологических процессах / Ф.В. Чухров, Л.П. Ермилова, А.И. Горшков и др.* – М.: Наука, 1975. – 208 с.
15. *Лавриненко Е.Н.* Роль катионов железа дисперсионной среды при образовании железо-кислородных структур в системах на основе железа и углерода // Наносистемы, наноматериалы, нанотехнологии. – 2007. – 5, спец. вып. № 2. – С. 449–470.
16. *Рациональное использование и очистка воды на машиностроительных предприятиях / В.М. Макаров, Ю.П. Бе-*

- личенко, В.С. Галустов, А.И. Чуфаровский. – М.: Машиностроение, 1988. – 272 с.
17. *Лавриненко О.М.* Закономірності утворення залізо-кисневих структур у системі гальваноконтакту залізо–вуглець // Наукові вісті НТТУ “КПІ”. – 2007. – № 5. – С. 110–117.
18. *Егоров Ю.В.* Статика сорбции микрокомпонентов оксигидратами. – М.: Атомиздат, 1975. – 200 с.
19. *Чальїй В.П.* Гидроокиси металлов. Закономерности образования, состав, структура и свойства. – К.: Наук. думка, 1972. – 158 с.
20. *Запольский А.К., Баран А.А.* Коагулянты и флокулянты в процессах очистки воды. – Л.: Химия, Ленингр. отд. – 1987. – 204 с.
21. *Baes C.F., Mesmer R.E.* Hydrolysable Metals. – London; Paris, 1976. – N4.
22. *Роде Е.Я.* Физико-химическое изучение окислов и гидроокислов металлов // Журн. неорг. химии. – 1956. – 1. – С. 1430–1439.
23. *Исследование* зависимости между гидролизом 3d-элементов и сорбцией их осадками гидроксидов // Соосаждение с гидратированными окислами. – Душанбе: Изд-во ТаджГУ, 1977. – Т. 2. – С. 81–84.
24. *Булах А.Г.* Методы термодинамики в минералогии – Л.: Недра, 1974. – 184 с.
25. *Карапетьянц М.Х.* Химическая термодинамика. – М.: Химия, 1975. – 648 с.
26. *Карапетьянц М.Х., Карапетьянц М.Л.* Основные термодинамические константы неорганических и органических веществ. – М.: Химия, 1968. – 472 с.
27. *Карпов И.К., Кашик С.А., Пампура В.Д.* Константы веществ для термодинамических расчетов в геохимии и петрологии. – М.: Наука, 1972. – 386 с.
28. *Наумов Г.Б., Рыженко Б.Н., Ходаковский И.Л.* Справочник термодинамических величин (для геологов). – 4-е изд. – М.: Атомиздат, 1971. – 240 с.
29. *Новиков А.И.* О химизме соосаждения малых количеств элементов с гидратированными окислами // Соосаждение с гидратированными окислами. – Душанбе: Изд-во ТаджГУ, 1972. – Т. 1. – С. 5–42.
30. *Смирнов Д.Н., Генкин В.Е.* Очистка сточных вод в процессах обработки металлов. – Изд. 2-е. – М.: Металлургия, 1989. – 224 с.
31. *Магнитная* очистка сточных вод, содержащих ионы тяжелых металлов / И.Е. Манеховская, П.Ф. Турчин, Н.В. Яцков и др. – Деп. в УкрНИИТИ 13.03.91, № 349-Ук91. – К. – 19 с.
32. *Лавриненко О.М., Прокопенко В.А., Мамуня С.В.* Вивчення процесів фазоутворення в системі гальваноконтакту залізо–вуглець (кокс) в розчинах FeSO_4 та $\text{Fe}_2(\text{SO}_4)_3$ // Наукові вісті НТУУ “КПІ”. – 2005. – № 6. – С. 143–151.
33. *Влияние* солевого состава на кинетику образования магнетита, его магнитную восприимчивость и механическое обезвоживание / И.А. Вайнштейн, В.И. Конвисар, Л.Д. Кленьшева, Н.Ф. Хворост // Журн. прикл. химии. – 1982. – 55, № 1. – С. 133–138.
34. *Любман Н.Я., Имангазиева Г.К., Ким З.И.* Организация бессточной технологии и совершенствование методов очистки сточных вод на предприятиях цветной металлургии // Очистка растворов от ионов цветных металлов методом ферритизации. – Алма-Ата: Казмеханобр, 1981. – № 24. – С. 25–32.

УДК 661.862.547.495.2.66.094.941

Б.І. Мельников, І.А. Василенко,
І.М. Астрелін

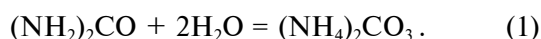
ДОСЛІДЖЕННЯ КІНЕТИКИ ГОМОГЕННОГО ГІДРОЛІЗУ СУЛЬФАТУ ЗАЛІЗА(II) ПРИ НАЯВНОСТІ КАРБАМІДУ

Вступ

Гідроліз солей заліза широко використовується в промисловості для синтезу залізооксидних пігментів, каталізаторів, магнітоносіїв і інших залізовмісних матеріалів [1]. Гідроліз проводиться хімічним осадженням з розчинів до утворення гідроксидів заліза, які завдяки малій розчинності утворюють тверді осади у вигляді дрібнодисперсних продуктів. Ці продукти використовуються як готові матеріали або напівпродукти технологічного призначення з їх подальшою переробкою. При цьому дуже істотну роль відіграє можливість керування процесом синтезу з метою одержання продуктів із передбаченими характеристиками: структурою, складом, дисперсністю тощо.

Одним із методів керованого синтезу хімічним осадженням з розчинів дрібнодисперсних продуктів є використання гомогенного гідролізу за допомогою карбаміду, який виявив значні переваги порівняно з традиційними методами гідролізу солей металів лугами [2].

Для гідролізу солей заліза наведений метод реалізовано "аміачним способом" або способом Мартіна, який є кращим при одержанні залізооксидних пігментів високої якості [1]. Даний спосіб оснований на використанні як осадника аміаку або карбаміду (сечовини). Застосування карбаміду для проведення даного процесу гідролізу зумовлене його здатністю розчинятися в реакційному середовищі, не вступаючи у взаємодію, рівномірно розподілятися за об'ємом, а при підвищенні температури – повільно гідролізуватися з утворенням солі амонію:



При цьому реалізується дуже м'який режим нейтралізації солі металу без місцевого підвищення визначеного рН [1].

Про перспективність гомогенного гідролізу при наявності карбаміду свідчить розширення кількості патентів із використанням карбаміду як для синтезу залізооксидного пігменту [3], так

й інших продуктів (наприклад, гідроксидів цирконію [4] тощо).

Проте в літературі немає даних з кінетики гомогенного гідролізу солей заліза при наявності карбаміду, що стримує розширене використання методу для вдосконалення процесу гідролізу з метою одержання інших цінних матеріалів: нанодисперсних і модифікованих продуктів гідролізу, а також розширення сировинної бази для одержання залізовмісних продуктів через введення в переробку промислових викидів: травильних розчинів, відходів гальванічних виробництв тощо. Переробка їх спроможна вирішити ряд питань, серед яких виробництво більш дешевого вітчизняного продукту, здатного конкурувати на світовому ринку з іншими виробниками. Питання це дуже актуальне для України, де практично не виробляються залізооксидні пігменти, незважаючи на попит і величезну сировинну базу.

Об'єктом дослідження вибрано сульфат заліза (II), який міститься в багатотоннажних промислових відходах.

Виконані раніше дослідження [5] з гомогенного гідролізу солей інших металів при наявності карбаміду показали, що швидкість гідролізу карбаміду набагато нижча, ніж гідролізу солей металів, і залежить від рН розчину і температури. Кінетичні характеристики гідролізу кожного металу при наявності карбаміду неоднакові і потребують окремих цілеспрямованих досліджень, що і зумовило постановку даної задачі в статті.

Постановка задачі

Метою дослідження є одержання кінетичних характеристик гомогенного гідролізу сульфату заліза (II) з карбамідом у водному розчині у вигляді залежностей змін концентрації солей заліза від часу гідролізу, визначення порядку і механізму реакцій гідролізу, констант швидкості реакцій, а також аналітичних залежностей ступеня гідролізу від технологічних параметрів процесу.

Вивчення кінетики процесу дасть можливість виявити закономірності і механізм перебігу відповідних реакцій та вплив ряду факторів на швидкість цільового процесу. Необхідність одержання таких даних зумовлено можливістю за їх допомогою керувати процесом синтезу для одержання продуктів заданої структури і дисперсності, в тому числі і нанодисперсних розмірів.

Методи дослідження

Для експерименту використовувались сульфат заліза $\text{FeSO}_4 \cdot 7\text{H}_2\text{O}$ марки "ч" і карбамід $(\text{NH}_2)_2\text{CO}$ (ГОСТ 6691–77). Дослідження з вивчення кінетики проводилися в реакторі із зворотним холодильником. Досліджувалася взаємодія розчинів сульфату заліза (II) з початковими концентраціями $C_{\text{Fe}}^0 = 10\text{--}24\text{ г/дм}^3$ з карбамідом у молярному відношенні (n) початкових концентрацій карбаміду до сульфату заліза (II) $n = 10, 5, 3, 2, 1,5$. Гідроліз проводився при температурі розчинів $353\text{--}373\text{ К}$. Карбамід додавався до розчину FeSO_4 після досягнення ним заданої температури. Кінетика процесу вивчалася за допомогою відбору проб з розчину через певні проміжки часу і визначення змін концентрацій солі металу і карбаміду.

Концентрація сульфату заліза (II) визначалась методом перманганатометрії, оснований на реакціях окиснювання відновників іонами перманганату. Слід сказати, що окиснювання може проводитись як у кислому, так і в слабкому лужному середовищі [6].

Концентрація карбаміду знаходилася фотометричним методом, оснований на вимірюванні оптичної щільності комплексу, що утворюється при взаємодії сечовини з n -диметиламінобензальдегідом при хвилі завдовжки $\lambda = 420\text{ нм}$. Для вимірювання оптичної щільності використовувався концентраційний фотоелектричний колориметр КФК-2-УХЛ4.2 [7].

Результати досліджень

В результаті досліджень одержано кінетичні характеристики гомогенного гідролізу сульфату заліза (II) при наявності карбаміду, які показані на рис. 1–4 у вигляді залежностей змін концентрації солі заліза і карбаміду від часу гідролізу.

Раніше проведені дослідження гідролізу солей цирконію, алюмінію і цинку при наявності карбаміду [5] засвідчили, що стадією, яка лімітує процес гідролізу FeSO_4 , є стадія гідролізу карбаміду, продукт якого (іони амонію) кількісно за стехіометрією вступають у реакцію з сіллю металу, що експериментально підтвердилось і в даних дослідженнях для сульфату заліза (II). Тому для аналізу кінетичних характеристик було вибрано залежності концентрації карбаміду від часу (див. рис. 3, 4).

Для визначення порядку реакції гідролізу карбаміду ці залежності було апроксимовано у

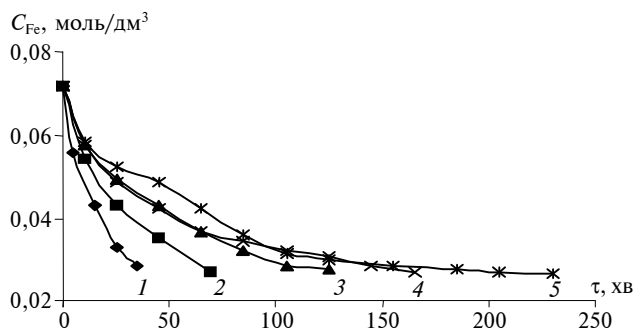


Рис. 1. Залежність зміни концентрації сульфату заліза (II) від часу гідролізу при $C_k = 10\text{ г/дм}^3$ ($0,0719\text{ моль/дм}^3$), температурі 373 К ; 1 – $n = 10$; 2 – $n = 5$; 3 – $n = 3$; 4 – $n = 2$; 5 – $n = 1,5$

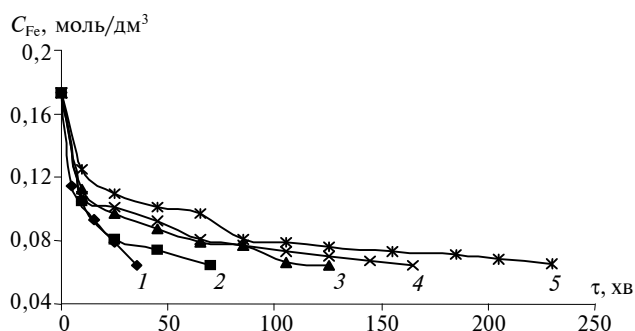


Рис. 2. Залежність зміни концентрації сульфату заліза (II) від часу гідролізу при $C_k = 24\text{ г/дм}^3$ ($0,172\text{ моль/дм}^3$), температурі 373 К ; 1 – $n = 10$; 2 – $n = 5$; 3 – $n = 3$; 4 – $n = 2$; 5 – $n = 1,5$

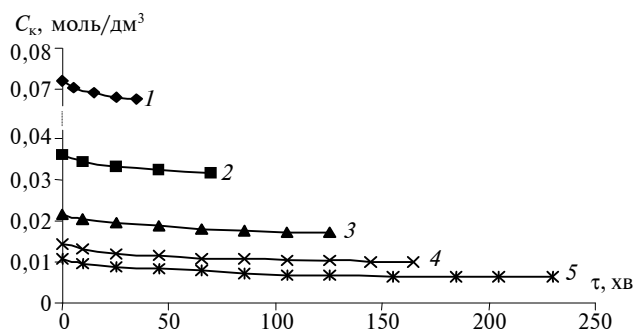


Рис. 3. Залежність зміни концентрації карбаміду C_k від часу гідролізу при $C_{\text{Fe}} = 10\text{ г/дм}^3$ ($0,0719\text{ моль/дм}^3$), температурі 373 К ; 1 – $n = 10$; 2 – $n = 5$; 3 – $n = 3$; 4 – $n = 2$; 5 – $n = 1,5$

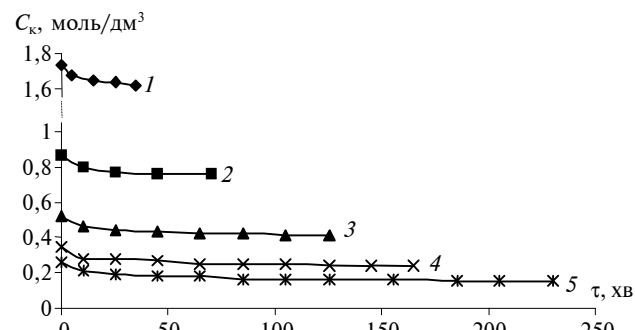


Рис. 4. Залежність зміни концентрації карбаміду C_k від часу гідролізу при $C_{\text{Fe}} = 24\text{ г/дм}^3$ ($0,172\text{ моль/дм}^3$), температурі 373 К ; 1 – $n = 10$; 2 – $n = 5$; 3 – $n = 3$; 4 – $n = 2$; 5 – $n = 1,5$

вигляді прямих у координатах C_k , $\ln(C_k)$, $1/C_k$, $1/C_k^2 = f(\tau)$, де C_k – концентрація карбаміду; τ – час від початку реакції. З кутів нахилу прямих визначено відповідні значення констант швидкостей, які наведено в таблиці.

Як видно з таблиці, найбільше значення достовірності апроксимації відповідає константі швидкості для залежності $\ln(C_k) = f(\tau)$, що свідчить про перший порядок реакції гідролізу карбаміду, значення якого узгоджується з даними [5]. При цьому константа швидкості для температури 373 К становить $K \approx 0,0020 \text{ хв}^{-1}$.

Аналогічно було визначено константи швидкості реакції (1) при інших температурах, залежність логарифмів яких від оберненої температури наведено на рис. 5. Апроксимація цієї залежності у вигляді прямої виявила достатню достовірність (в межах припустимої помилки експерименту). З рис. 5 було визначено енергію активації і передекспоненціальний множник для рівняння Арреніуса константи швидкості реакції (1), які мають відповідно такі значення: $E = 93,859 \text{ кДж/моль}$, $K_0 = 2,7 \cdot 10^{10} \text{ хв}^{-1}$.

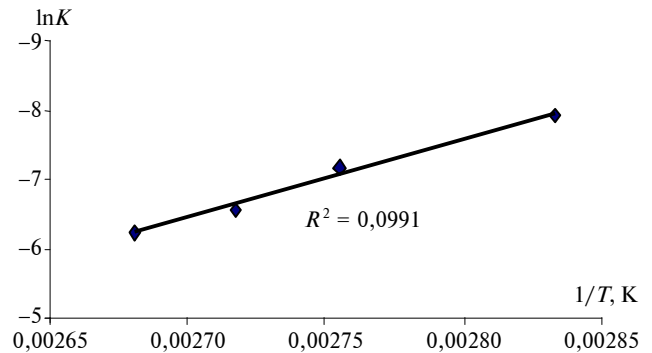


Рис. 5. Залежність логарифма константи швидкості гідролізу сульфату заліза (II) від температури при $C_{\text{Fe}} = 10 \text{ г/дм}^3$, $n = 10$

Таким чином, швидкість реакції (1) ω_k можна записати у вигляді рівняння реакції першого порядку:

$$\omega_k = \frac{dC_k}{d\tau} = KC_k \quad (4)$$

з константою швидкості:

$$K = K_0 e^{E/RT} = 2,7 \cdot 10^{10} e^{-93,859/RT} = 2,7 \cdot 10^{10} e^{-110289/T} \text{ хв}^{-1}.$$

Таблиця. Значення констант швидкості реакції (1) при обробці в різних координатах (за даними рис. 3, 4)

| C_{Fe}^0 | n | $K(C_k)$, моль/(дм ³ ·хв) (R^2)* | $K(\ln C_k)$, хв ⁻¹ (R^2) | $K(1/C_k)$, дм ³ /моль (R^2) | $K(1/C_k^2)$, (дм ³) ² /моль ² (R^2) |
|-------------------|---------|---|--|---|--|
| 10 | 10 | 0,00123 (0,915) | 0,0018 (0,969) | 0,002 (0,949) | 0,001 (0,838) |
| | 5 | 0,00063 (0,884) | 0,0019 (0,960) | 0,005 (0,851) | 0,005 (0,840) |
| | 3 | 0,00035 (0,879) | 0,0019 (0,949) | 0,009 (0,895) | 0,017 (0,867) |
| | 2 | 0,00027 (0,809) | 0,0022 (0,899) | 0,018 (0,863) | 0,056 (0,758) |
| | 1,5 | 0,00019 (0,798) | 0,0022 (0,875) | 0,029 (0,827) | 0,123 (0,851) |
| | Середнє | 0,00053 (0,857) | 0,0020 (0,930) | 0,005 (0,877) | 0,041 (0,830) |
| 24 | 10 | 0,003 (0,814) | 0,0018 (0,912) | 0,001 (0,872) | 0,002 (0,665) |
| | 5 | 0,0015 (0,661) | 0,0019 (0,868) | 0,002 (0,867) | 0,01 (0,879) |
| | 3 | 0,00086 (0,690) | 0,0018 (0,819) | 0,004 (0,717) | 0,033 (0,94) |
| | 2 | 0,00065 (0,645) | 0,0022 (0,890) | 0,007 (0,790) | 0,093 (0,931) |
| | 1,5 | 0,00046 (0,686) | 0,0023 (0,905) | 0,011 (0,795) | 0,183 (0,943) |
| | Середнє | 0,00132 (0,699) | 0,0020 (0,896) | 0,005 (0,810) | 0,064 (0,702) |

* R^2 – значення достовірності апроксимації.

Як відомо з [8], для реакції першого порядку можна кінетичне рівняння (4) зобразити через ступінь перетворення реагенту. Тоді після інтегрування рівняння матимемо зручний для технологічного аналізу вигляд

$$x_k = 1 - e^{-K\tau} = (1 - e^{-2,7 \cdot 10^{10} \tau e^{-110289/T}}). \quad (5)$$

Для визначення кінетики гідролізу сульфату заліза (II) було проведено за експериментальними даними розрахунки матеріального балансу реагуючих компонентів, які показали, що іони амонію, утворювані при гідролізі карбаміду, кількісно нейтралізують сульфатні іони, а тому швидкість ω_{Fe} реакції гідролізу сульфату заліза (II) можна подати як швидкість ω_k реакції (1) із врахуванням співвідношення реагентів n :

$$\omega_{\text{Fe}} = n\omega_k. \quad (6)$$

Тоді із врахуванням рівняння (5) можна виразити ступінь перетворення сульфату заліза (II) кінетичним рівнянням

$$x_{\text{Fe}} = n(1 - e^{-K\tau}) = n(1 - e^{-2,7 \cdot 10^{10} \tau e^{-110289/T}}). \quad (7)$$

Це рівняння визначає аналітичну залежність ступеня гідролізу сульфату заліза (II) при наявності карбаміду від основних технологічних параметрів: температури, співвідношення початкових концентрацій реагентів і часу гідролізу.

Висновки

За результатами виконаних досліджень виявлено, що гідроліз сульфату заліза (II) при наявності карбаміду лімітується гідролізом карбаміду за реакцією першого порядку. Визначено кінетичні параметри процесу спільного гідролізу сульфату заліза з карбамідом. Виведено кінетичне рівняння залежності ступеня перетворення сульфату заліза (II) від основних технологічних параметрів, за допомогою якого можна керувати процесом. Досліджені закономірності і характеристики процесу гідролізу FeSO_4 будуть використані для обґрунтування технології виробництва якісних залізооксидних пігментів на основі вітчизняної сировини.

Б.И. Мельников, И.А. Василенко, И.М. Астрелин

ИССЛЕДОВАНИЕ КИНЕТИКИ ГОМОГЕННОГО ГИДРОЛИЗА СУЛЬФАТА ЖЕЛЕЗА(II) ПРИ НАЛИЧИИ КАРБАМИДА

Получены кинетические характеристики совместного гидролиза сульфата железа с карбамидом в водном растворе. Определены порядок реакции, константа скорости, предэкспоненциальный множитель, энергия активации. Выведены уравнения зависимости степени гидролиза сульфата железа от времени процесса.

B.I. Melnykov, I.A. Vasylenko, I.M. Astrelin

INVESTIGATION OF THE KINETICS TO REACTIONS OF JOINT HYDROLYSIS OF THE FERRIC(II) SULPHATE IN WHITNESS OF CARBAMIDE

In this paper, we describe the kinetic features of a joint hydrolysis of the ferric sulphate with carbamide in water solution. Moreover, we determine the order of reactions, velocity constant, preexponential factor and activation energy. Through experiments performed, we obtain the equation of the dependency degree of the ferric sulphate hydrolysis from the process life.

1. Шабанова Н.А., Попов В.В., Саркисов П.Д. Химия и технология нанодисперсных оксидов. — М.: ИКЦ "Академкнига", 2006. — 309 с.
2. Мельников Б.И. Методы управляемого синтеза нанодисперсных неорганических веществ и материалов химическим осаждением из растворов // III Українська наук.-техн. конф. з технології неорганічних речовин "Сучасні проблеми технології неорганічних речовин": Тези доп. — Дніпропетровськ: УДХТУ, 2006. — С. 122.
3. Пат. 2061009 Россия, МПК⁵ С 09, С 001/24. Способ получения железокисного пигмента / А.А. Бубнов, Н.А. Леонтьева. — № 94007848; Заявл. 05.03.1994; Опубл. 27.05.1996. — 3 с.
4. Пат. 39672 А Україна, МПК⁵ С 01, G 25/00, G 25/02. Спосіб одержання порошку діоксиду цирконію / Б.І. Мельников, Р.В. Смотраєв; Укр. держ. хіміко-технол. ун-т. — № 2000127112; Заявл. 11.12.2000; Опубл. 15.06.2001 // Бюл. № 5. — 2 с.

5. *Исследование* кинетики реакции совместного гидролиза солей алюминия с карбамидом / Р.В. Смотраев, Б.И. Мельников, Е.В. Землянухина, Н.П. Макаrenchенко // *Вопр. химии и хим. технологии.* – 2004. – № 2. – С. 78–80.
6. *Крешков А.П.* Основы аналитической химии. Качественный и количественный анализ. – М.: Химия, 1970. – 456 с.
7. *Технический* анализ и контроль в производстве неорганических веществ / Под ред. В.М. Торочешникова. – М.: Высш. шк., 1976. – 344 с.
8. *Теорія* процесів виробництв неорганічних речовин / І.М. Астрелін, А.К. Запольський, В.І. Супрунчук, Г.М. Прокоф'єва; За ред. А.К. Запольського. – К.: Вища шк., 1992. – 400 с.

Рекомендована Радою хіміко-технологічного факультету НТУУ "КПІ"

Надійшла до редакції
21 січня 2008 року

ТЕОРЕТИЧНІ ТА ПРИКЛАДНІ ПРОБЛЕМИ ФІЗИКО-МАТЕМАТИЧНИХ НАУК

УДК 517.9

Н.Л. Денисенко

АСИМПТОТИЧНІ ВЛАСТИВОСТІ НЕПЕРЕРВНИХ РОЗВ'ЯЗКІВ СИСТЕМ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНО-ФУНКЦІОНАЛЬНИХ РІВНЯНЬ З ЛІНІЙНИМИ ПЕРЕТВОРЕННЯМИ АРГУМЕНТУ *

Вступ

Різні окремі випадки систем диференціально-функціональних рівнянь вигляду

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), x(\lambda_1 t), \dots, x(\lambda_k t)), \quad (1)$$

де $\lambda_i > 0$, $i = \overline{1, k}$, f — деяка вектор-функція розмірності n , досліджувались багатьма математиками і на сьогодні ряд питань їх теорії досить добре вивчені. Так, в [1] досить повно досліджено асимптотичні властивості розв'язків лінійного скалярного рівняння ($n = 1$), в [2] одержано достатні умови існування та єдиності обмеженого на всій дійсній осі розв'язку системи нелінійних диференціально-функціональних рівнянь нейтрального типу, в [3] вивчено питання існування неперервних при $t \in \mathbb{R}^+$ розв'язків лінійних систем рівнянь з лінійно перетвореним аргументом.

Постановка задачі

Основною метою даної статті є дослідження асимптотичних властивостей неперервно диференційованих і обмежених при $t \in \mathbb{R}^+$ розв'язків деяких класів систем диференціально-функціональних рівнянь вигляду (1).

Неперервні і обмежені на \mathbb{R}^+ розв'язки систем лінійних диференціально-функціональних рівнянь з лінійними перетвореннями аргументу

Розглянемо спочатку систему диференціально-функціональних рівнянь вигляду

$$\dot{x}(t) = (\Lambda + A(t))x(t) + \sum_{i=1}^k B_i(t)x(\lambda_i t) \quad (2)$$

у випадку, коли $0 < \lambda_i < 1$ при $i = 1, \dots, j$, $\lambda_i > 1$ при $i = j+1, \dots, k$ ($0 < j \leq k$), $t \in \mathbb{R}^+ = [0, +\infty)$,

Λ — стала $(n \times n)$ -матриця, $A(t)$, $B_i(t)$, $i = \overline{1, k}$, — дійсні матричні функції розмірності $n \times n$.

Має місце така теорема.

Теорема 1. Нехай виконуються умови:

1) всі елементи матриць $A(t)$, $B_i(t)$, $i = \overline{1, k}$,

є неперервними, обмеженими при $t \in \mathbb{R}^+$ функціями і

$$\sup_{t \in \mathbb{R}^+} |A(t)| \leq a < \infty, \quad \sup_{t \in \mathbb{R}^+} |B_i(t)| \leq b_i < \infty, \quad i = \overline{1, k},$$

де $|A(t)| = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}(t)|$;

2) $\operatorname{Re} \lambda(\Lambda) < 0$, тобто $\exists K > 0$, $\alpha > 0$, для яких

$$|e^{\Lambda t}| \leq K e^{-\alpha t} \quad \text{при } t \in \mathbb{R}^+;$$

3) виконується співвідношення

$$\frac{1}{\alpha} K \left(a + \sum_{i=1}^k b_i \right) < 1. \quad (3)$$

Тоді існує сім'я неперервно диференційованих і обмежених при $t \in \mathbb{R}^+$ розв'язків $x(t) = x(t, c)$, де $c = (c_1, \dots, c_n)$, c_i , $i = \overline{1, n}$, — довільні сталі, системи рівнянь (2), які прямують до нуля при $t \rightarrow +\infty$.

Доведення. Оскільки довільний неперервно диференційований і обмежений при $t \in \mathbb{R}^+$ розв'язок системи рівнянь (2) задовольняє також систему інтегральних рівнянь

$$x(t) = e^{\Lambda t} c + \int_0^t e^{\Lambda(t-\tau)} (A(\tau)x(\tau) + \sum_{i=1}^k B_i(\tau)x(\lambda_i \tau)) d\tau, \quad (4)$$

де $c = (c_1, \dots, c_n)$, c_i , $i = \overline{1, n}$, — довільні сталі, і навпаки — довільний неперервний і обмежений при $t \in \mathbb{R}^+$ розв'язок системи інтегральних рівнянь (4) є також розв'язком системи рівнянь (2), то для доведення теореми достатньо довести, що система рівнянь (4) має сім'ю неперервних і обмежених при $t \in \mathbb{R}^+$ розв'язків $x(t) = x(t, c)$, де $c = (c_1, \dots, c_n)$, c_i , $i = \overline{1, n}$, — довільні сталі. Для цього використаємо метод послідовних наближень, які визначимо співвідношеннями

* Робота частково підтримана проектом Ф25.1/021.

$$\begin{aligned}
 x_0(t) &\equiv 0, \\
 x_m(t) &= e^{\Lambda t} c + \int_0^t e^{\Lambda(t-\tau)} (A(\tau)x_{m-1}(\tau) + \\
 &+ \sum_{i=1}^k B_i(\tau)x_{m-1}(\lambda_i\tau)) d\tau, \quad m = 1, 2, \dots
 \end{aligned}
 \tag{5}$$

Позначимо $\lambda_* = \min_{i=1,k} \lambda_i$. Тоді згідно з умовами теореми і співвідношеннями (5) при $t \geq 0$ маємо

$$\begin{aligned}
 |x_1(t) - x_0(t)| &= |e^{\Lambda t} c| \leq Ke^{-\alpha t} |c|, \\
 |x_2(t) - x_1(t)| &\leq \int_0^t |e^{\Lambda(t-\tau)}| (|A(\tau)||x_1(\tau) - x_0(\tau)| + \\
 &+ \sum_{i=1}^k |B_i(\tau)||x_1(\lambda_i\tau) - x_0(\lambda_i\tau)|) d\tau \leq \\
 &\leq \int_0^t Ke^{-\alpha(t-\tau)} (aKe^{-\alpha\tau} |c| + \sum_{i=1}^k b_i Ke^{-\alpha\lambda_i\tau} |c|) d\tau \leq \\
 &\leq K^2 \int_0^t e^{-\alpha(t-\tau)} (ae^{-\alpha\lambda_*\tau} |c| + \sum_{i=1}^k b_i e^{-\alpha\lambda_*\tau} |c|) d\tau = \\
 &= K^2 (a + \sum_{i=1}^k b_i) |c| e^{-\alpha t} \int_0^t e^{\alpha(1-\lambda_*)\tau} d\tau = \\
 &= K^2 (a + \sum_{i=1}^k b_i) |c| \frac{1}{\alpha(1-\lambda_*)} e^{-\alpha t} (e^{\alpha(1-\lambda_*)t} - 1) \leq
 \end{aligned}$$

$$\leq \frac{K^2 (a + \sum_{i=1}^k b_i) |c|}{\alpha(1-\lambda_*)} e^{-\alpha t} e^{\alpha(1-\lambda_*)t} = \Theta_1 e^{-\alpha\lambda_* t},$$

де $\Theta_1 := \frac{K^2 (a + \sum_{i=1}^k b_i) |c|}{\alpha(1-\lambda_*)}$.

Розмірковуючи за індукцією, покажемо, що при всіх $m \geq 1, t \geq 0$ виконуються співвідношення

$$|x_m(t) - x_{m-1}(t)| \leq \Theta_{m-1} e^{-\alpha\lambda_*^{m-1} t}, \tag{6}$$

де $\Theta_0 := K|c|$; $\Theta_m := \Theta_{m-1} \frac{K(a + \sum_{i=1}^k b_i)}{\alpha(1-\lambda_*^m)}$, $m = 1, 2, \dots$

Справді, при $m = 1$ оцінка (6) має місце. Припустимо, що оцінка (6) уже доведена для деякого $m \geq 1$, і покажемо, що вона не зміниться при переході від m до $m + 1$. Дійсно, беручи до уваги умови теореми і співвідношення (5) і (6), одержуємо

$$\begin{aligned}
 |x_{m+1}(t) - x_m(t)| &\leq \\
 &\leq \int_0^t Ke^{-\alpha(t-\tau)} (|A(\tau)||x_m(\tau) - x_{m-1}(\tau)| + \\
 &+ \sum_{i=1}^k |B_i(\tau)||x_m(\lambda_i\tau) - x_{m-1}(\lambda_i\tau)|) d\tau \leq \\
 &\leq K \int_0^t e^{-\alpha(t-\tau)} (a\Theta_{m-1} e^{-\alpha\lambda_*^{m-1}\tau} + \sum_{i=1}^k b_i \Theta_{m-1} e^{-\alpha\lambda_*^{m-1}\lambda_i\tau}) d\tau \leq \\
 &\leq \Theta_{m-1} Ke^{-\alpha t} \int_0^t e^{\alpha\tau} (ae^{-\alpha\lambda_*^m\tau} + \sum_{i=1}^k b_i e^{-\alpha\lambda_*^m\tau}) d\tau = \\
 &= \Theta_{m-1} K (a + \sum_{i=1}^k b_i) e^{-\alpha t} \int_0^t e^{\alpha(1-\lambda_*^m)\tau} d\tau = \\
 &= \Theta_{m-1} \frac{K(a + \sum_{i=1}^k b_i)}{\alpha(1-\lambda_*^m)} e^{-\alpha t} (e^{\alpha(1-\lambda_*^m)t} - 1) \leq \\
 &\leq \Theta_m e^{-\alpha t} e^{\alpha(1-\lambda_*^m)t} = \Theta_m e^{-\alpha\lambda_*^m t}.
 \end{aligned}$$

Таким чином, доведено, що оцінка (6) має місце для довільного $m \geq 1$.

Оскільки при всіх $m \geq 1, t \geq 0$ виконуються співвідношення

$$|x_m(t) - x_{m-1}(t)| \leq \Theta_{m-1} e^{-\alpha\lambda_*^{m-1} t} \leq \Theta_{m-1}$$

і

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} \frac{\Theta_{m+1}}{\Theta_m} = \lim_{m \rightarrow +\infty} \frac{K(a + \sum_{i=1}^k b_i)}{\alpha(1-\lambda_*^{m+1})} = \frac{1}{\alpha} K(a + \sum_{i=1}^k b_i),$$

то згідно з (3) ряд $\sum_{m=1}^{+\infty} \Theta_{m-1}$ збігається. Тоді ряд

$$\sum_{m=1}^{+\infty} (x_m(t) - x_{m-1}(t))$$

також рівномірно збігається для довільного $t \in \mathbb{R}^+$ до деякої неперервної вектор-функції $x(t)$, яка є розв'язком системи інтегральних

рівнянь (4). Це легко показати, якщо в (5) перейти до границі при $m \rightarrow +\infty$. Таким чином, система рівнянь (4) має сім'ю неперервних і обмежених при $t \in \mathbb{R}^+$ розв'язків $x(t) = x(t, c)$, які прямують до нуля при $t \rightarrow +\infty$ (це випливає з (6)).

Щоб довести неперервну диференційовність розв'язків системи рівнянь (4), продиференціюємо співвідношення (5):

$$\begin{aligned} \dot{x}_0(t) &\equiv 0, \\ \dot{x}_m(t) &= \Lambda x_m(t) + A(t)x_{m-1}(t) + \sum_{i=1}^k B_i(t)x_{m-1}(\lambda_i t), \\ m &= 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Звідси знаходимо

$$\begin{aligned} |\dot{x}_1(t) - \dot{x}_0(t)| &\leq |\Lambda| |x_1(t) - x_0(t)|, \\ |\dot{x}_m(t) - \dot{x}_{m-1}(t)| &\leq |\Lambda| |x_m(t) - x_{m-1}(t)| + \\ &+ |A(t)| |x_{m-1}(t) - x_{m-2}(t)| + \\ &+ \sum_{i=1}^k |B_i(t)| |x_{m-1}(\lambda_i t) - x_{m-2}(\lambda_i t)|, \quad m = 2, 3, \dots \end{aligned} \quad (7)$$

Позначивши $\mu_m := \sup_{t \geq 0} |\dot{x}_m(t) - \dot{x}_{m-1}(t)|$, $\nu_m := \sup_{t \geq 0} |x_m(t) - x_{m-1}(t)|$, $m = 1, 2, \dots$, із (7) отримаємо

$$\begin{aligned} \mu_1 &\leq |\Lambda| \nu_1, \\ \mu_m &\leq |\Lambda| \nu_m + (a + \sum_{i=1}^k b_i) \nu_{m-1}, \quad m = 2, 3, \dots \end{aligned}$$

Отже, маємо

$$\sum_{m=1}^{+\infty} \mu_m \leq (|\Lambda| + a + \sum_{i=1}^k b_i) \sum_{m=1}^{+\infty} \nu_m.$$

Із збіжності ряду $\sum_{m=1}^{+\infty} \nu_m$ випливає збіж-

ність ряду $\sum_{m=1}^{+\infty} \mu_m$. Цим самим теорема доведена.

Розглянемо тепер систему диференціально-функціональних рівнянь (2) у випадку, коли $\lambda_i > 1$, $i = \overline{1, k}$ (легко побачити, що в цьому разі відхилення аргументу $\Delta_i(t) = (1 - \lambda_i)t$ є від'ємним) і дослідимо існування і властивості її неперервно диференційовних на \mathbb{R}^+ розв'язків.

Справедлива така теорема.

Теорема 2. Нехай виконуються умови:

1) всі елементи матриць $A(t)$, $B_i(t)$, $i = \overline{1, k}$, є неперервними, обмеженими при $t \in \mathbb{R}^+$ функціями і

$$\sup_{t \in \mathbb{R}^+} |A(t)| \leq a < \infty, \quad \sup_{t \in \mathbb{R}^+} |B_i(t)| \leq b_i < \infty, \quad i = \overline{1, k};$$

2) $\operatorname{Re} \lambda(\Lambda) < 0$, тобто $\exists K > 0, \alpha > 0$, для яких

$$|e^{\Lambda t}| \leq K e^{-\alpha t} \quad \text{при } t \in \mathbb{R}^+;$$

3) виконується співвідношення

$$\frac{K(a + \sum_{i=1}^k b_i)}{\alpha - \alpha_*} < 1,$$

де $0 < \alpha_* < \alpha$.

Тоді існує сім'я неперервно диференційовних і обмежених при $t \in \mathbb{R}^+$ розв'язків $x(t) = x(t, c)$, де $c = (c_1, \dots, c_n)$, c_i , $i = \overline{1, n}$, – довільні сталі, системи рівнянь (2), які прямують до нуля при $t \rightarrow +\infty$.

Для доведення теореми достатньо, очевидно, показати, що система рівнянь (4) має сім'ю неперервних і обмежених при $t \in \mathbb{R}^+$ розв'язків $x(t) = x(t, c)$, що прямують до нуля при $t \rightarrow +\infty$. Беручи до уваги умови теореми, це здійснюємо за допомогою методу послідовних наближень, які визначаються за допомогою (5) і задовольняють при всіх $m \geq 1$, $t \geq 0$ співвідношення

$$|x_m(t) - x_{m-1}(t)| \leq \Theta_{m-1} e^{-\alpha_* t},$$

де $0 < \alpha_* < \alpha$; $\Theta_0 := K|c|$; $\Theta_m := \Theta_{m-1} \frac{K(a + \sum_{i=1}^k b_i)}{\alpha - \alpha_*}$, $m = 1, 2, \dots$

Неперервні і обмежені на \mathbb{R}^+ розв'язки систем нелінійних диференціально-функціональних рівнянь з лінійними перетвореннями аргументу

Тепер дослідимо властивості неперервно диференційовних на $t \in \mathbb{R}^+$ розв'язків системи нелінійних диференціально-функціональних рівнянь вигляду

$$\dot{x}(t) = \Lambda x(t) + f(t, x(t), x(\lambda_1 t), \dots, x(\lambda_k t)), \quad (8)$$

у випадку, коли $0 < \lambda_i < 1$ при $i = 1, \dots, j$, $\lambda_i > 1$ при $i = j + 1, \dots, k$ ($0 < j \leq k$), $t \in \mathbb{R}^+$, Λ – стала $(n \times n)$ -матриця, $f: \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \times \dots \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$.

Має місце така теорема.

Теорема 3. Нехай виконуються умови:

1) $\operatorname{Re} \lambda(\Lambda) < 0$, тобто $\exists K > 0, \alpha > 0$, для яких

$$|e^{\Lambda t}| \leq Ke^{-\alpha t} \text{ при } t \in \mathbb{R}^+; \quad (9)$$

2) неперервна при $t \in \mathbb{R}^+$ вектор-функція $f(t, x_0, x_1, \dots, x_k)$ така, що $f(t, 0, \dots, 0) = 0$ і задовольняє умову

$$\begin{aligned} |f(t, \tilde{x}_0, \tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_k) - f(t, \tilde{\tilde{x}}_0, \tilde{\tilde{x}}_1, \dots, \tilde{\tilde{x}}_k)| \leq \\ \leq l \sum_{i=0}^k |\tilde{x}_i - \tilde{\tilde{x}}_i|, \end{aligned} \quad (10)$$

де $t \in \mathbb{R}^+$; $\tilde{x}_i, \tilde{\tilde{x}}_i \in \mathbb{R}^n$, $i = \overline{0, k}$; $l = \operatorname{const} > 0$;

3) має місце співвідношення

$$\frac{Kl(k+1)}{\alpha} < 1. \quad (11)$$

Тоді при достатньо малому l існує сім'я неперервно диференційовних і обмежених при $t \in \mathbb{R}^+$ розв'язків $x(t) = x(t, c)$, де $c = (c_1, \dots, c_n)$, $c_i, i = \overline{1, n}$, – довільні сталі, системи рівнянь (8), які прямують до нуля при $t \rightarrow +\infty$.

Доведення. Оскільки довільний неперервно диференційовний і обмежений при $t \in \mathbb{R}^+$ розв'язок системи рівнянь (8) задовольняє також систему інтегральних рівнянь

$$\begin{aligned} x(t) = e^{\Lambda t} c + \\ + \int_0^t e^{\Lambda(t-\tau)} f(\tau, x(\tau), x(\lambda_1 \tau), \dots, x(\lambda_k \tau)) d\tau, \end{aligned} \quad (12)$$

де $c = (c_1, \dots, c_n)$, $c_i, i = \overline{1, n}$, – довільні сталі, і навпаки – довільний неперервний і обмежений при $t \in \mathbb{R}^+$ розв'язок системи інтегральних рівнянь (12) є також розв'язком системи рівнянь (8), то для доведення теореми достатньо довести, що система рівнянь (12) має сім'ю неперервних і обмежених при $t \in \mathbb{R}^+$ розв'язків

$x(t) = x(t, c)$, де $c = (c_1, \dots, c_n)$, $c_i, i = \overline{1, n}$, – довільні сталі. Для цього використаємо метод послідовних наближень, які визначимо співвідношеннями

$$x_0(t) \equiv 0,$$

$$x_m(t) = e^{\Lambda t} c +$$

$$+ \int_0^t e^{\Lambda(t-\tau)} f(\tau, x_{m-1}(\tau), x_{m-1}(\lambda_1 \tau), \dots, x_{m-1}(\lambda_k \tau)) d\tau, \quad (13)$$

$$m = 1, 2, \dots$$

Позначимо $\lambda_* = \min_{i=1, k} \lambda_i$. Тоді згідно з умовами теореми і співвідношеннями (13) при $t \geq 0$ отримаємо

$$|x_1(t) - x_0(t)| = |e^{\Lambda t} c| \leq Ke^{-\alpha t} |c|,$$

$$|x_2(t) - x_1(t)| \leq$$

$$\leq \int_0^t |e^{\Lambda(t-\tau)}| (|f(\tau, x_1(\tau), x_1(\lambda_1 \tau), \dots, x_1(\lambda_k \tau)) -$$

$$- f(\tau, x_0(\tau), x_0(\lambda_1 \tau), \dots, x_0(\lambda_k \tau))|) d\tau \leq$$

$$\leq \int_0^t Ke^{-\alpha(t-\tau)} l (|x_1(\tau) - x_0(\tau)| + \sum_{i=1}^k |x_1(\lambda_i \tau) - x_0(\lambda_i \tau)|) d\tau \leq$$

$$\leq Kl \int_0^t e^{-\alpha(t-\tau)} (Ke^{-\alpha \tau} |c| + \sum_{i=1}^k Ke^{-\alpha \lambda_i \tau} |c|) d\tau \leq$$

$$\leq K^2 |c| l \int_0^t e^{-\alpha(t-\tau)} (e^{-\alpha \lambda_* \tau} + ke^{-\alpha \lambda_* \tau}) d\tau =$$

$$= K^2 l(k+1) |c| e^{-\alpha t} \int_0^t e^{\alpha(1-\lambda_*) \tau} d\tau =$$

$$= \frac{K^2 l(k+1) |c|}{\alpha(1-\lambda_*)} (e^{-\alpha \lambda_* t} - e^{-\alpha t}) \leq \Theta_1 e^{-\alpha \lambda_* t},$$

$$\text{де } \Theta_1 := \frac{K^2 l(k+1) |c|}{\alpha(1-\lambda_*)}.$$

Розмірковуючи за індукцією, покажемо, що при всіх $m \geq 1$, $t \geq 0$ виконуються співвідношення

$$|x_m(t) - x_{m-1}(t)| \leq \Theta_{m-1} e^{-\alpha \lambda_*^{m-1} t}, \quad (14)$$

де

$$\Theta_0 := K|c|, \Theta_m := \Theta_{m-1} \frac{Kl(k+1)}{\alpha(1-\lambda_*^m)}, m = 1, 2, \dots$$

Справді, при $m = 1$ оцінка (14) має місце. Припустимо, що оцінка (14) уже доведена для деякого $m \geq 1$, і покажемо, що вона не зміниться при переході від m до $m + 1$. Дійсно, беручи до уваги (9), (10) і (14), одержуємо

$$\begin{aligned} & |x_{m+1}(t) - x_m(t)| \leq \\ & \leq \int_0^t Ke^{-\alpha(t-\tau)} |f(\tau, x_m(\tau), x_m(\lambda_1\tau), \dots, x_m(\lambda_k\tau)) - \\ & - f(\tau, x_{m-1}(\tau), x_{m-1}(\lambda_1\tau), \dots, x_{m-1}(\lambda_k\tau))| d\tau \leq \\ & \leq K \int_0^t e^{-\alpha(t-\tau)} l(|x_m(\tau) - x_{m-1}(\tau)| + \\ & + \sum_{i=1}^k |x_m(\lambda_i\tau) - x_{m-1}(\lambda_i\tau)|) d\tau \leq \\ & \leq \Theta_{m-1} Kl \int_0^t e^{-\alpha(t-\tau)} (e^{-\alpha\lambda_*^{m-1}\tau} + \sum_{i=1}^k e^{-\alpha\lambda_*^{m-1}\lambda_i\tau}) d\tau \leq \\ & \leq \Theta_{m-1} Kl \int_0^t e^{-\alpha(t-\tau)} (e^{-\alpha\lambda_*^m\tau} + ke^{-\alpha\lambda_*^m\tau}) d\tau = \\ & = \Theta_{m-1} Kl(k+1)e^{-\alpha t} \int_0^t e^{\alpha(1-\lambda_*^m)\tau} d\tau = \\ & = \Theta_{m-1} \frac{Kl(k+1)}{\alpha(1-\lambda_*^m)} e^{-\alpha t} (e^{\alpha(1-\lambda_*^m)t} - 1) \leq \\ & \leq \Theta_m e^{-\alpha t} e^{\alpha(1-\lambda_*^m)t} = \Theta_m e^{-\alpha\lambda_*^m t}. \end{aligned}$$

Отже, доведено, що оцінка (14) має місце для довільного $m \geq 1$.

Оскільки (згідно з (14)) при всіх $m \geq 1$, $t \geq 0$ виконується оцінка

$$|x_m(t) - x_{m-1}(t)| \leq \Theta_{m-1} e^{-\alpha\lambda_*^{m-1}t} \leq \Theta_{m-1}$$

і

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} \frac{\Theta_{m+1}}{\Theta_m} = \lim_{m \rightarrow +\infty} \frac{Kl(k+1)}{\alpha(1-\lambda_*^{m+1})} = \frac{1}{\alpha} Kl(k+1),$$

то в силу (11) при достатньо малому l ряд $\sum_{m=1}^{+\infty} \Theta_{m-1}$ збігається. Тоді при достатньо малому l ряд

$$\sum_{m=1}^{+\infty} (x_m(t) - x_{m-1}(t))$$

також рівномірно збігається для довільного $t \in \mathbb{R}^+$ до деякої неперервної вектор-функції $x(t)$, яка є розв'язком системи інтегральних рівнянь (12). Це легко показати, якщо в (13) перейти до границі при $m \rightarrow +\infty$. Таким чином, система рівнянь (12) має сім'ю неперервних і обмежених розв'язків $x(t) = x(t, c)$, які прямують до нуля при $t \rightarrow +\infty$ (це випливає з (14)).

Щоб довести неперервну диференційовність при $t \geq 0$ розв'язків системи рівнянь (12), продиференціюємо співвідношення (13):

$$\dot{x}_0(t) \equiv 0,$$

$$\begin{aligned} \dot{x}_m(t) &= \Lambda x_m(t) + f(t, x_{m-1}(t), x_{m-1}(\lambda_1 t), \dots, x_{m-1}(\lambda_k t)), \\ & m = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Звідси випливає

$$\begin{aligned} & |\dot{x}_1(t) - \dot{x}_0(t)| \leq |\Lambda| |x_1(t) - x_0(t)|, \\ & |\dot{x}_m(t) - \dot{x}_{m-1}(t)| \leq |\Lambda| |x_m(t) - x_{m-1}(t)| + \\ & + |f(t, x_{m-1}(t), x_{m-1}(\lambda_1 t), \dots, x_{m-1}(\lambda_k t)) - \\ & - f(t, x_{m-2}(t), x_{m-2}(\lambda_1 t), \dots, x_{m-2}(\lambda_k t))| \leq \\ & \leq |\Lambda| |x_m(t) - x_{m-1}(t)| + l(|x_{m-1}(t) - x_{m-2}(t)| + \\ & + \sum_{i=1}^k |x_{m-1}(\lambda_i t) - x_{m-2}(\lambda_i t)|), m = 2, 3, \dots \end{aligned} \tag{15}$$

Позначивши $\mu_m := \sup_{t \geq 0} |\dot{x}_m(t) - \dot{x}_{m-1}(t)|$, $\nu_m := \sup_{t \geq 0} |x_m(t) - x_{m-1}(t)|$, $m = 1, 2, \dots$, із (15) отримаємо

$$\mu_1 \leq |\Lambda| \nu_1,$$

$$\mu_m \leq |\Lambda| \nu_m + l(k+1) \nu_{m-1}, m = 2, 3, \dots$$

Отже, маємо

$$\sum_{m=1}^{+\infty} \mu_m \leq (|\Lambda| + l(k+1)) \sum_{m=1}^{+\infty} v_m.$$

Звідси і із збіжності ряду $\sum_{m=1}^{+\infty} v_m$ випливає збіжність ряду $\sum_{m=1}^{+\infty} \mu_m$. Таким чином, теорема доведена.

Згідно з теоремою 3, виникає питання про існування і властивості неперервно диференційовних на \mathbb{R}^+ розв'язків системи нелінійних диференціально-функціональних рівнянь (8) у випадку, коли $\lambda_i > 1$, $i = \overline{1, k}$. Відповідь на це питання дає така теорема.

Теорема 4. Нехай виконуються умови:

1) $\operatorname{Re} \lambda(\Lambda) < 0$, тобто $\exists K > 0, \alpha > 0$:

$$|e^{\Lambda t}| \leq K e^{-\alpha t} \text{ при } t \in \mathbb{R}^+;$$

2) неперервна при $t \in \mathbb{R}^+$ вектор-функція $f(t, x_0, x_1, \dots, x_k)$ така, що $f(t, 0, \dots, 0) = 0$ і задовольняє умову

$$|f(t, \tilde{x}_0, \tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_k) - f(t, \tilde{\tilde{x}}_0, \tilde{\tilde{x}}_1, \dots, \tilde{\tilde{x}}_k)| \leq l \sum_{i=0}^k |\tilde{x}_i - \tilde{\tilde{x}}_i|,$$

де $t \in \mathbb{R}^+$, $\tilde{x}_i, \tilde{\tilde{x}}_i \in \mathbb{R}^n$, $i = \overline{0, k}$, $l = \operatorname{const} > 0$;

3) виконується співвідношення

$$\frac{Kl(k+1)}{\alpha - \alpha_*} < 1,$$

де $0 < \alpha_* < \alpha$.

Тоді при достатньо малому l існує сім'я неперервно диференційовних і обмежених при $t \in \mathbb{R}^+$ розв'язків $x(t) = x(t, c)$, де $c = (c_1, \dots, c_n)$, $c_i, i = \overline{1, n}$, — довільні сталі, системи рівнянь (8), які прямують до нуля при $t \rightarrow +\infty$.

Доведення теореми проводиться за тією ж схемою, що і доведення теореми 3. При цьому послідовні наближення визначаються за допомогою (13) і задовольняють згідно з умовами теореми співвідношення

$$|x_m(t) - x_{m-1}(t)| \leq \Theta_{m-1} e^{-\alpha_* t}, \quad m \geq 1, t \geq 0,$$

де $0 < \alpha_* < \alpha$;

$$\Theta_0 := K|c|; \quad \Theta_m = \Theta_{m-1} \frac{Kl(k+1)}{\alpha - \alpha_*}, \quad m = 1, 2, \dots$$

Висновки

Отримані в статті результати є новими в досліджуваній області. Встановлено нові достатні умови існування неперервно диференційовних при $t \in \mathbb{R}^+$ розв'язків систем лінійних і нелінійних диференціально-функціональних рівнянь вигляду (2) і (8) з необмеженими відхиленнями аргументу. Оскільки такі рівняння відіграють важливу роль та широко використовуються при дослідженні багатьох задач науки і техніки, то є всі підстави сподіватись, що отримані результати також знайдуть своє застосування. Результати статті стосуються випадку, коли виконується умова 2 теореми 1, тому в перспективі було б доцільно отримати аналогічні результати, коли ця умова не виконується.

Н.Л. Денисенко

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА НЕПРЕРЫВНЫХ РЕШЕНИЙ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ЛИНЕЙНЫМИ ПРЕОБРАЗОВАНИЯМИ АРГУМЕНТА

Получены новые достаточные условия существования непрерывно дифференцируемых и ограниченных на \mathbb{R}^+ решений систем линейных и нелинейных дифференциально-функциональных уравнений с линейными преобразованиями аргумента и исследованы их асимптотические свойства.

N.L. Denysenko

ASYMPTOTIC PROPERTIES OF CONTINUOUS SOLUTIONS FOR SYSTEMS OF DIFFERENTIAL-FUNCTIONAL EQUATIONS WITH LINEAR ARGUMENT TRANSFORMATIONS

This study provides insights into the novel sufficient conditions of the existence of continuously differentiable and bounded on \mathbb{R}^+ solutions for linear and nonlinear differential-functional equations systems with linear argument transformations and their asymptotic properties.

1. *Kato T., McLeod J.B.* The functional-differential equation $y'(x) = ay(\lambda x) + by(x)$ // *Bull. Amer. Math. Soc.* – 1971. – 77. – P. 891–937.
2. *Самойленко А.М., Пелюх Г.П.* Ограниченные на всей вещественной оси решения систем нелинейных дифференциально-функциональных уравнений и их свойства // *Укр. мат. журн.* – 1994. – 46, № 6. – С. 737–747.
3. *Денисенко Н.Л.* Про неперервно диференційовні на \mathbb{R}^+ розв'язки систем лінійних диференціально-функціональних рівнянь з лінійно перетвореним аргументом // *Нелінійні коливання.* – 2007. – 10, № 3. – С. 322–327.
4. *Kwapisz M.* On the existence and uniqueness of solutions of certain integral-differential equation // *Ann. pol. math.* – 1975. – 31, № 1. – P. 23–41.
5. *Митропольский Ю.А., Самойленко А.М., Мартынюк Д.И.* Системы эволюционных уравнений с периодическими и условно периодическими коэффициентами. – К.: *Наук. думка*, 1985. – 216 с.
6. *Хейл Дж.* Теория функционально-дифференциальных уравнений. – М.: *Мир*, 1984. – 412 с.

Рекомендована Радою
фізико-математичного факультету
НТУУ “КПІ”

Надійшла до редакції
12 лютого 2008 року

УДК 517.9

Н.В. Задоянчук, П.О. Касьянов

ПРО РОЗВ'ЯЗНІСТЬ НЕЛІНІЙНИХ ЕВОЛЮЦІЙНИХ РІВНЯНЬ II ПОРЯДКУ З НЕКОЕРЦИТИВНИМИ W_{λ_0} -ПСЕВДОМОНОТОННИМИ ВІДОБРАЖЕННЯМИ

Вступ

Диференціально-операторні рівняння, включення і еволюційні варіаційні нерівності, що зводяться до них, вивчаються досить інтенсивно багатьма авторами [1–16]. За аналогією з [4, 13] еволюційні рівняння II порядку зводяться до диференціально-операторних рівнянь I порядку, а потім з використанням відомих методів для них доводиться розв'язність. У праці [4] такі об'єкти розглядалися для монотонних відображень, у [12, 13] – для відображень із напівобмеженою варіацією. Останні розробки з даної тематики стосуються диференціально-операторних рівнянь із глобально обмеженою по фазовій змінній немонотонною нелінійністю [15, 16]. Слід зазначити, що така задача є коерцитивною.

У даній статті розглядаються еволюційні рівняння II порядку з некоерцитивними W_{λ_0} -псевдомонотонними відображеннями. Наша задача полягає в тому, щоб перенести і розвинути некоерцитивну теорію для еволюційних рівнянь II порядку з W_{λ_0} -псевдомонотонними відображеннями, а також одержати нові результати про розв'язність.

Постановка задачі

Нехай $V_i, i = 1, 2,$ – рефлексивні банахові простори, H – гільбертів простір зі скалярним добутком (\cdot, \cdot) , ототожнений із спряженим простором H^* , $\{V_\sigma\}_{\sigma \geq 0}$ – ланцюжок гільбертових просторів, таких, що $\forall \sigma_1 \geq \sigma_2 \geq 0 \quad V_{\sigma_1} \subset V_{\sigma_2}$, причому вкладення неперервне та щільне. Нехай $\sigma_0 > 0$. Тоді маємо ланцюжок неперервних та щільних вкладень $\forall \sigma \geq \sigma_0$

$$V_\sigma \subset V_i \subset H \subset V_i^* \subset V_\sigma^*$$

де V_i^* – спряжений простір до V_i ; V_σ^* – простір, спряжений до V_σ відносно (\cdot, \cdot) . Нехай також $V = V_1 \cap V_2$.

Введемо позначення $S = [0, T]$ – скінченний інтервал часу. Тоді матимемо

$$X_i = L_{p_0}(S; H) \cap L_{p_i}(S; V_i),$$

$$X_i^* = L_{q_0}(S; H) + L_{q_i}(S; V_i^*),$$

$$X = L_{p_0}(S; H) \cap L_{p_1}(S; V_1) \cap L_{p_2}(S; V_2),$$

$$X_\sigma = L_{p_0}(S; H) \cap L_{\max\{p_1, p_2\}}(S; V_\sigma),$$

$$X^* = L_{q_0}(S; H) + L_{q_1}(S; V_1^*) + L_{q_2}(S; V_2^*),$$

$$X_\sigma^* = L_{q_0}(S; H) + L_{\min\{q_1, q_2\}}(S; V_\sigma^*),$$

де $\frac{1}{p_0} + \frac{1}{q_0} = \frac{1}{p_i} + \frac{1}{q_i} = 1$; $1 < p_i < \infty$; $p_i \leq p_0 < \infty, i = 1, 2$.

Лінійний простір $W = \{y \in X \mid y' \in X^*\}$ (відповідно, $W_\sigma = \{y \in X \mid y' \in X_\sigma^*\}$) є рефлексивним банаховим простором відносно норми $\|y\|_W = \|y\|_X + \|y'\|_{X^*}$ (відповідно, $\|y\|_{W_\sigma} = \|y\|_X + \|y'\|_{X_\sigma^*}$), де y' – похідна від елемента $y \in X$ в розумінні простору скалярних розподілів $D^*(S, V_\sigma^*) = L(D(S); V_\sigma^*)$ [4].

Для довільних $v \in X$ та $f \in X^*$ ($f = f_0 + f_1 + f_2, f_0 \in L_{q_0}(S; H), f_1 \in L_{q_1}(S; V_1^*), f_2 \in L_{q_2}(S; V_2^*)$) розглянемо співвідношення

$$\begin{aligned} \langle f, v \rangle_X &= \int_S \langle f_0(t), v(t) \rangle dt + \int_S \langle f_1(t), v(t) \rangle_{V_1^*} dt + \\ &+ \int_S \langle f_2(t), v(t) \rangle_{V_2^*} dt = \int_S \langle f(t), v(t) \rangle dt. \end{aligned}$$

Тут $\langle \cdot, \cdot \rangle_{V_i^*} : V_i^* \times V_i \rightarrow R$ – канонічне спарювання, що збігається на $H \times V_i$ зі скалярним добутком (\cdot, \cdot) в H .

Розглянемо таку задачу:

$$\begin{cases} u'' + Au' + Bu + Cu = f, \\ u(0) = a_0, u'(0) = a_1, u \in C(S; V), u' \in X, \end{cases} \quad (1)$$

де $a_0 \in V$, $a_1 \in H$ і $f \in X^*$ – довільні фіксовані елементи. Метою статті є доведення розв'язності даної проблеми методом Фаєдо–Гальборкіна.

Основні означення

Означення 1. Оператор $A: X \rightarrow X^*$ називається λ_0 -псевдомонотонним на W (на W_σ), якщо з довільної послідовності $\{y_n\}_{n \geq 1} \subset W(W_\sigma)$, такої, що $y_n \rightarrow y$ слабо в X , $y'_n \rightarrow y'$ слабо в $X^*(X_\sigma^*)$, $Ay_n \rightarrow d$ слабо в X^* та $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \langle Ay_n, y_n - y \rangle_X \leq 0$ можна виділити таку підпослідовність $\{y_{n_k}\}_{k \geq 1}$ послідовності $\{y_n\}_{n \geq 1}$, що

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \langle Ay_{n_k}, y_{n_k} - w \rangle_X \geq \langle Ay, y - w \rangle_X \quad \forall w \in X.$$

Лема 1 [14]. Нехай $A, B: X \rightarrow X^*$ – λ_0 -псевдомонотонні на W (на W_σ) оператори. Нехай також один з операторів обмежений. Тоді оператор $F = A + B$ ($F(y) = A(y) + B(y)$, $y \in X$) є λ_0 -псевдомонотонним на W (на W_σ).

Означення 2. Оператор $A: X \rightarrow X^*$ називається коерцитивним, якщо існує визначена на $[0, \infty)$ дійсна функція γ з $\lim_{s \rightarrow \infty} \gamma(s) = +\infty$, така, що

$$\langle Au, u \rangle_X \geq \gamma(\|u\|_X) \|u\|_X \quad \forall u \in X.$$

Означення 3. Оператор $A: X \rightarrow X^*$ називається оператором типу Вольтера, якщо для довільного $t \in S$ з рівності $u(s) = v(s)$ для майже всіх (м.в.) $s \in [0, t]$ ($u, v \in X$), випливає, що $(Au)(s) = (Av)(s)$ для майже всіх $s \in [0, t]$.

Означення 4. Оператор $A: X \rightarrow X^*$ називається демінеперервним, якщо з $u_n \rightarrow u$ в X випливає, що Au_n слабо збігається до Au в X^* .

Метод Фаєдо–Гальборкіна

Нехай $\{h_i\}_{i \geq 1}$ – повна система лінійно незалежних елементів із V_σ для деякого $\sigma \geq \sigma_0$ і

нехай H_n – лінійна оболонка множини $\{h_i\}_{i=1}^n$, наділена скалярним добутком, індукованим із H . Згідно з попередніми міркуваннями, H_n^* – спряжений до H_n простір, ототожнений із самим H_n ; $X_n := L_{p_0}(S; H_n)$, $X_n^* = L_{q_0}(S; H_n)$ – спряжений до X_n простір відносно білінійної форми $\langle \cdot, \cdot \rangle_{X_n} = \langle \cdot, \cdot \rangle_X|_{X_n^* \times X_n}$, $W_n := \{y \in X_n \mid y' \in X_n^*\}$, де похідну y' від елемента $y \in X_n$ беремо в розумінні простору розподілів $D^*(S, H_n)$.

Для довільного $n \geq 1$ нехай $I_n \in L(X_n; X)$ – канонічне вкладення X_n в X (тобто $I_n x = x \quad \forall x \in X_n$), I_n^* – спряжений оператор до I_n .

Позначимо P_n оператор ортогонального проектування з H в H_n . Припустимо, що для деяких $\sigma \geq \sigma_0$ даний оператор задовольняє такі умови:

$$\|P_n\|_{L(H; H)} \leq 1, \quad \|P_n\|_{L(V_\sigma; V_\sigma)} \leq 1, \quad \|P_n\|_{L(V_\sigma^*; V_\sigma^*)} \leq 1. \quad (2)$$

Зауважимо, що як повну систему векторів $\{h_j\}_{j \geq 1}$, що задовольняє (2), можемо взяти так званий “спеціальний” базис для пари $(V_\sigma; H)$ (детальніше див. [6]). Зауважимо також, що для всіх $n \geq 1$ і $f \in X^*$ маємо $(I_n^* f)(t) = P_n f(t)$ для м.в. $t \in S$.

Розв'язки задачі (1) будемо “наближати” розв'язками такої задачі:

$$\begin{cases} u_n'' + A_n u_n' + B_n u_n + C_n u_n = f_n, \\ u_n(0) = a_{0n}, \quad u_n'(0) = a_{1n}, \\ u_n \in C(S; H_n), \quad u_n' \in X_n, \end{cases} \quad (3)$$

де $A_n := I_n^* A I_n: X_n \rightarrow X_n^*$; $B_n := I_n^* B I_n: X_n \rightarrow X_n^*$; $C_n := I_n^* C I_n: X_n \rightarrow X_n^*$; $f_n := I_n^* f \in X_n^*$; $\{a_{0n}\}_{n \geq 1}$: $a_{0n} \in H_n$ – довільна послідовність, що збігається до a_0 в V ; $\{a_{1n}\}_{n \geq 1}$: $a_{1n} \in H_n$ – довільна послідовність, що збігається до a_1 в H .

Основний результат

Теорема 1. Нехай V – компактно вкладений в V_2 оператор і для деяких $\sigma \geq \sigma_0$ ви-

конуються умови (2). Нехай також p_0, p_1, p_2 і $\sigma_1 \geq 0$ такі, що $X \subset L_2(S; V_{\sigma_1})$. Нехай, далі,

$A: X_1 \rightarrow X_1^*$ – λ_0 -псевдомонотонний на W_σ , обмежений оператор Вольтера, такий, що $A: C(S; V_\sigma) \rightarrow X^*$ – демінеперервний; $B: L_2(S; V_{\sigma_1}) \rightarrow L_2(S; V_{\sigma_1}^*)$ – оператор з такою властивістю:

$$(Bu)(t) = B_0 u(t) \quad \forall u \in X \text{ для м.в. } t \in S,$$

де $B_0: V_{\sigma_1} \rightarrow V_{\sigma_1}^*$ – лінійний, обмежений, самоспряжений, монотонний оператор; $C: X_2 \rightarrow X_2^*$ – демінеперервний оператор Вольтера, що задовольняє таку умову:

$$\exists c_1 \geq 0: \|Cy\|_{X_2^*} \leq c_1(1 + \|y\|_{X_2}^\alpha) \quad \forall y \in X_2,$$

де $\alpha \geq 1$.

Нехай, крім того, виконується умова

$$\begin{aligned} \exists \lambda_1 > 0: & \frac{\langle A(y), y \rangle_X}{\|y\|_X} + \frac{\lambda_1 \|y\|_{L_2(S; H)}^2}{\|y\|_X} - \\ & - \frac{L^\alpha c \|y\|_{X_2}^{\alpha+1}}{\|y\|_X} \rightarrow +\infty \text{ при } \|y\|_X \rightarrow +\infty, \end{aligned} \quad (4)$$

де $L = 2T, c = \frac{c_1}{2}$. Тоді для довільних $a_0 \in V, a_1 \in H$ і $f \in X^*$ існує принаймні один розв'язок задачі (1) $u \in X$, причому $u' \in W$ і знайдеться така підпослідовність $\{u_{n_k}\}$ послідовності $\{u_n\}_{n \geq 1}$, для якої мають місце властивості

$$\begin{aligned} u''_{n_k} &\rightarrow u'' \text{ слабко в } X^*, u'_{n_k} \rightarrow u' \text{ слабко в } X, \\ u'_{n_k} &\rightarrow u' \text{ в } Y, u_{n_k} \rightarrow u \text{ в } C(S; H) \end{aligned}$$

та

$$u_{n_k} \rightarrow u \text{ слабко в } X,$$

де $\{u_n\}_{n \geq 1}$ – послідовність розв'язків (3).

Доведення. За аналогією з [12, 13] зведемо еволюційне рівняння з (1) до рівняння I порядку. Нехай $R: X \rightarrow X (Y \rightarrow Y, C(S; V_\sigma) \rightarrow C^1(S; V_\sigma^*))$ – оператор Вольтера, визначений співвідношенням

$$(Rv)(t) = a_0 + \int_0^t v(s) ds \quad \forall v \in X, \forall t \in S,$$

де $R \in$ ліпшиц-неперервним оператором з X в X (з Y в Y , з $C(S; V_\sigma)$ в $C(S; V_\sigma^*)$). Якщо u – розв'язок задачі (1): $u' \in W$, то $v = u'$ буде розв'язком задачі

$$\begin{cases} v' + (A + B \circ R + C \circ R)v = f, \\ v(0) = a_1, v \in W. \end{cases} \quad (5)$$

Навпаки, якщо v – розв'язок задачі (5), то $u = Rv \in$ розв'язком задачі (1), таким, що $u' \in W \subset X$.

Розглянемо оператор Вольтера $F := A + B \circ R + C \circ R: X \rightarrow X^*$ ($I: X \rightarrow X \subset X^*$ – тожне відображення). Використавши результати [14] і лему 1, достатньо перевірити такі умови:

α_1) оператор $F: X \rightarrow X^*$ – λ_0 -псевдомонотонний на W_σ і обмежений;

α_2) оператор $F: C(S; V_\sigma) \rightarrow X^*$ – демінеперервний;

α_3) для деякого фіксованого $\lambda \geq \lambda_1$ оператор $F + \lambda I: X \rightarrow X^*$ – коерцитивний.

Щоб перевірити виконання умови α_1 , насамперед доведемо, що якщо $C: X_2 \rightarrow X_2^*$ – демінеперервний оператор, то $(C \circ R): X \rightarrow X^*$ – λ_0 -псевдомонотонний на W_σ оператор.

Отже, нехай $y_n \rightarrow y$ слабко в $X, y'_n \rightarrow y'$ слабко в X^* і $(C \circ R)(y_n) \rightarrow d$ слабко в X^* і виконується співвідношення

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \langle C \circ R(y_n), y_n - y \rangle_X \leq 0.$$

Спочатку покажемо, що $Ry_n \rightarrow Ry$ слабко в X , тобто $\langle Ry_n - Ry, f \rangle_X \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$

$\forall f \in X^*$. Покладемо $F(t) = \int_T^t f(s) ds, s \in S$. До-

ведемо, що $F \in X^*$. Для всіх $t \in S$ покладемо

$$F_i(t) = \int_T^t f_i(s) ds, \quad i = \overline{1, 3}, \quad \text{де } f_1 \in L_{q_1}(S; V_1^*),$$

$f_2 \in L_{q_2}(S; V_2^*), f_3 \in L_{q_0}(S; H)$ і такі, що $f = f_1 + f_2 + f_3$. Розглянемо

$$F_i(t) - F_i(s) = \int_s^t f_i(\tau) d\tau, \quad 0 < s < t \leq T.$$

Проаналізуємо спочатку окремо F_1 . Маємо

$$\begin{aligned} \|F_1(s) - F_1(t)\|_{V_1^*} &= \left\| \int_s^t f_1(\tau) d\tau \right\|_{V_1^*} \leq \int_s^t \|f_1(\tau)\|_{V_1^*} d\tau \leq \\ &\leq \left(\int_0^T \|f_1(\tau)\|_{V_1^*}^{q_1} d\tau \right)^{\frac{1}{q_1}} \left(\int_s^t 1 d\tau \right)^{\frac{1}{p_1}} = \\ &= |t - s|^{\frac{1}{p_1}} \|f_1\|_{L_{q_1}(S; V_1^*)}. \end{aligned}$$

Отже, $F_1 \in C(S; V_1^*)$. Аналогічно маємо, що $F_2 \in C(S; V_2^*)$, $F_3 \in C(S; H)$. В свою чергу простори $C(S; V_1^*)$, $C(S; V_2^*)$, $C(S; H)$ вкладені неперервно у відповідні простори $L_{q_1}(S; V_1^*)$, $L_{q_2}(S; V_2^*)$, $L_{q_0}(S; H)$. Тому $\hat{F} = F_1 + F_2 + F_3 \in X^*$. Далі, згідно з визначенням канонічного спарювання в X , маємо, що

$$\begin{aligned} \langle Ry_n - Ry, f \rangle_X &= \int_0^T (Ry_n(\tau) - Ry(\tau), f(\tau)) d\tau = \\ &= (Ry_n(T) - Ry(T), \hat{F}(T)) - (Ry_n(0) - Ry(0), \hat{F}(0)) - \\ &- \int_0^T (y_n(\tau) - y(\tau), \hat{F}(\tau)) = -\langle \hat{F}, y_n - y \rangle_X \rightarrow 0 \end{aligned}$$

при $n \rightarrow \infty$,

оскільки $\hat{F} \in X^*$. Отже, $Ry_n \rightarrow Ry$ слабко в X при $n \rightarrow \infty$.

Далі покажемо, що $Ry_n \rightarrow Ry$ в X_2 при $n \rightarrow \infty$. Доведення проведемо в два етапи.

1. Спочатку доведемо, що $Ry_n \rightarrow Ry$ в $L_{\min\{p_1, p_2\}}(S; V_2)$ при $n \rightarrow \infty$. Відомо, що $L_{p_1}(S; V_1) \subset L_{\min\{p_1, p_2\}}(S; V_1)$ та $L_{p_2}(S; V_2) \subset L_{\min\{p_1, p_2\}}(S; V_2)$, а $X \subset L_{\min\{p_1, p_2\}}(S; V_1) \cap L_{\min\{p_1, p_2\}}(S; V_2)$. Покладемо $p := \min\{p_1, p_2\}$ і доведемо, що $L_p(S; V_1) \cap L_p(S; V_2) = L_p(S; V)$.

Нехай $f \in L_p(S; V_1) \cap L_p(S; V_2)$. Маємо, що $\forall h_1 \in V_1^*$ ($h_1, f(\cdot)$) – вимірна і $\forall h_2 \in V_2^*$ ($h_2, f(\cdot)$) – теж вимірна; тоді $(h_1 + h_2, f(\cdot))$ – вимірна, а тому $f \in (S \rightarrow V)$ – вимірна за Бохнером. Далі, оскільки $f \in L_p(S; V_1)$ і $f \in L_p(S; V_2)$, то $\int_S \|f(\tau)\|_{V_1}^p d\tau < +\infty$ і $\int_S \|f(\tau)\|_{V_2}^p d\tau < +\infty$. Звідси маємо

$$\begin{aligned} &\int_S (\|f(\tau)\|_{V_1} + \|f(\tau)\|_{V_2})^p d\tau \leq \\ &\leq \int_S (\|f(\tau)\|_{V_1}^p + \|f(\tau)\|_{V_2}^p) 2^{p-1} d\tau < +\infty. \end{aligned}$$

Тому $f \in L_p(S; V)$. Далі, $X_\sigma^* \subset L_{\min\{q_0, q_1, q_2\}}(S; V_\sigma^*) = L_{\tilde{q}}(S; V_\sigma^*)$, оскільки $H \subset V_\sigma^*$, де $\tilde{q} = \min\{q_0, q_1, q_2\}$. Тоді послідовність $\{y_n\}_{n \geq 1}$ обмежена в просторі $W_1 = \{y \in L_p(S; V) \mid y' \in L_{\tilde{q}}(S; V_\sigma^*)\}$. Тоді, за лемою про компактність ($V \subset V_2$ компактно і $V_2 \subset V_\sigma^*$), маємо, що $W_1 \subset L_p(S; V_2)$ компактно, а тому $y_n \rightarrow y$ в $L_p(S; V_2)$. Оскільки оператор R – ліпшицевий, то $Ry_n \rightarrow Ry$ в $L_p(S; V_2)$.

2. Доведемо, що $\{Ry_n\}_{n \geq 1}$ обмежена в $C(S; V_2)$. Розглянемо $Ry_n(t) - Ry_n(s) = \int_s^t y_n(\tau) d\tau$, $0 < s < t \leq T$, тобто

$$\begin{aligned} \|Ry_n(t) - Ry_n(s)\|_{V_2} &= \left\| \int_s^t y_n(\tau) d\tau \right\|_{V_2} \leq \\ &\leq \int_s^t \|y_n(\tau)\|_{V_2} d\tau \leq \|y_n\|_{L_{p_2}(S; V_2)} |t - s|^{\frac{1}{q_2}} \leq \\ &\leq \|y_n\|_X |t - s|^{\frac{1}{q_2}}. \end{aligned}$$

Звідси, зокрема, отримаємо

$$\begin{aligned} \exists M > 0 : \|Ry_n(t)\|_{V_2} &\leq \|Ry_n(0)\|_{V_2} + \\ &+ \|Ry_n(t) - Ry_n(0)\|_{V_2} = \|a_0\|_{V_2} + \left\| \int_0^t y_n(\tau) d\tau \right\|_{V_2} \leq \end{aligned}$$

$$\leq \|a_0\|_V + \|y_n\|_X T^{\frac{1}{q_2}} \leq M.$$

Тому послідовність $\{Ry_n\}_{n \geq 1}$ обмежена в $C(S; V_2)$.

Доведемо, що $Ry_n \rightarrow Ry$ в $L_{p_2}(S; V_2)$ при $n \rightarrow \infty$. Для цього застосуємо метод від супротивного. Нехай існує $\{Ry_m\}_{m \geq 1}$ – деяка підпослідовність послідовності $\{Ry_n\}_{n \geq 1}$. Нехай $\exists \varepsilon^* > 0$, таке, що $\|Ry_m - Ry\|_{L_{p_2}} \geq \varepsilon^* \forall m \geq 1$.

Далі маємо, що якщо $Ry_m \rightarrow Ry$ в $L_p(S; V_2)$ при $m \rightarrow \infty$, то $\int_S \|Ry_m(\tau) - Ry(\tau)\|_{V_2}^p d\tau \rightarrow 0$ при $m \rightarrow \infty$. А це означає, що існує деяка підпослідовність $\{y_l\}_{l \geq 1}$ послідовності $\{y_m\}_{m \geq 1}$, така, що $\|Ry_l(\tau) - Ry(\tau)\|_{V_2} \rightarrow 0$ при $l \rightarrow \infty$ для м.в. $\tau \in S$. Позначимо $\varphi_l(\tau) = Ry_l(\tau) - Ry(\tau)$ і матимемо

$$\exists M_1 > 0 : \forall l \quad |\varphi_l(\tau)| \leq M_1, \quad \tau \in S.$$

Отримуємо, що $\varphi_l^{p_2}(\tau) \rightarrow 0$ при $l \rightarrow \infty$ і $|\varphi_l^{p_2}(\tau)| \leq M_1^{p_2}$. За теоремою Лебега про мажоровану збіжність, маємо, що $\varphi_l^{p_2} \rightarrow 0$ в $L_1(S)$, що те ж саме, що $\|Ry_l - Ry\|_{L_{p_2}(S; V_2)}^{p_2} = \int_S \|Ry_l(\tau) - Ry(\tau)\|_{V_2}^{p_2} d\tau \rightarrow 0$. Ми прийшли до протиріччя. Отже, $Ry_n \rightarrow Ry$ в $L_{p_2}(S; V_2)$ при $n \rightarrow \infty$. Аналогічно маємо, що $Ry_n \rightarrow Ry$ в $L_{p_0}(S; H)$, оскільки $V \subset V_2$ компактно, а $V_2 \subset H$ неперервно, то $V \subset H$ компактно. Звідси отримуємо, що $Ry_n \rightarrow Ry$ в X_2 при $n \rightarrow \infty$.

Оскільки $C : X_2 \rightarrow X_2^*$ – демінеперервний оператор, то $C \circ Ry_n \rightarrow C \circ Ry$ слабко в X_2^* . А це означає, що $\forall \omega \in X_2$ виконується співвідношення

$$\langle C \circ R(y_n), y_n - \omega \rangle_X \rightarrow \langle C \circ R(y), y - \omega \rangle_X.$$

Отже, оператор $C \circ R : X \rightarrow X^*$ – λ_0 -псевдомонотонний на W_σ .

Доведемо, що оператор $B \circ R : X \rightarrow X^*$ монотонний. Для $v, w \in X$ маємо

$$\begin{aligned} \langle B \circ Rv - B \circ R w, v - w \rangle &= \\ &= \int_S (B_0(Rv - R w)(t), (Rv - R w)'(t)) dt = \\ &= \frac{1}{2} (B_0(Rv - R w)(T), (Rv - R w)(T)) \geq 0. \end{aligned}$$

Згідно з лемою 1, λ_0 -псевдомонотонністю на W_σ оператора $C \circ R : X \rightarrow X^*$ та монотонністю і неперервністю у відповідних топологіях операторів $\lambda I : X \rightarrow X^*$ і $B \circ R : X \rightarrow X^*$ випливає, що оператор $F : X \rightarrow X^*$ – λ_0 -псевдомонотонний.

Перевіримо умову α_2 . Доведемо спочатку, що оператор $B \circ R : C(S; V_\sigma) \rightarrow X^*$ демінеперервний.

Відомо, що B_0 обмежений, тобто для всіх $u \in V_{\sigma_1}$

$$\exists K_1 > 0 : \|B_0 u\|_{V_{\sigma_1}^*} \leq K_1 \|u\|_{V_\sigma}.$$

Для $v \in L_2(S; V_{\sigma_1})$ в силу обмеженості B_0 маємо

$$\begin{aligned} \|Bv\|_{L_2(S; V_{\sigma_1}^*)} &= \left(\int_S \|C_0 v(t)\|_{V_{\sigma_1}^*}^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \leq \\ &\leq K_1 \left(\int_S \|v(t)\|_{V_{\sigma_1}}^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} = K_1 \|v\|_{L_2(S; V_{\sigma_1})}. \end{aligned}$$

Звідси випливає неперервність, а отже, і демінеперервність оператора $B : L_2(S; V_{\sigma_1}) \rightarrow L_2(S; V_{\sigma_1}^*)$. Звідси і з ліпшицевості оператора $R : C(S; V_\sigma) \rightarrow C(S; V_\sigma)$ маємо демінеперервність оператора $B \circ R : C(S; V_\sigma) \rightarrow L_2(S; V_{\sigma_1}^*)$. Оскільки $L_2(S; V_{\sigma_1}^*) \subset X^*$, то маємо демінеперервність оператора $B \circ R : C(S; V_\sigma) \rightarrow X^*$.

Доведемо демінеперервність оператора $C \circ R : C(S; V_\sigma) \rightarrow X^*$. Оскільки оператор $R : C(S; V_\sigma) \rightarrow C(S; V_\sigma)$ ліпшицевий, а отже, неперервний, а оператор $C : X_2 \rightarrow X_2^*$ демінепе-

рервний, то з неперервного вкладення просторів $C(S; V_\sigma)$ в X_2 і X_2^* в X^* маємо демінеперервність оператора $C \circ R : C(S; V_\sigma) \rightarrow X^*$.

Таким чином, маємо демінеперервність оператора $F : C(S; V_\sigma) \rightarrow X^*$.

Перевіримо виконання умови α_3 , а саме доведемо, що виконується співвідношення

$$\frac{\langle F(y) + \lambda I(y), y \rangle_X}{\|y\|_X} \rightarrow +\infty \text{ при } \|y\|_X \rightarrow +\infty.$$

Взявши до уваги визначення оператора F , отримуємо

$$\begin{aligned} \frac{\langle F(y) + \lambda I(y), y \rangle_X}{\|y\|_X} &= \frac{\langle A(y), y \rangle_X}{\|y\|_X} + \frac{\langle \lambda I(y), y \rangle_X}{\|y\|_X} + \\ &+ \frac{\langle B \circ R(y), y \rangle_X}{\|y\|_X} + \frac{\langle C \circ R(y), y \rangle_X}{\|y\|_X}. \end{aligned} \quad (6)$$

Розглянемо третій доданок. З визначення оператора R маємо

$$\begin{aligned} \langle B \circ Rv, v \rangle &= \int_S (B_0(Rv)(t), (Rv)'(t)) dt = \\ &= \frac{1}{2} ((B_0(Rv)(T), (Rv)(T)) - (B_0 a_0, a_0)) \geq \\ &\geq -\frac{1}{2} (B_0 a_0, a_0). \end{aligned}$$

Розглянемо останній доданок. Спочатку знайдемо константу Ліпшиця для оператора $R : X_2 \rightarrow X_2^*$. Відзначимо, що норма в просторі X_2 визначається так:

$$\|\cdot\|_{X_2} = \|\cdot\|_{L_{p_2}(S; V_2)} + \|\cdot\|_{L_{p_0}(S; H)}.$$

Розглянемо $Ry - R\bar{0} = \int_0^t y(s) ds$. Далі мати-

memo

$$\begin{aligned} \|Ry - R\bar{0}\|_{X_2} &= \left\| \int_0^t y(s) ds \right\|_{X_2} = \left\| \int_0^t y(s) ds \right\|_{L_{p_2}(S; V_2)} + \\ &+ \left\| \int_0^t y(s) ds \right\|_{L_{p_0}(S; H)} = \left(\int_0^T \int_0^t \|y(s) ds\|_{V_2}^{p_2} dt \right)^{\frac{1}{p_2}} + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} + \left(\int_0^T \int_0^t \|y(s) ds\|_H^{p_0} dt \right)^{\frac{1}{p_0}} &\leq \left(\int_0^T \left(\int_0^t \|y(s) ds\|_{V_2}^{p_2} dt \right)^{\frac{1}{p_2}} + \right. \\ &\left. + \left(\int_0^T \left(\int_0^t \|y(s) ds\|_H^{p_0} dt \right)^{\frac{1}{p_0}} \right)^{\frac{1}{p_0}} \right)^{p_2} \end{aligned}$$

Скориставшись нерівністю Гельдера, отримуємо

$$\begin{aligned} \left(\int_0^T \left(\int_0^t \|y(s) ds\|_{V_2}^{p_2} dt \right)^{\frac{1}{p_2}} + \left(\int_0^T \left(\int_0^t \|y(s) ds\|_H^{p_0} dt \right)^{\frac{1}{p_0}} \right)^{\frac{1}{p_0}} \right)^{p_2} &\leq \\ &\leq \left(\int_0^T t^{p_2-1} \int_0^t \|y(s) ds\|_{V_2}^{p_2} ds dt \right)^{\frac{1}{p_2}} + \\ &+ \left(\int_0^T t^{p_0-1} \int_0^t \|y(s) ds\|_H^{p_0} ds dt \right)^{\frac{1}{p_0}}. \end{aligned}$$

Провівши заміну змінних, дістанемо

$$\begin{aligned} \left(\int_0^T t^{p_2-1} \int_0^t \|y(s)\|_{V_2}^{p_2} ds dt \right)^{\frac{1}{p_2}} + \left(\int_0^T t^{p_0-1} \int_0^t \|y(s)\|_H^{p_0} ds dt \right)^{\frac{1}{p_0}} &= \\ = \left(\int_0^T \int_0^T t^{p_2-1} \|y(s)\|_{V_2}^{p_2} dt ds \right)^{\frac{1}{p_2}} + \left(\int_0^T \int_0^T t^{p_0-1} \|y(s)\|_H^{p_0} dt ds \right)^{\frac{1}{p_0}} &\leq \\ \leq \left(\int_0^T \|y(s)\|_{V_2}^{p_2} ds T^{p_2} \right)^{\frac{1}{p_2}} + \left(\int_0^T \|y(s)\|_H^{p_0} ds T^{p_0} \right)^{\frac{1}{p_0}} &= \\ = T \left[\left(\int_0^T \|y(s)\|_{V_2}^{p_2} ds \right)^{\frac{1}{p_2}} + \left(\int_0^T \|y(s)\|_H^{p_0} ds \right)^{\frac{1}{p_0}} \right] &= \\ = T \left(\|y\|_{L_{p_2}(S; V_2)} + \|y\|_{L_{p_0}(S; H)} \right) = T \|y\|_{X_2}. \end{aligned}$$

Отже, T – це стала Ліпшиця для оператора $R : X_2 \rightarrow X_2^*$.

Оцінимо останній доданок, скориставшись визначенням і властивостями оператора R , а також умовами на оператор C :

$$\begin{aligned} & \frac{\langle C \circ R(y), y \rangle_X}{\|y\|_X} \geq \frac{-\|C \circ Ry\|_{X_2^*} \|y\|_{X_2}}{\|y\|_X} \geq \\ & \geq \frac{-c_1(1 + \|Ry\|_{X_2}^\alpha \|y\|_{X_2})}{\|y\|_X} \geq \frac{-c_1 \|y\|_{X_2} - c_1 \|y\|_{X_2} \|Ry\|_{X_2}^\alpha}{\|y\|_X} \geq \\ & \geq \frac{-c_1 \|y\|_{X_2} - c_1 \|y\|_{X_2} (\|Ry - R\bar{0}\|_{X_2} + \|R\bar{0}\|_{X_2})^\alpha}{\|y\|_X} \geq \\ & \geq \frac{-c_1 \|y\|_{X_2} - c_1 \|y\|_{X_2} (T^\alpha \|y\|_{X_2} + \|R\bar{0}\|_{X_2})^\alpha}{\|y\|_X} \geq \\ & \geq \frac{-c_1 \|y\|_{X_2} - c_1 \|y\|_{X_2} (T^\alpha \|y\|_{X_2}^\alpha + \|R\bar{0}\|_{X_2}^\alpha) 2^{\alpha-1}}{\|y\|_X} = \\ & = \frac{-2^{\alpha-1} c_1 T^\alpha \|y\|_{X_2}^{\alpha+1} - c_1 \|y\|_{X_2} \|R\bar{0}\|_{X_2}^\alpha 2^{\alpha-1} - c_1 \|y\|_{X_2}}{\|y\|_X} = \\ & = \frac{-2^{\alpha-1} c_1 T^\alpha \|y\|_{X_2}^{\alpha+1} - \|y\|_{X_2} (c_1 \|R\bar{0}\|_{X_2}^\alpha 2^{\alpha-1} + c_1)}{\|y\|_X} \geq \\ & \geq \frac{-2^{\alpha-1} c_1 T^\alpha \|y\|_{X_2}^{\alpha+1} - \|y\|_X (c_1 \|R\bar{0}\|_{X_2}^\alpha 2^{\alpha-1} + c_1)}{\|y\|_X} = \\ & = \frac{-2^{\alpha-1} c_1 T^\alpha \|y\|_{X_2}^{\alpha+1}}{\|y\|_X} - (c_1 \|R\bar{0}\|_{X_2}^\alpha 2^{\alpha-1} + c_1). \end{aligned}$$

Внаслідок того, що a_0 і c_1 фіксовані, маємо

$$\frac{-\frac{1}{2}(B_0 a_0, a_0)}{\|y\|_X} \rightarrow 0 \text{ при } \|y\|_X \rightarrow +\infty,$$

а тому отримуємо

$$\begin{aligned} & \frac{\langle A(y), y \rangle_X}{\|y\|_X} + \frac{\lambda \|y\|_{L_2(S;H)}^2}{\|y\|_X} - \frac{2^{\alpha-1} c_1 T^\alpha \|y\|_{X_2}^{\alpha+1}}{\|y\|_X} - \\ & - (c_1 \|R\bar{0}\|_{X_2}^\alpha 2^{\alpha-1} + c_1) \rightarrow +\infty \text{ при } \|y\|_X \rightarrow +\infty. \end{aligned}$$

Теорема доведена.

Зауваження 1. Рівняння $u'' + Au' + Bu + Cu = f$ розуміється як рівняння в просторі $D^*(S; V^*)$. Якщо $u \in C(S; V)$ з $u' \in X$ задовольняє це рівняння, то $u'' = f - Au' - Bu - Cu \in X^*$. Це означає, що $u' \in W \subset C(S; H)$. Звідси випливає справедливість умов $u'(0) = a_1 \in H$ і $u' \in W$.

Зауваження 2. У випадку $X_2 = L_2(S; H)$ і $\alpha = 1$ достатня умова (4) матиме такий вигляд:

$$\frac{\langle Ay, y \rangle_X + \lambda \|y\|_{L_2(S;H)}^2}{\|y\|_X} \rightarrow +\infty \text{ при } \|y\|_X \rightarrow +\infty.$$

Висновки

За допомогою методу Фаєдо–Гальборкіна можна довести розв'язність для класу еволюційних рівнянь II порядку із суттєво нелінійними псевдомонотонними на W_σ операторами. Як приклад можна розглянути диференціальное-операторне рівняння II порядку з операторами, які зображаються у вигляді суми монотонного та демінеперервного оператора. Враховуючи перспективи одержаних результатів, можна обґрунтувати розв'язність для класів неавтономних еволюційних задач II порядку з диференціальними операторами, які породжують оператори варіаційного числення [5, 7]. Таким чином, порівняно з [12, 13] одержані результати дають можливість досліджувати принципово ширші класи хвильових процесів з “нелінійним тертям”.

Н.В. Задоянчук, П.О. Касьянов

О РАЗРЕШИМОСТИ НЕЛИНЕЙНЫХ ЭВОЛЮЦИОННЫХ УРАВНЕНИЙ II ПОРЯДКА С НЕКОЭРЦИТИВНЫМИ W_{λ_0} -ПСЕВДОМОНОТОННЫМИ ОТОБРАЖЕНИЯМИ

Рассмотрен класс эволюционных уравнений с W_{λ_0} -псевдомонотонными отображениями. При

N.V. Zadoyanchuk, P.O. Kasyanov

ON SOLVABILITY FOR THE SECOND ORDER NONLINEAR EVOLUTION EQUATIONS WITH NONCOERCIVE W_{λ_0} -PSEUDOMONOTONE MAPS

In this paper, we consider a class of the second order evolution equations with W_{λ_0} -pseudomonotone

помощи метода Фаэдо–Галеркина доказана разрешимость класса эволюционных уравнений с существенно нелинейными некоэрцитивными операторами, в частности с операторами вариационного исчисления. Получены равномерные априорные оценки в $L_q(S; V'_\sigma)$ на производные приближенных решений. По сравнению с [12, 13] полученные результаты позволяют исследовать принципиально более широкие классы волновых процессов с “нелинейным трением”.

maps. Using the Faedo-Galerkin method, the resolvability for a class of evolution equations with nonlinear noncoercive operators, in particular with variation calculus operators, is proved. Furthermore, the uniform priori estimations in $L_q(S; V'_\sigma)$ for derivatives are obtained. The results of the study suggest the perspectives for investigation of wider classes of wave processes with “nonlinear friction” as compared to [12, 13].

1. Мельник В.С. Об операторных включениях в банаховых пространствах с плотно определенными операторами // System Research & Information Technologies. – 2003. – № 3. – Р. 120–126.
2. Brezis H. Problemes unilateraux // J. de Mathematiques Pures et Appliquees. – 1972. – 51. – Р. 377–406.
3. Лионс Ж.-Л. Неравенства в механике и физике. – М.: Наука, 1980. – 384 с.
4. Гаевский Х., Греггер К., Захариас К. Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения. – М.: Мир, 1978. – 338 с.
5. Лионс Ж.-Л. Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. – М.: Мир, 1972. – 588 с.
6. Tetam R. Infinite-dimentional dynamical systems in mechanics and physics. – New York, 1988.
7. Згуровский М.З., Мельник В.С. Неравенство Ки Фаня и операторные включения в банаховых пространствах // Кибернетика и системный анализ. – 2002. – № 2. – С. 70–85.
8. Мельник В.С. Мультивариационные неравенства и операторные включения в банаховых пространствах с отображениями класса (S_+) // Укр. мат. журн. – 2000. – 52, № 11. – С. 1513–1523.
9. Мельник В.С. О критических точках некоторых классов многозначных отображений // Кибернетика и системный анализ. – 1997. – № 2. – С. 87–98.
10. Згуровский М.З., Мельник В.С., Новиков А. Н. Прикладные методы анализа и управления нелинейными процессами и полями. – К.: Наук. думка, 2004. – 590 с.
11. Згуровский М.З., Мельник В.С. Метод штрафа для вариационных неравенств с многозначными отображениями // Кибернетика и системный анализ. Ч. I. – 2000. – № 4. – С. 57–69; ч. II. – 2002. – № 5. – С. 41–53; ч. III. – 2001. – № 2. – С. 70–83.
12. Задоянчук Н.В., Касьянов П.О. Про розв’язність диференціально-операторних рівнянь II порядку з некоерцитивними операторами w_{λ_0} -псевдомонотонного типу // Доп. НАН України. – 2006. – № 12. – С. 15–19.
13. Задоянчук Н.В., Касьянов П.О. Метод Фаэдо–Гальборкіна для нелінійних еволюційних рівнянь II порядку з операторами Вольтера // Нелінійні коливання. – 2007. – № 2. – С. 204–228.
14. Kasyanov P.O., Mel'nik V.S., Yasinskiy V.V. Evolution inclusions and inequalities in banach spaces with w_λ -pseudomonotone maps. – К.: Nauk. Dumka, 2007. – 308 p.
15. Papageorgiou Nikolaos S. Existence of Solutions for the Second Order Evolution Inclusions // J. of Applied Mathematics and Stochastic Analysis. – 1994. – 7, N 4. – P. 525–535.
16. Papageorgiou Nikolaos S., Yannakakis Nikolaos. Second Order Nonlinear Evolution Inclusions II: Structure of the Solution Set // Acta Mathematica Sinica, English Series. – 2006. – 22, N 1. – P.195–206.

Рекомендована Радою
Фізико-технічного інституту
НТУУ “КПІ”

Надійшла до редакції
28 грудня 2007 року

УДК 571.986

М.М. Кухарчук, М.І. Яременко

КВАЗІЛІНІЙНІ РІВНЯННЯ ДРУГОГО ПОРЯДКУ З МАТРИЦЕЮ ГІЛЬБАРГА–СЕРРІНА І НЕЛІНІЙНІ НАПІВГРУПИ СТИСКУ. ЧАСТИНА 2. ПОБУДОВА НЕЛІНІЙНОЇ НАПІВГРУПИ СТИСКУ

Вступ

Дана стаття є завершальною частиною публікації в попередньому номері журналу, тому позначення та визначення, що були введені там, використовуватимуться без обговорення.

Теорема 1. Якщо A_0 – строго локальний генератор напівгрупи T_t , то A_0 – дисипативний оператор і A_0 має дисипативне розширення A , таке, що $(I - A)^{-1}$ однозначне і неперервне на $L_2(R^l, d^l x)$.

Доведення. Введемо множину відображень

$$A_h = \frac{T_h - I}{h},$$

де $h > 0$.

Оскільки відображення A_h однозначне, то використовуючи (12) [1] для будь-яких $\{f, q\} \subset L_2(R^l, d^l x)$, можемо записати $(A_h f - A_h q, f - q) \leq 0$. Зафіксуємо $\lambda > 0$ і розглянемо відображення $(I - \lambda A_h)^{-1}$. Для будь-яких $f, q \in R(I - \lambda A_h)$ покладемо

$$f_1 = (I - \lambda A_h)^{-1} f \text{ і } q_1 = (I - \lambda A_h)^{-1} q,$$

$$\begin{aligned} & \|(I - \lambda A_h)^{-1} f - (I - \lambda A_h)^{-1} q\|^2 \leq \|f_1 - q_1\|^2 + \\ & + \|\lambda A_h f_1 - \lambda A_h q_1\|^2 - 2\lambda (A_h f_1 - A_h q_1, f_1 - q_1) = \\ & = \|f_1 - \lambda A_h f_1 - q_1 + \lambda A_h q_1\|^2 = \|f - q\|^2. \end{aligned} \quad (1)$$

Отже, матимемо

$$\|(I - \lambda A_h)^{-1} f - (I - \lambda A_h)^{-1} q\| \leq \|f - q\|, \quad (2)$$

тобто неперервність оператора $(I - \lambda A_h)^{-1}$ доведена для $\lambda > 0$.

За визначенням, $q - A_h q = f$, $q \in L_2(R^l, d^l x)$ еквівалентно $q = (I - A_h)^{-1} f$ або $q = \frac{h}{1+h} f + \frac{1}{1+h} T_h q$.

Визначимо оператор $E: \varphi \rightarrow \frac{h}{1+h} f + \frac{1}{1+h} T_h \varphi$.

Очевидно, що $\|E\varphi - E\psi\| \leq \frac{1}{1+h} \|T_h \varphi - T_h \psi\| \leq \frac{1}{1+h} \|\varphi - \psi\|$, тобто, використовуючи принцип Банаха, можемо стверджувати, що рівняння $q = Eq$ має єдиний розв'язок.

Отже, ми одержали, що оператор $(I - \lambda A_h)^{-1}$ визначений на $L_2(R^l, d^l x)$.

Визначимо (взагалі кажучи, неоднозначне) відображення A таким чином:

$$\begin{aligned} Aq &= \{q - f : f \in L_2(R^l, d^l x), \\ & q = w - \lim_{\phi} (I - A_h)^{-1} f\}. \end{aligned} \quad (3)$$

Дослідимо деякі властивості оператора A . Нехай $q \in D(A_0)$. Тоді існує $f = q - \lim_{h \downarrow 0} A_h q$.

Покладемо $q_h = (I - A_h)^{-1} f$ і $f_h = q - A_h q$, отже, $\lim_{h \downarrow 0} \|f - f_h\| = 0$.

Використовуючи (2) та теорему “про проміжну границю”, маємо

$$\lim_{h \downarrow 0} \|q_h - q\| = 0.$$

Отже,

$$\begin{aligned} \lim_{h \downarrow 0} (I - A_h)^{-1} f &= q \text{ при } q \in D(A_0), \\ f &= q - A_0 q. \end{aligned} \quad (4)$$

За припущенням, $D(A_0)$ – не порожня множина, тобто існують елементи $q_0 \in D(A_0)$ і $f_0 = q_0 - A_0 q_0$. Для довільного елемента $f \in L_2(R^l, d^l x)$ виконується нерівність $\|(I - A_h)^{-1} f - (I - A_h)^{-1} f_0\| \leq \|f - f_0\|$, отже, множина $\{(I - A_h)^{-1} f : h \in (0, \gamma)\}$ обмежена в $L_2(R^l, d^l x)$, що призводить до її компактності в слабкій топології, і, значить, ми можемо стверджувати, що існує границя

$$q = w - \lim_{h \in \Phi \in \phi} (I - A_h)^{-1} f, \quad (5)$$

де $\phi = \{\Phi\}$ – максимальний фільтр множин $\Phi \subset (0, \infty)$, таких, що збігаються до нуля. Отже, оскільки

$$(I - A)^{-1} f = W - \lim_{\Phi} (I - A_h)^{-1} f, \quad (6)$$

то $(I - A)^{-1}$ визначений на $L_2(R^l, d^l x)$ і $A_0 f \in Af$ при $f \in D(A_0)$, останнє твердження є наслідком (4).

Ми переконалися, що дійсно оператор A є розширеним оператором A_0 . Тепер покажемо дисипативність відображення A , для чого візьмемо $q_1, q_2 \in D(A)$ і $f_1 \in q_1 - Aq_1$, $f_2 \in q_2 - Aq_2$ і покладемо $q_{1h} = (I - A_h)^{-1} f_1$ і $q_{2h} = (I - A_h)^{-1} f_2$, тобто матимемо

$$w - \lim_{\Phi} q_{1h} = q_1 \text{ і } w - \lim_{\Phi} q_{2h} = q_2. \quad (7)$$

Дисипативність оператора A є наслідком довільності елемента $q_1 - f_1 - (q_2 - f_2)$ із множини $Aq_1 - Aq_2$ і нерівності

$$\begin{aligned} (q_1 - f_1 - (q_2 - f_2), q_1 - q_2) &= \|q_1 - q_2\| - (f_1 - f_2, q_1 - q_2) \\ q_1 - q_2 &\leq \lim_{\Phi} \|q_{1h} - q_{2h}\|^2 - \lim_{\Phi} (f_1 - f_2, q_{1h} - q_{2h}) = \\ &= \lim_{\Phi} (q_{1h} - f_1 - (q_{2h} - f_2), q_{1h} - q_{2h}) = \\ &= \lim_{\Phi} (A_h q_{1h} - A_h q_{2h}, q_{1h} - q_{2h}) \leq 0. \end{aligned} \quad (8)$$

Теорема доведена.

Теорема 2. Нехай $D(T_t)$ – область визначення напівгрупи стиску T_t , при цьому $D(T_t)$ є випуклою і замкненою множиною в $L_2(R^l, d^l x)$. Тоді область визначення $D(A_0)$ локального генератора A_0 напівгрупи T_t всюди щільна в $D(T_t)$.

Доведення цієї теореми почнемо з деяких означень і тверджень:

$$A_0 f \equiv \lim_{h \downarrow 0} \frac{T_h f - f}{h}, \quad (9)$$

$$A_h \equiv \lim_{h \downarrow 0} \frac{T_h - I}{h}. \quad (10)$$

Очевидно, що

$$A_0 f \equiv \lim_{h \downarrow 0} A_h f, \quad (11)$$

$$A_{\phi} f \equiv w - \lim_{h \in \Phi \in \phi} A_h f, \quad (12)$$

де ϕ – максимальний фільтр підмножини $\Phi \subset (0, \infty)$, що збігається до нуля, як і раніше, і

$$\sup_{h > 0} \|A_h f\| < \infty, \quad (13)$$

$$A_{\lambda} f = \{f - q : q \in L_2(R^l, d^l x),$$

$$f = w - \lim_{h \in \Phi \in \phi} (I - \lambda A_h)^{-1} q, \lambda > 0\}. \quad (14)$$

A. Має місце така рівність:

$$[D(A_0)] = [D(A_{\phi})], \quad (15)$$

де $[\]$ означає замикання в $L_2(R^l, d^l x)$. Дійсно, для будь-якого $f \in D(A_{\phi})$ існує послідовність

$t_n \downarrow 0$, така, що $T_{t_n} f \in D(A_0)$, отже, $\lim_{n \rightarrow \infty} T_{t_n} f = f$, тобто $[D(A_0)] \subset [D(A_{\phi})]$.

Очевидно, що $[D(A_{\phi})] \subset [D(A_0)]$, тобто (15) доведено.

B. Нехай $f \in L_2(R^l, d^l x)$ і існує послідовність $\{q_n\} \subset D(T_t)$, $t_n \downarrow 0$ і $k > 0$:

$$\|T_{t_n} q_n - f\| > \|q_n - f\| + k, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (16)$$

Тоді елемент f не належить $D(T_t)$.

Дійсно, припустимо супротивне, тобто, що $f \in D(T_t)$. Тоді матимемо

$$\begin{aligned} k &= \|q_n - f\| + k - \|f - q_n\| \leq \\ &\leq \|T_{t_n} q_n - f\| - \|T_{t_n} f - T_{t_n} q_n\| \leq \\ &\leq \|T_{t_n} f - T_{t_n} q_n - f\| = \|T_{t_n} f - f\|, \end{aligned} \quad (17)$$

але з неперервності напівгрупи T_t випливає, що

$$\begin{aligned} \forall f \in D(T_t), \forall \varepsilon > 0 \text{ існує } \delta > 0 : t \in (0, \delta) \Rightarrow \\ \Rightarrow \|T_t f - f\| < \varepsilon. \end{aligned} \quad (18)$$

Отже, при $t \downarrow 0$ і $k > 0$ співвідношення (17) суперечить (18), тобто елемент f не може належати $D(T_t)$.

С. Нехай $f \in L_2(R^l, d^l x)$ і існує послідовність $\{q_n\} \subset D(\Gamma_t)$, $h \downarrow 0$ і $k > 0$: $A_{h_n} q_n = v_n(q_n - f)$, для деякої послідовності $v_n > 0$, де

$$A_{h_n} = \frac{\Gamma_{h_n} - I}{h_n}, \quad (19)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|A_{h_n} q_n\| = \infty, \quad \|q_n - f\| \geq k > 0. \quad (20)$$

Тоді елемент f не належить $D(\Gamma_t)$.

Доведення цього твердження також проведемо методом "від супротивного". Нехай $f \in D(\Gamma_t)$. Виберемо, що $f_1 \in L_2(R^l, d^l x)$ і послідовність елементів $\{f_{2n}\} \subset L_2(R^l, d^l x)$ так, щоб

$$\|f_1 - f\| \leq \frac{k}{2} \quad \text{і} \quad (21)$$

$$f_{2n} - f = \frac{(f_1 - f, q_n - f)}{\|q_n - f\|^2} (q_n - f)$$

(нагадаємо, що під операцією $(\cdot, \cdot) : L_2(R^l, d^l x) \times L_2(R^l, d^l x) \rightarrow R$ розуміємо скалярний добуток в $L_2(R^l, d^l x)$ і $\|\cdot\| = \sqrt{(\cdot, \cdot)}$) і $(f_1 - f_{2n}, q_n - f) = 0$. Нехай

$$\alpha_n \equiv \frac{(f_1 - f, q_n - f)}{\|q_n - f\|^2}, \quad |\alpha_n| \leq \frac{1}{2}. \quad (22)$$

Як наслідок рівняння $A_{h_n} q_n = v_n(q_n - f)$, одержимо

$$\Gamma_{h_n} q_n - q_n = h_n v_n (q_n - f). \quad (23)$$

Тоді запишемо

$$\Gamma_{h_n} q_n - f_{2n} = q_n - f + h_n v_n (q_n - f) + f - f_{2n} = (1 + h_n v_n - \alpha_n)(q_n - f), \quad (24)$$

тобто

$$(\Gamma_{h_n} q_n - f_{2n}, f_1 - f_{2n}) = (1 + h_n v_n - \alpha_n)(q_n - f, f_1 - f_{2n}) = 0, \quad (25)$$

$$\|\Gamma_{h_n} q_n - f_1\|^2 = \|\Gamma_{h_n} q_n - f_{2n}\|^2 + \|f_1 - f_{2n}\|^2. \quad (26)$$

Далі можемо записати

$$\|q_n - f_1\|^2 = \|q_n - f_{2n}\|^2 + \|f_{2n} - f_1\|^2 =$$

$$= (1 - \alpha_n)^2 \|q_n - f\|^2 + \|f_{2n} - f_1\|^2. \quad (27)$$

Зводячи рівності (24), (26), (27) та використовуючи наші позначення, одержуємо таку нерівність:

$$\begin{aligned} & \|\Gamma_{h_n} q_n - f_1\| - \|q_n - f_1\|^2 \geq \\ & \geq \frac{h_n v_n \|q_n - f\|^2}{\|\Gamma_{h_n} q_n - f_1\| + \|q_n - f_1\|} \geq \\ & \geq \frac{h_n v_n \|q_n - f\|^2}{\|\Gamma_{h_n} q_n - f\| + \|q_n - f\| + 2\|f - f_1\|} \geq \\ & \geq h_n c(m) \|A_{h_n} q_n\|. \end{aligned} \quad (28)$$

Ми використали п. В: $\|\Gamma_{h_n} q_n - f\| \leq \|q_n - f\| + m$ для $n \geq n(m)$, стала $c(m)$ залежить лише від m і не залежить від номера $n \geq n(m)$.

Нехай далі $\|\Gamma_{l h_n} f - f\| \leq \frac{k}{2}$, де $l = 1, 2, \dots, k$.

Покладаючи в (28) $f_l \equiv \Gamma_{l h_n}$, $l = 1, 2, \dots, k$, одержуємо

$$\begin{aligned} & \|q_n - \Gamma_{(l-1)h_n} f\| - \|q_n - \Gamma_{l h_n} f\| \geq \\ & \geq \|\Gamma_{h_n} q_n - \Gamma_{l h_n} f\| - \|q_n - \Gamma_{l h_n} f\| \geq \\ & \geq c(m) h_n \|A_{h_n} q_n\|, \end{aligned} \quad (29)$$

оскільки

$$\|q_n - f\| - \|q_n - \Gamma_{k h_n} f\| \geq c(m) k h_n \|A_{h_n} q_n\|. \quad (30)$$

Використовуючи (27), покладаємо $k = \left\lceil \frac{\delta}{h_n} \right\rceil$.

Тоді маємо

$$\|q_n - f\| - \|q_n - \Gamma_{k h_n} f\| \leq \|f - \Gamma_{k h_n} f\| < \varepsilon. \quad (31)$$

Нерівності (30) і (31) суперечливі внаслідок того, що $\lim_{n \rightarrow \infty} h_n \|A_{h_n} q_n\| = \infty$.

Д. Для будь-якого $h > 0$ і $\lambda \geq 0$ існує $q_{h\lambda} \in D(\Gamma_t)$, таке, що $(I - \lambda A_h) q_{h\lambda} = f$, причому $q_{h\lambda}$ залежить неперервно від h при фіксованому $\lambda \geq 0$ і від λ при фіксованому $h > 0$.

Доведення даного твердження аналогічне тому, яке ми проводили під час доведення теореми 1, тобто будемо відображення $E : \psi \rightarrow$

$\rightarrow \frac{h}{\lambda+h}f + \frac{\lambda}{\lambda+h}T_h\psi$, де $\psi \in L_2(R^l, d^l x)$, і далі повторюємо наші викладки. Неперервна залежність $q_{h\lambda}$ від h і λ очевидні.

Е. Якщо константи $h > 0$ і $\psi \in D(T_t)$, та множина F має вигляд

$$F \equiv \{f + \psi : (f, T_h\psi - \psi) = 0\} \quad (32)$$

якщо $q \in D(T_t)$ і $T_h q$ протилежно напрямлені до $T_h\psi$ відносно F , то

$$\|q - \psi\| \geq \|T_h q - \psi\|.$$

Доведення впливає з означення F (32) і $(T_h q - \psi, T_h\psi - \psi) < 0$, тобто

$$\begin{aligned} \|T_h q - \psi\|^2 &= \|T_h q - T_h\psi + T_h\psi - \psi\|^2 = \\ &= \|T_h q - T_h\psi\|^2 + \|T_h\psi - \psi\|^2 + 2(T_h q - T_h\psi, \\ &T_h\psi - \psi) \leq \|q - \psi\|^2 - \|T_h\psi - \psi\|^2 + \\ &+ 2(T_h q - \psi, T_h\psi - \psi) \leq \|q - \psi\|^2. \end{aligned}$$

Ф. Для будь-якого елемента $f \in D(T_t)$ множина

$$\{q_{h\lambda}\} = (1 - \lambda A_h)^{-1} f : h > 0 \quad (33)$$

обмежена для будь-якого $\rho > 0$, існує $q_\phi = W - \lim_{h \in \Phi \in \Phi} (1 - \lambda A_h)^{-1} f$ і $q_\phi \in \{q \in D(T_t) : \|q - f\| < \rho\}$ для будь-якого $\lambda > 0$.

Доведення цього факту впливає з тверджень п. D, тобто доводиться існування елемента $q_{h\lambda} \in D(T_t) : (1 - \lambda A_h)q_{h\lambda} = f$ для $\|q_{h\lambda} - f\| \geq \rho$, а із п. С впливає існування сталої $M > 0$, такої, що

$$\|A_h q_{h\lambda}\| < M, \text{ при } \|q_{h\lambda} - f\| \geq \rho. \quad (34)$$

Нехай $\lambda_0 \leq \frac{\rho}{2M}$ і $\|q_{h\lambda_0} - f\| \geq \rho$, то існує $h > 0$, таке, що з $(1 - \lambda_0 A_h)q_{h\lambda_0} = f$ впливає

$$\|A_h q_{h\lambda_0}\| = \frac{1}{\lambda_0} \|q_{h\lambda_0} - f\| \geq 2M, \quad (35)$$

але (35) суперечить (34), отже, маємо

$$\|q_{h\lambda_0} - f\| \leq \rho \text{ при } h > 0. \quad (36)$$

Оскільки обмежені множини в $L_2(R^l, d^l x)$ є слабо компактними, то існує $q_\phi = W - \lim_{h \in \Phi \in \Phi} q_{h\lambda_0}$ в $\|q - f\| \leq \rho$, а оскільки $D(T_t)$ випукла і слабо замкнена, то $q_\phi \in D(T_t)$, отже, з (26) і рівності $\lambda_0 = \frac{\rho}{2M}$ впливає $\|q_{h\lambda_0} - f\| \leq 2\lambda_0 M$, що означає обмеженість множини $\{q_{h\lambda_0} : h > 0\}$.

Г. Існує послідовність $h_n \downarrow 0$, така, що

$$W - \lim (1 - \lambda A_{h_n})^{-1} f = q \quad (37)$$

і

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|(1 - \lambda A_{h_n})^{-1} f - q\| = \rho > 0. \quad (38)$$

Дійсно, із $W - \lim_{h \in \Phi \in \Phi} (1 - \lambda A_h)^{-1} f = q$ матимемо, внаслідок метризованості $\{(1 - \lambda A_h)^{-1} f, h > 0\}$ (яка в свою чергу впливає із сепарбельності, обмеженості множини $\{(1 - \lambda A_h)^{-1} f\}$ і твердження п. F)) і слабкої топології, що існує послідовність $\{h > 0\}$, така, що задовольняє (37). Якщо будь-яка послідовність, що задовольняє (37), сильно збігається до q , то $\lim_{h \in \Phi \in \Phi} (1 - \lambda A_h)^{-1} f = q$, а отже, існує послідовність $\{(1 - \lambda A_{h_n})^{-1} f, n \geq 1\}$, яка задовольняє (37) і (38) одночасно.

Н. Для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує $n(\varepsilon) > 0$, таке, що

$$\begin{aligned} \|T_{h_n} q_n - q_n\| < \varepsilon, |(q_n - q, f - q)| < \varepsilon, \\ \|q_n - q\|^2 - \rho^2 < \varepsilon \end{aligned} \quad (39)$$

при $n \geq n(\varepsilon)$.

Якщо ε достатньо мале, то при фіксованому $n \geq n(\varepsilon)$ існують $k_n > 0$ і $m(\varepsilon, n) > n$, такі, що

$$\sup_{0 < h < h_n} |(T_h - q_n, q_m - q)| < \varepsilon,$$

$$|(q - q_n, q - q_m)| < \varepsilon \text{ при } m \geq m(\varepsilon, n), \quad (40)$$

$$\|q - q_m\| + k_n < \|T_{h_n} q_n - q_m\| \text{ при } m \geq m(\varepsilon, n), \quad (41)$$

$$\begin{aligned} \|T_h q_n - T_{h_n} q_n\| < k_n \text{ при } h = \left[\frac{h_n}{h_m} \right] h_m, \\ m \geq m(\varepsilon, n). \end{aligned} \quad (42)$$

Дійсно, із співвідношення

$$T_{h_n} q_n - q_n = h_n A_{h_n} q_n h_n \lambda^{-1} (q_n - f) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

одержуємо, що $\|T_{h_n} q_n - q_n\| < \varepsilon$. Якщо врахувати (37) і (38), то (39) стає очевидним.

Внаслідок компактності множини $\{T_{h_n} q_n - q : h \in [0, h_n]\}$ одержимо $\lim_{n \rightarrow \infty} (q_n - q, T_{h_n} q_n - q) = 0$, тобто збіжність рівномірна відносно h , отже, (40) доведено.

Для доведення (41), запишемо

$$\begin{aligned} \|T_{h_n} q_n - q_m\|^2 &= \|q_n + h_n \lambda^{-1} (q_n - f) - q_m\|^2 = \\ &= \|q_n - q_m\|^2 + \lambda^{-2} h_n^2 \|q_n - f\|^2 + \\ &\quad + 2\lambda^{-1} h_n (q_n - f, q_n - q_m) \geq \\ &\geq \|q_n - q_m\|^2 + 2\lambda^{-1} h_n \|q_n - q\|^2 - 6\lambda^{-1} h_n \varepsilon \geq \\ &\geq \|q_n - q_m\|^2 + 2\lambda^{-1} h_n (\rho^2 - 4\varepsilon). \end{aligned}$$

Враховуючи, що $\lim_{m \rightarrow \infty} \left[\frac{h_n}{h_m} \right] h_m = h_n$, маємо,

що (42) доведено.

І. Якщо $n > n(\varepsilon)$ для довільного $\varepsilon > 0$, то існує послідовність $\eta_n, 0 < \eta_n < h_n$ (див. п. G), така, що (див. п. H)

$$(T_{\eta_n} q_n - q, f - q) < -\rho^2 + 3\varepsilon. \quad (43)$$

Для доведення цього факту використаємо твердження п. E, де ми покладемо

$$\psi = q_m, \quad h = h_m, \quad q = T_{kh_m} \text{ при } k = 0, 1, 2, \dots, \left[\frac{h_n}{h_m} \right].$$

Внаслідок нерівності $(T_{kh_m} q_n - q_m, T_{h_m} q_m - q_m) \leq 0$ при всіх k одержуємо

$$\|T_{kh_m} q_n - q_m\| \geq \|T_{(k+1)h_m} q_n - q_m\|. \quad (44)$$

Використовуючи (31), маємо

$$\begin{aligned} \|T_{kh_m} q_n - q_m\| &\geq \|T_{h_n} q_n - T_{\left[\frac{h_n}{h_m} \right] h_m} q_n\| + \\ &+ \|T_{\left[\frac{h_n}{h_m} \right] h_m} q_n - q_m\| \geq k_n + \|q_n - q_m\|, \end{aligned} \quad (45)$$

тобто одержали, що (45) суперечить (41), а отже, маємо $\eta = kh_m$, де $\eta \in (0, h_n)$, і $(T_{\eta} q_n - q_m, T_{h_m} q_m - q_m) > 0$.

Скористаємося рівністю $T_{h_m} q_m - q_m = -h_m \lambda^{-1} (f - q_m)$, яку ми вже використовували при доведенні (39). Одержимо $(T_{\eta} q_n - q_m, f - q_m) < 0$. Далі з нерівності (39) матимемо $(T_{\eta} q_n - q, f - q_m) < -\rho^2 + 2\varepsilon$, і із врахуванням (40) отримаємо

$$(T_{\eta} q_n - q, f - q) < -\rho^2 + 3\varepsilon,$$

тобто (43) доведено.

J. Тепер доведемо, що $\forall f \in D(T_t)$ із відношення

$$q = (I - \lambda A_{\lambda})^{-1} f \quad (46)$$

впливає

$$q = \lim_{h \in \Phi} (I - \lambda A_h)^{-1} f, \quad (47)$$

і тоді існує $\lim (I - \lambda A_h)^{-1} f = q$ – сильна границя.

Справді, згідно з п. D, $q_h = (I - \lambda A_{\lambda})^{-1} f$ визначений в $D(T_t)$.

Доведення буде проводитися від супротивного. Нехай q_n не прямує до q сильно. Тоді, використовуючи (43) і (39), запишемо

$$\begin{aligned} \|T_{\eta_n} - f\|^2 &= \|T_{\eta_n} q_n - q\|^2 + \|f - q\|^2 - \\ &- (T_{\eta_n} q_n - q, f - q) \geq \|f - q\|^2 + 2\rho^2 - 6\varepsilon \geq \\ &\geq \|q_n - f\|^2 + \rho^2 - 8\varepsilon. \end{aligned} \quad (48)$$

Оскільки множина $\{\|q_n - f\| : n \in N\}$ обмежена, то існують $k > 0$, такі, що для будь-яких $n > n(\varepsilon)$ і деяких $\eta_n \in (0, h_n)$ справедлива нерівність

$$\|T_{\eta_n} q_n - f\| > \|q_n - f\| + k.$$

Використовуючи п. B, маємо, що $f \notin D(T_t)$.

Отже, одержана суперечність доводить наше твердження.

K. Нехай $q \in D(T_t)$. Якщо існує $f \in D(T_t)$ і такий, що $q = (I - \lambda A_{\lambda})^{-1} f$ для деяких $\lambda > 0$, то $q \in D(A_{\phi})$.

Дійсно, згідно з п. J маємо існування послідовності $h_k \downarrow 0 : q_k = (I - \lambda A_{h_k})^{-1} f \rightarrow q$ сильно при $k \rightarrow \infty$.

При фіксованому $h > 0$ і $n_k \left[\frac{h}{h_k} \right]$, оскільки

$$\lambda(T_{h_k} q_k - q_k) = h_k(q_k - f), \quad (49)$$

маємо

$$\begin{aligned} \lambda \|T_{n_k h_k} q_k - q_k\| &\leq \lambda \sum_{n=1}^{n_k} \|T_{n h_k} q_k - T_{(n-1) h_k} q_k\| \leq \\ &\leq \lambda n_k \|T_{h_k} q_k - q_k\| \leq n_k h_k \|q_k - f\|. \end{aligned} \quad (50)$$

Внаслідок того, що $q_k \rightarrow q$, $n_k h_k \rightarrow h$, маємо $T_{n_k h_k} q_k \rightarrow T_{\eta} q$ при $k \rightarrow \infty$.

Одержуємо $\left\| \frac{T_h q - q}{h} \right\| \leq \frac{\|q - f\|}{\lambda}$ при довіль-

них $h > 0$, множина $\{A_h q : h > 0\}$ обмежена. Тоді внаслідок слабкої компактності існує $w - \lim_{h \in \Phi} A_h q$.

Л. Нехай $D(T_t) = L_2(R^l, d^l x)$. Тоді згідно з п. К одержимо, що для того щоб $f \in A_\lambda q$, необхідно і достатньо існування послідовності q_h , такої, що

$$\lim_{h \in \Phi} q_h = q \quad \text{і} \quad \lim_{h \in \Phi} A_h q_h = f. \quad (51)$$

Дійсно, нехай $q = (I - \lambda A_\lambda)^{-1}(q - \lambda f)$. Тоді генератор A_λ не залежить від λ , отже, $A_\lambda = A_\mu$ при $\lambda, \mu > 0$, але нам необхідно ще показати, що вони не залежать від вибору максимального фільтра Φ .

Нехай Φ_1 і Φ_2 — два максимальні фільтри. Тоді

$$q_1 = (I - \lambda A_{\lambda \Phi_1})^{-1} f \quad \text{і} \quad q_2 = (I - \lambda A_{\lambda \Phi_2})^{-1} f, \quad (52)$$

тобто існують послідовності $h_n \downarrow 0$ і $\eta_n \downarrow 0$, такі, що

$$q_1 = \lim_{n \rightarrow \infty} (I - \lambda A_{h_n})^{-1} f, \quad q_2 = \lim_{n \rightarrow \infty} (I - \lambda A_{\eta_n})^{-1} f. \quad (53)$$

Нехай $q_1 \neq q_2$ і $\|q_1 - f\| \geq \|q_2 - f\|$. Тоді існує $k > 0$, таке, що $|(q_2 - f, f - q_1)| + k \leq \|f - q_1\|^2$.

Використовуючи п. J, одержимо

$$\sup_{0 < h < \eta_n} (T_h q_{2n} - f, q_{1m} - f) \geq \|q_{1m} - f\|^2 \quad (54)$$

для досить великих n, m , оскільки $\sup_{0 < h < \eta_n} \|T_h q_2 - f\|^2 \geq \|q - f\|^2 - \frac{k}{4}$, де n достатньо великі.

Внаслідок того, що

$$\begin{aligned} \|q_2 - (2f - q_1)\|^2 &\leq \|q_2 - f\|^2 + \|f - q_1\|^2 - \\ &- 2(q_2 - f, f - q_1) \leq 4\|f - q_1\|^2 - k, \quad h \in (0, \eta_n), \end{aligned}$$

одержимо

$$\begin{aligned} \|T_h q_2 - (2f - q_1)\|^2 &= \|T_h q_2 - f\|^2 + \|f - q_1\|^2 + \\ &+ 2(T_h q_2 - f, q_1 - f) \geq \|T_h q_2 - f\|^2 + \\ &+ 3\|f - q_1\|^2 - \frac{k}{2} \geq 4\|f - q_1\|^2 - \frac{3k}{4}, \end{aligned} \quad (55)$$

тобто маємо, що $2f - q_1 \notin D(T_t)$, а це внаслідок п.В в свою чергу суперечить рівності $D(T_t) = L_2(R^l, d^l x)$.

Доведення теореми 2. Згідно з п. F для довільного елемента $f \in D(T_t)$ існує елемент $q \in D(T_t)$, такий, що $q = (I - \lambda A_\lambda)^{-1} f$ і $\|f - q\| \leq \rho$. Використовуючи п. К, одержуємо $q \in D(A_\Phi)$. Оскільки ρ — довільне мале число з $[D(A_\Phi)] = [D(A_\Phi)]$ (39), впливає твердження теореми. Теорема 2 доведена.

Побудова нелінійної напівгрупи стиску

Теорема 3. Узагальнена задача Коші в просторі Лебега $L_2(R^l, d^l x)$

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} u(t) \in Au(t), \quad t \in [0, t_0], \\ u(0) = u_0, \quad u(t) \in L_2(R^l, d^l x), \end{cases}$$

$$A \equiv -A_\lambda^2 : L_2(R^l, d^l x) \rightarrow L_2(R^l, d^l x)$$

має єдиний слабкий розв'язок.

Доведення. Покажемо, що

$$D(I - \lambda A)^{-1} = L_2(R^l, d^l x), \quad \lambda \in (0, 1]. \quad (56)$$

Оскільки $(I - \lambda A)^{-1}$ — стиск, то $(I - \lambda A)^{-1}$ — однозначне відображення. Зафіксуємо довільний елемент u із $L_2(R^l, d^l x)$ і число $\mu \in \left[\frac{1}{2}, 1 \right]$.

Правильними є такі рівності:

$$\begin{aligned} v &= (I - \mu A)^{-1} u, \quad v - \mu A v = u, \\ v &= (I - A)^{-1} \left(\frac{1}{\mu} u - \frac{1 - \mu}{\mu} v \right). \end{aligned} \quad (57)$$

Розглянемо відображення

$$E_u : \varphi \rightarrow (I - A)^{-1} \left(\frac{1}{\mu} u - \frac{1 - \mu}{\mu} v \right). \quad (58)$$

Очевидно, що $\|E_u \psi_1 - E_u \psi_2\| \leq \frac{1 - \mu}{\mu} \|\psi_1 - \psi_2\|$, отже, рівняння $E_u v = v$ має розв'язок, тобто і $(I - \lambda A)^{-1}$, і E_u визначені на $L_2(R^l, d^l x)$.

Аналогічно маємо, що $(I - \mu^k A)^{-1}$ визначений на $L_2(R^l, d^l x)$ при $k = 1, 2, \dots$. Отже, можемо записати $\lambda = \mu^k$ для певних μ і k .

Якщо A – однозначний оператор, то покладемо $A_n = A \left(I - \frac{A}{n} \right)^{-1}$. У загальному випадку маємо $A_n : u - \frac{1}{n} v \rightarrow v$, де $u \in D(A), v \in Au$.

Дослідимо відображення A_n на однозначність. Нехай $u_1 - \frac{v_1}{n} = u_2 - \frac{v_2}{n}$ при $v_1 \in Au_1, v_2 \in Au_2$. Тоді матимемо

$$u_1 = \left(I - \frac{A}{n} \right)^{-1} \left(u_1 - \frac{v_1}{n} \right) = \left(I - \frac{A}{n} \right)^{-1} \left(u_2 - \frac{v_2}{n} \right) = u_2.$$

Отже, $\left(I - \frac{A}{n} \right)^{-1}$ – однозначне відображення, тобто $v_1 = v_2$, звідки робимо висновок, що оператори A_n однозначні.

Покажемо, що кожне відображення A_n є дисипативне і генерує нелінійну напівгрупу T_t^n , таку, що $\|A_n T_t^n u\| \leq \|A_n u\|$.

Доведемо дисипативність A_n . Нехай u_1 і u_2 – два довільні елементи з $L_2(R^l, d^l x)$ і нехай $v_1 = \left(I - \frac{A}{n} \right)^{-1} u_1, v_2 = \left(I - \frac{A}{n} \right)^{-1} u_2$.

Підберемо $\tilde{v}_1 \in Av_1$ і $\tilde{v}_2 \in Av_2$ і одержимо $u_1 = v_1 - \frac{\tilde{v}_1}{n}, u_2 = v_2 - \frac{\tilde{v}_2}{n}$. Оскільки $A_n u_1 = \tilde{v}_1, A_n u_2 = \tilde{v}_2$, то матимемо

$$\begin{aligned} (A_n u_1 - A_n u_2, u_1 - u_2) &= \\ &= \left(\tilde{v}_1 - \tilde{v}_2, v_1 - v_2 - \frac{\tilde{v}_1}{n} - v_2 + \frac{\tilde{v}_2}{n} \right) \leq \\ &\leq (\tilde{v}_1 - \tilde{v}_2, v_1 - v_2) - \frac{(\tilde{v}_1 - \tilde{v}_2, \tilde{v}_1 - \tilde{v}_2)}{n} \leq 0, \end{aligned} \quad (59)$$

тобто A_n – дисипативний оператор для будь-якого $n \in \mathbb{N}$.

Наступна викладка показує, що A_n неперервне, обмежене відображення і

$$\begin{aligned} \|A_n u_1 - A_n u_2\|^2 &\leq \\ &\leq n^2 \|v_1 - v_2\|^2 + \|\tilde{v}_1 - \tilde{v}_2\|^2 \leq n^2 \|u_1 - u_2\|^2, \end{aligned}$$

тобто задача

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} u(t) = A_n u(t), \\ u(0) = u_0, u_0 \in L_2(R^l, d^l x) \end{cases} \quad (60)$$

має єдиний розв'язок. Запишемо $u(t) = T_t^n u_0$, де T_t^n – напівгрупа стиску, отже, $\|T_h^n u_0 - u_0\| \geq \|T_{t+h}^n u_0 - T_t^n u_0\|$, звідки випливає, що

$$\begin{aligned} \|A_n u_0\| &= \left\| \lim_{h \downarrow 0} \frac{1}{h} (T_h^n u_0 - u_0) \right\| \geq \\ &\geq \left\| \lim_{h \downarrow 0} \frac{1}{h} (T_{t+h}^n u_0 - T_t^n u_0) \right\| = \|A_n T_t^n u_0\|. \end{aligned} \quad (61)$$

Зафіксуємо довільний елемент $u \in D(A)$ і доведемо рівномірну збіжність по t в кожному скінченному інтервалі.

Нехай $v \in Au, u_n = u - \frac{v}{n}, n = 1, 2, \dots$. Отже, матимемо

$$\begin{aligned} \|T_t^m u_m - T_t^n u_n\|^2 - \|u_m - u_n\|^2 &= \\ &= \int_0^t \frac{d}{ds} \|T_s^m u_m - T_s^n u_n\|^2 ds = \\ &= 2 \left(\int_0^t \frac{d}{ds} T_s^m u_m - \frac{d}{ds} T_s^n u_n, T_s^m u_m - T_s^n u_n \right) ds = \\ &= 2 \left(\int_0^t A_m T_s^m u_m - A_n T_s^n u_n, T_s^m u_m - T_s^n u_n \right) ds = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= 2 \int_0^t \left(A \left(I - \frac{1}{m} A \right)^{-1} T_s^m u_m - A \left(I - \frac{1}{n} A \right)^{-1} T_s^n u_n, \right. \\
 &\quad \left. \left(I - \frac{1}{m} A \right)^{-1} T_s^m u_m - \left(I - \frac{1}{n} A \right)^{-1} T_s^n u_n \right) ds + \\
 &+ 2 \int_0^t \left(A_m T_s^m u_m - A_n T_s^n u_n, \left(I - \left(I - \frac{1}{m} A \right)^{-1} \right) T_s^m u_m - \right. \\
 &\quad \left. - \left(I - \left(I - \frac{1}{n} A \right)^{-1} \right) T_s^n u_n \right) ds \leq \\
 &\leq 2 \int_0^t \left(A_m T_s^m u_m - A_n T_s^n u_n, \left(I - \left(I - \frac{1}{m} A \right)^{-1} \right) T_s^m u_m - \right. \\
 &\quad \left. - \left(I - \left(I - \frac{1}{n} A \right)^{-1} \right) T_s^n u_n \right) ds. \quad (62)
 \end{aligned}$$

Оскільки ж

$$\|A_m T_s^m u_m\| \leq \|A_m u_m\| = \|v\|, \quad \|A_n T_s^n u_n\| \leq \|A_n u_n\| = y$$

і

$$\begin{aligned}
 \left(I - \left(I - \frac{A}{m} \right)^{-1} \right) T_s^m u_m &= \left(I - \frac{A}{m} \right) \left(I - \frac{A}{m} \right)^{-1} T_s^m u_m - \\
 - \left(I - \frac{A}{m} \right)^{-1} T_s^m u_m &= -\frac{1}{m} A_m T_s^m u_m,
 \end{aligned}$$

то маємо

$$\begin{aligned}
 \left\| \left(I - \left(I - \frac{1}{m} A \right)^{-1} \right) T_s^m u_m \right\| &= \frac{1}{m} \|A_m T_s^m u_m\| \leq \\
 &\leq \frac{\|A_m u_m\|}{m} = \frac{\|v\|}{m}, \\
 \left\| \left(I - \left(I - \frac{1}{n} A \right)^{-1} \right) T_s^n u_n \right\| &\leq \frac{\|v\|}{n},
 \end{aligned}$$

тобто

$$\begin{aligned}
 \int_0^t \left(A_m T_s^m u_m - A_n T_s^n u_n, \left(I - \left(I - \frac{A}{m} \right)^{-1} \right) T_s^m u_m - \right. \\
 \left. - \left(I - \left(I - \frac{A}{m} \right)^{-1} \right) T_s^n u_n \right) ds \leq 2 \|v\|^2 t \frac{n+m}{nm}. \quad (63)
 \end{aligned}$$

При кожному фіксованому $t_0 > 0$ справедлива оцінка

$$\begin{aligned}
 \sup_{t \in [0, t_0]} \|T_t^m u - T_t^n u\| &\leq \sup_{t \in [0, t_0]} (\|T_t^m u - T_t^m u_m\| + \\
 &+ \|T_t^n u_n - T_t^n u\| + \|T_t^m u_m - T_t^n u_n\|) \leq \\
 &\leq \|u - u_m\| + \|u_n - u\| + \\
 &+ \sup_{t \in [0, t_0]} \sqrt{\|u_m - u_n\|^2 + 4 \frac{m+n}{nm} \|v\|^2 t} \xrightarrow{n, m \rightarrow \infty} 0. \quad (64)
 \end{aligned}$$

Внаслідок повноти $L_2(R^l, d^l x)$ $T_t^n u$ збігається рівномірно по t на будь-якому скінченному інтервалі. Оскільки $\|T_t^n u_1 - T_t^n u_2\| \leq \|u_1 - u_2\|$ і $T_t^n u_2$ прямує рівномірно по t в будь-якому інтервалі при всіх $u_2 \in D(A)$, то $T_t^n u_1$ прямує рівномірно по t в будь-якому інтервалі при всіх $u_1 \in L_2(R^l, d^l x)$.

Нехай $T_t u = \lim_{n \rightarrow \infty} T_t^n u$. Тоді наша ціль – показати, що T_t – нелінійна напівгрупа стиску, що задовольняє умову

$$\frac{d}{dt} T_t^n u \in \tilde{A} T_t^n u \text{ для майже всіх } t \in [0, t_0] \text{ і}$$

$$u_n \rightarrow u \text{ в } C_{L_2(R^l, d^l x)}[0, t_0],$$

де \tilde{A} – розширення відображення A в тому ж розумінні, що й раніше. Покажемо це.

Нехай $u \in D(A)$ і $u_n = u - \frac{1}{n} v$, $v \in Au$. Згідно з нерівністю

$$\left\| \left(I - \left(I - \frac{A}{n} \right)^{-1} \right) T_t^n u_n \right\| \leq \|v\| \frac{1}{n}$$

одержимо, що

$$\left(I - \frac{A}{n} \right)^{-1} T_t^n u_n \rightarrow T_t u \quad (65)$$

рівномірно по t в будь-якому обмеженому інтервалі.

Оскільки множина $\left\{ \left(I - \frac{A}{n} \right)^{-1} T_t^n u_n : t \in [0, t_0], n = 1, 2, \dots \right\}$ обмежена в $L_2(R^l, d^l x)$, то існує під-

послідовність $\left\{ A \left(I - \frac{A}{n_k} \right)^{-1} T_t^{n_k} u_{n_k} \right\}$ збіжна в слабкій σ -топології, отже, $\tilde{A} T_t u \in \sigma - \lim A_{n_k} T_t^{n_k} u_{n_k}$, але $A_n T_t^n u_n = \frac{d}{dt} T_t^n u_n$ прямує до $\frac{d}{dt} T_t^n u$ в топології $L_2(R^l, d^l x)$ значних нескінченно диференційованих функцій, визначених на $(0, t_0)$; позначимо цей простір $D_{L_2(R^l, d^l x)}[0, t]$.

Через σ_1 позначимо топологію $\sigma_1 \equiv \sigma(L_{L_2(R^l, d^l x)}[0, t], D_{L_2(R^l, d^l x)}[0, t])$ – слабка топологія в $L_{L_2(R^l, d^l x)}[0, t]$ відносно $D_{L_2(R^l, d^l x)}[0, t]$. Очевидно, що $\sigma_1 < \sigma$ – в топологічному розумінні, а отже, $\frac{d}{dt} T_t u \in \sigma_1 - \lim_{n \rightarrow \infty} A_{n_k} T_t^{n_k} u_{n_k} \in \tilde{A} T_t u$.

Теорема 3 доведена.

Теорема 4. Нехай T_t – нелінійна напівгрупа стиску і A_0 – щільно визначений локальний генератор. Тоді A_0 має розширення A ,

яке генерує нелінійну напівгрупу стиску T_t^* , і T і T_t^* збігаються.

Ця теорема є наслідком теорем 1, 2, 3 [1].

Висновки

Нами доведено однозначну розв'язність задачі Коші (7) [1] у випадку, коли оператор $A = -A_\lambda^2$, де A_λ^2 – оператор, породжений формою (4) [1] і побудований за еліптичним рівнянням (1) за умов (2) [1] в $L_2(R^l, d^l x)$. Суттєвим моментом у побудові нелінійної напівгрупи стиску було те, що простір $L_2(R^l, d^l x)$ є гільбертовим (використання скалярного добутку під час визначення монотонності, дисипативності операторів та доведення деяких тверджень) [2]. Слід зазначити, що аналогічні побудови можливі і для банахових просторів $L_p(R^l, d^l x)$ з відповідними змінами у визначеннях монотонності, дисипативності операторів та під час доведення необхідних тверджень.

Н.М. Кухарчук, Н.И. Яременко

КВАЗИЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА С МАТРИЦЕЙ ГИЛЬБАРГА–СЕРРИНА И НЕЛИНЕЙНЫЕ ПОЛУГРУППЫ СЖАТИЯ. ЧАСТЬ 2. ПОСТРОЕНИЕ НЕЛИНЕЙНОЙ ПОЛУГРУППЫ СЖАТИЯ

Статья посвящена исследованию связи между эллиптическими уравнениями с матрицей Гильбарга–Серрина и обобщенными параболическими задачами.

M.M. Kukharchuk, M.I. Yaremenko

THE SECOND-ORDER QUASILINEAR ELLIPTIC EQUATIONS WITH GILBARG-SERRIN MATRIX AND NONLINEAR CONTRACTION SEMIGROUPS. PART 2. CONSTRUCTION OF NONLINEAR CONTRACTION SEMIGROUPS

This paper deals with the connection between elliptic equations with Gilbarg-Serrin matrix and the generalized parabolic problems.

1. Кухарчук М.М., Яременко М.И. Про однозначну розв'язність рівняння $(\lambda - ad^2)u = f$ // Наукові вісті НТУУ "КПІ". – 2007. – № 3. – С. 150–156.
2. Komura Y. Nonlinear semi-groups in Hilbert space // J. Math. Soc. Japan. – 1967. – 19, N 4. – P.

Рекомендована Радою фізико-математичного факультету НТУУ "КПІ"

Надійшла до редакції 18 грудня 2007 року

РЕФЕРАТИ

УДК 519.85

Ітераційний метод розв'язування ігрових задач на перестановках / Ємець О.О., Устьян Н.Ю. // Наукові вісті НТУУ "КПІ". – 2008. – № 3. – С. 5–10.

В статті пропонується і обґрунтовується метод, який можна застосовувати в задачах комбінаторної оптимізації ігрового типу для знаходження оптимальної стратегії гравця, на стратегії якого накладаються комбінаторні обмеження, що визначаються перестановками.

Табл. 1. Бібліогр.: 25 назв.

УДК 62-50

Системний підхід до аналізу кредитних ризиків з використанням мереж Байєса / Кузнецова Н.В., Бідюк П.І. // Наукові вісті НТУУ "КПІ". – 2008. – № 3. – С. 11–24.

Розглянуто основні аспекти аналізу кредитних ризиків та способи їх зниження, обґрунтована доцільність використання мереж Байєса (МБ) для аналізу кредитних ризиків та оцінки ймовірності дефолту позичальників. На основі аналізу запропонована та обґрунтована методика побудови і застосування МБ для розв'язання задачі аналізу кредитоспроможності позичальника.

Лл. 2. Табл. 6. Бібліогр.: 10 назв.

УДК 004.75

Дослідження методів і розробка інтегрованих засобів доступу до інформаційних ресурсів інформаційно-комунікаційної системи / Маслякко П.П., Стокоз К.В. // Наукові вісті НТУУ "КПІ". – 2008. – № 3. – С. 25–32.

Наведено результати порівняльного аналізу існуючих технологій проектування порталів, запропоновано вдосконалити технологію проектування корпоративного порталу. Сформульовано рекомендації щодо застосування прикладного системного аналізу та компонентного процесу розробки корпоративних порталів.

Лл. 6. Табл. 1. Бібліогр.: 11 назв.

УДК 681.3

Застосування похідної Ф. Кларка у квазідиференціальних методах стохастичної оптимізації / Матусов Ю.П. // Наукові вісті НТУУ "КПІ". – 2008. – № 3. – С. 33–42.

Досліджуються деякі стохастичні методи оптимізації, побудовані на основі квазідиференціального числення з елементами оціночного прогнозування. Збіжність методів розглядається на основі збіжності випадкової квазіфейєрсовської послідовності значень цільової функції.

Лл. 5. Бібліогр.: 11 назв.

УДК 303.732.4:681.518.5

Розпізнавання позаштатної ситуації в динаміці функціонування техногенно небезпечного об'єкта / Панкратова Н.Д., Радюк А.М. // Наукові вісті НТУУ "КПІ". – 2008. – № 3. – С. 43–52.

Запропоновано підхід до розпізнавання позаштатної ситуації в динаміці функціонування техногенно небезпечного об'єкта. Підхід базується на загальних принципах та основних прийомах стратегії системного забезпечення гарантованої безпеки складних технічних систем, багатокритеріального оцінювання і прогнозування ситуацій ризику в реальних умовах неповноти, невизначеності, неточності і суперечливості вихідної інформації і за наявності порогового

обмеження часу на цикл формування і реалізацію рішень з відвернення аварійних і катастрофічних ситуацій.

Лл. 1. Табл. 1. Бібліогр.: 7 назв.

УДК. 581.52

Конкуренція ідей за умови паритету / Повещенко Г.П. // Наукові вісті НТУУ "КПІ". – 2008. – № 3. – С. 53–60.

Показано, як політична конкуренція в нашому суспільстві зводиться до конкуренції двох провідних ідей та кількох інших ідей, які узагальнені терміном "третя сила". Ця сукупність ідей становить структуру розподіленої на території системи суспільної конкуренції. Як її прояв у статті моделюється конкретна ситуація політичного паритету в суспільстві та в парламенті.

Лл. 5. Бібліогр.: 6 назв.

УДК 519.832.3

Тактика перебору чистих стратегій як теоретичне підґрунтя для дослідження ефективності різних способів реалізації оптимальних змішаних стратегій / Романюк В.В. // Наукові вісті НТУУ "КПІ". – 2008. – № 3. – С. 61–68.

Введено поняття тактики перебору чистих стратегій як теоретичного підґрунтя для дослідження ефективності різних способів реалізації оптимальних змішаних стратегій у матричній 2×2 -грі із скінченною кількістю партій гри, а також формули для знаходження нормованих усереднених по деякій кількості реалізацій середніх вигравів першого гравця за фіксоване число партій гри. Здійснено перехід до нової матричної 2×2 -гри з платіжною матрицею, елементами якої є знайдені нормовані усереднені виграві. За розв'язком даної нової гри в чистих стратегіях, якщо такий розв'язок існує, можна визначити оптимальну поведінку гравців у вихідній грі із скінченною кількістю партій гри.

Бібліогр.: 5 назв.

УДК 666.3; 666.4; 666.7

Композити на основі Ti_3SiC_2 з покращеними механічними властивостями / Коноплюк С.М. // Наукові вісті НТУУ "КПІ". – 2008. – № 3. – С. 69–75.

Досліджено композити, синтезовані на основі карбосиліциду титану Ti_3SiC_2 , за допомогою рентгеноструктурного аналізу, скануючої електронної мікроскопії і механічних тестів. Показано, що висока міцність і низька твердість композитів Ti_3SiC_2/TiC забезпечуються особливостями мікроструктури Ti_3SiC_2 -фази. Встановлено відповідність між молярним співвідношенням порошків у стартових сумішах і твердістю за Віккерсом синтезованих з них зразків.

Лл. 5. Табл. 1. Бібліогр.: 17 назв.

УДК 669.187.56.002.2

Відновлення шатуна гарячештампувального преса LZK 6500-380-960 електрошлаковим зварюванням / Скрипник С.В., Чернега Д.Ф. // Наукові вісті НТУУ "КПІ". – 2008. – № 3. – С. 76–79.

Наведено технологічну схему відновлення шатуна гарячештампувального преса LZK 6500-380-960 методом електрошлакового зварювання тріщини, яка утворилась при експлуатації преса. Показано конструкцію пристрою, призначеного для електрошлакового зварювання тріщини. Наведено параметри процесу.

Лл. 3. Табл. 1. Бібліогр.: 3 назви.

УДК 681.513

До переходу від дискретних до неперервних полюсів лінійної інваріантної в часі динамічної системи за методом Проні / Апостолюк О.С., Апостолюк В.О. // Наукові вісті НТУУ "КПІ". – 2008. – № 3. – С. 80–86.

Розглянуто лінійну інваріантну в часі динамічну систему з одним входом і одним виходом, на вхід якої подається одиничний імпульс. Процедура ідентифікації такої системи, в межах поліноміального підходу за методом Проні, удосконалюється за рахунок підвищення точності визначення дискретних полюсів системи і мінімізації похибок, пов'язаних із переходом до неперервних полюсів, що їм відповідають. Наведено приклад застосування розробленого алгоритму до ідентифікації простої динамічної системи, показано його переваги порівняно з методом Проні.

Лл. 9. Бібліогр.: 10 назв.

УДК 629.733.5

Синтез алгоритму оптимального керування рухом аеростатичного літального апарата на етапі зльоту / Гусинін В.П., Гусинін А.В. // Наукові вісті НТУУ "КПІ". – 2008. – № 3. – С. 87–95.

Запропоновано підхід до синтезу алгоритму оптимального керування рухом аеростатичного літального апарата на етапі зльоту. Синтезовано алгоритм автоматичного керування відхиленням вектора тяги аеростатичного літального апарата на етапі зльоту. Можливість та ефективність застосування синтезованого алгоритму керування відхиленням вектора тяги продемонстровано моделюванням зльоту аеростатичного літального апарата типу "Zeppelin NT".

Лл. 1. Бібліогр.: 15 назв.

УДК 621.375.826:621

Технічне забезпечення процедур лазерної терапії / Котляров В.П., Хамідреза Салаваті // Наукові вісті НТУУ "КПІ". – 2008. – № 3. – С. 96–103.

Розроблено для потреб медичних закладів з невеликими доходами прості конструкції сканерів лазерного променя з рухом вздовж спіралі, що дозволяє опромінювати ділянки тіла будь-якої форми.

Лл. 7. Табл. 1. Бібліогр.: 7 назв.

УДК 629.13.014

Поліпшений метод найшвидшого спуску / Янкевич Г.Є., Малярів С.П., Цірук В.Г. // Наукові вісті НТУУ "КПІ". – 2008. – № 3. – С. 104–110.

Пропонується поліпшений метод найшвидшого спуску, який враховує другі та змішані похідні по параметрах функціонала критерію якості, що оптимізуються. Розглядається приклад застосування цього методу для корегування масштабного коефіцієнта та зміщень нуля датчиків первинної інформації.

Лл. 1. Табл. 1. Бібліогр.: 2 назви.

УДК 577.152.3

Оптимізація складу поживного середовища для біосинтезу ферментного комплексу продуцентом р. *Streptomyces* / Григор'єва М.А., Ключко В.В., Тодосійчук Т.С. // Наукові вісті НТУУ "КПІ". – 2008. – № 3. – С. 111–118.

Досліджено вплив основних і альтернативних компонентів поживних середовищ на біосинтетичну здатність штаму-продуцента лізоензимного комплексу *Streptomyces recifensis*

var. lyticus 2435/М. На основі попередньо отриманих результатів як альтернативне джерело основного живлення використовувалось спеціально оброблене ІЧ-опромінюванням соєве борошно та як додатковий компонент – аеросил марки А-300. В результаті проведеної оптимізації визначено концентрації компонентів досліджуваних середовищ і склад ферментаційного поживного середовища для біосинтезу лізоензимного комплексу штамом *Streptomyces recifensis var. lyticus* 2435/М, що дозволяє підвищити рівень синтезу цільового продукту в середньому на 15 %. Культивування продуцента на запропонованих за результатами оптимізації поживних середовищах дозволить підвищити вихід продукту при одночасному зниженні вартості ферментаційного поживного середовища і самого процесу його підготовки.

Табл. 6. Бібліогр.: 12 назв.

УДК 504.064.4:658.567.3+544.77

Утворення ультрадисперсних феритів нікелю, міді та цинку в системі гальваноконтакту залізо–вуглець. 2. Аналіз колоїдно-хімічних механізмів утворення ультрадисперсних феритів у системі гальваноконтакту залізо–вуглець / Лавриненко О.М. // Наукові вісті НТУУ "КПІ". – 2008. – № 3. – С. 119–129.

Встановлено колоїдно-хімічні механізми реакцій утворення феритів цинку, нікелю та міді і склад компонентів дисперсійного середовища, які беруть участь у процесі феритоутворення. Визначені оптимальні умови феритоутворення в системах, які містять катіони нікелю, міді та цинку.

Лл. 5. Табл. 2. Бібліогр.: 12 назв.

УДК 661.862.547.495.2.66.094.941

Дослідження кінетики гомогенного гідролізу сульфату заліза(II) при наявності карбаміду / Мельников Б.І., Василенко І.А., Астрелін І.М. // Наукові вісті НТУУ "КПІ". – 2008. – № 3. – С. 130–134.

Отримано кінетичні характеристики сукупного гідролізу сульфату заліза з карбамідом у водному розчині. Визначено порядок реакції, константу швидкості, передекспоненціальний множник, енергію активації. Виведено рівняння залежності ступеня гідролізу сульфату заліза від часу процесу.

Лл. 5. Табл. 1. Бібліогр.: 4 назви.

УДК 517.9

Асимптотичні властивості неперервних розв'язків систем диференціально-функціональних рівнянь з лінійними перетвореннями аргументу / Денисенко Н.Л. // Наукові вісті НТУУ "КПІ". – 2008. – № 3. – С. 135–141.

Одержано нові достатні умови існування неперервно диференційованих і обмежених на \mathbb{R}^+ розв'язків систем лінійних та нелінійних диференціально-функціональних рівнянь з лінійними перетвореннями аргументу і досліджено їх асимптотичні властивості.

Бібліогр.: 6 назв.

УДК 517.9

Про розв'язність нелінійних еволюційних рівнянь II порядку з некоерцитивними W_{λ_0} -псевдомонотонними відображеннями / Задоянчук Н.В., Касьянов П.О. // Наукові вісті НТУУ "КПІ". – 2008. – № 3. – С. 142–149.

Розглядається клас еволюційних рівнянь II порядку з W_{λ_0} -псевдомонотонними відображеннями. Методом Фаєдо–Га-

льоркіна доведено розв'язність для класу еволюційних рівнянь з суттєво нелінійними некоерцитивними операторами, зокрема з операторами варіаційного числення. Одержано рівномірні апіорні оцінки в $L_q(S; V'_\sigma)$ на похідні наближених розв'язків. В порівнянні з [12, 13] одержані результати дають можливість досліджувати принципово ширші класи хвильових процесів з “нелінійним тертям”.

Бібліогр.: 16 назв.

УДК 571.986

Квазілінійні рівняння другого порядку з матрицею Гільбарга–Серріна та нелінійні напівгрупи стиску. Частина 2. Побудова нелінійної напівгрупи стиску / Кухарчук М.М., Яременко М.І. // Наукові вісті НТУУ “КПІ”. – 2008. – № 3. – С. 150–158.

Стаття присвячена дослідженню зв'язку між еліптичними рівняннями з матрицею Гільбарга–Серріна та узагальненими параболічними задачами.

Бібліогр.: 2 назви.

АВТОРИ НОМЕРА

Апостолюк Владислав Олександрович,

кандидат технічних наук, старший викладач Національного технічного університету України “Київський політехнічний інститут”.

Апостолюк Олександр Семенович,

кандидат технічних наук, доцент, доцент Національного технічного університету України “Київський політехнічний інститут”.

Астрелін Ігор Михайлович,

доктор технічних наук, професор, завідувач кафедри, декан хімічного факультету Національного технічного університету України “Київський політехнічний інститут”.

Бідюк Петро Іванович,

доктор технічних наук, професор, професор Національного технічного університету України “Київський політехнічний інститут”.

Василенко Інна Анатоліївна,

аспірантка ДВНЗ “Український хіміко-технологічний університет” (м. Дніпропетровськ).

Григор’єва Марина Анатоліївна,

аспірантка Національного технічного університету України “Київський політехнічний інститут”.

Гусинін Вячеслав Павлович,

доктор технічних наук, заступник начальника управління космічних ракетних комплексів Національного космічного агентства України.

Гусинін Андрій Вячеславович,

асистент Національного технічного університету України “Київський політехнічний інститут”.

Денисенко Наталія Леонідівна,

асистент Національного технічного університету України “Київський політехнічний інститут”.

Ємець Олег Олексійович,

доктор фізико-математичних наук, професор, завідувач кафедри Полтавського університету споживчої кооперації України.

Задоянчук Ніна Василівна,

аспірантка Київського національного університету імені Тараса Шевченка.

Касьянов Павло Олегович,

кандидат фізико-математичних наук, асистент кафедри Київського національного університету імені Тараса Шевченка.

Клочко Віталій Вікторович,

кандидат біологічних наук, молодший науковий співробітник Інституту мікробіології і вірусології НАН України ім. Д.К. Заболотного.

Коноплюк Сергій Михайлович,

кандидат фізико-математичних наук, науковий співробітник, старший науковий співробітник Інституту магнетизму НАН України.

Котляров Валерій Павлович,

доктор технічних наук, професор, професор Національного технічного університету України “Київський політехнічний інститут”.

Кузнєцова Наталія Володимирівна,

аспірантка Національного технічного університету України “Київський політехнічний інститут”.

Кухарчук Микола Макарович,

доктор фізико-математичних наук, професор, професор Національного технічного університету України “Київський політехнічний інститут”.

Лавриненко Олена Миколаївна,

кандидат хімічних наук, старший науковий співробітник Інституту біологічної хімії ім. Ф.Д. Овчаренка НАН України.

Малярів Сергій Прокопович,

генеральний директор ВАТ «НВК “Київський завод автоматики ім. Г.І. Петровського”».

Маслянюк Павло Павлович,

кандидат технічних наук, доцент, заступник декана факультету прикладної математики з наукової роботи Національного технічного університету України “Київський політехнічний інститут”.

Матусов Юрій Петрович,

старший викладач Національного технічного університету України “Київський політехнічний інститут”.

Мельников Борис Іванович,

кандидат технічних наук, професор, завідувач кафедри ДВНЗ “Український хіміко-технологічний університет” (м. Дніпропетровськ).

Панкратова Наталія Дмитрівна,

доктор технічних наук, професор, заступник директора Навчально-наукового комплексу “Інститут прикладного системного аналізу” Національного технічного університету України “Київський політехнічний інститут”.

Повещенко Геннадій Павлович,

кандидат технічних наук, старший науковий співробітник Навчально-наукового комплексу “Інститут прикладного системного аналізу” Національного технічного університету України “Київський політехнічний інститут”.

Радюк Андрій Миколайович,

аспірант Навчально-наукового комплексу “Інститут прикладного системного аналізу” Національного технічного університету України “Київський політехнічний інститут”.

Романюк Вадим Васильович,

кандидат технічних наук, доцент Хмельницького національного університету.

Скрипник Сергій Вадимович,

кандидат технічних наук, технічний директор НВФ “Титан”.

Стокос Кирило Володимирович,

магістрант Національного технічного університету України “Київський політехнічний інститут”.

Тодосійчук Тетяна Сергіївна,

кандидат технічних наук, доцент Національного технічного університету України “Київський політехнічний інститут”.

Устьян Наталія Юріївна,

здобувач Полтавського університету споживчої кооперації України.

Хамідреза Салаваті,

аспірант Національного технічного університету України “Київський політехнічний інститут”.

Цірук Віктор Григорович,

головний інженер ВАТ «НВК “Київський завод автоматики ім. Г.І. Петровського”».

Чернега Дмитро Федорович,

доктор технічних наук, член-кореспондент НАН України, професор, завідувач кафедри Національного технічного університету України “Київський політехнічний інститут”.

Янкелевич Григорій Євсійович,

кандидат технічних наук, начальник СКБ ВАТ «НВК “Київський завод автоматики ім. Г.І. Петровського”».

Яременко Микола Іванович,

студент Національного технічного університету України “Київський політехнічний інститут”.

НАУКОВІ ВІСТІ

Національного технічного університету України
"Київський політехнічний інститут"

Науково–технічний журнал

№ 3(59)

2008

Започаткований у вересні 1997 року

Редакційна колегія:

Головний редактор
М.З. Згуровський

Заступник головного
редактора
М.Ю. Льщенко

Відповідальний секретар
П.П. Маслянко

Члени редколегії –
координатори
наукових напрямків

М.І. Бобир

С.Г. Бунін

В.Ю. Горчаков

І.А. Дичка

О.В. Збруцький

І.В. Недін

Б.В. Новіков

О.М. Новіков

А.В. Праховник

Є.М. Письменний

Д.Ф. Чернега

О.Г. Юрченко

Ю.І. Якименко

Редакційна рада

Адреса редакції:
03056, Київ-56,
проспект Перемоги, 37,
Національний технічний
університет України
"Київський політехнічний
інститут",
Тел. 454-91-23

У номері:

Інформаційні технології,
системний аналіз та керування

Матеріалознавство
та машинобудування

Приладобудування та
інформаційно-вимірювальна
техніка

Проблеми біотехнології

Проблеми хімії та хімічної
технології

Теоретичні та прикладні проблеми
фізико-математичних наук

Засновник – Національний технічний університет України “Київський політехнічний інститут”
Свідоцтво про державну реєстрацію журналу – серія КВ № 2863, видане 26 вересня 1997 року

Рекомендовано Вченою Радою Національного технічного університету України
“Київський політехнічний інститут”, протокол № 7 від 25.06.08 р.

Члени редакційної ради (за галузями науки)

Фізико-математичні науки

| <i>Математика</i> | <i>Фізика</i> | <i>Механіка</i> | <i>Інформатика і кібернетика</i> |
|-------------------|----------------|-----------------|--------------------------------------|
| В.В. Булдігін | В.Г. Бар’яхтар | А.Е. Бабаєв | Ю.М. Данілін |
| Н.О. Вірченко | Ю.І. Горобець | С.О. Довгий | О.С. Макаренко |
| А.А. Дороговцев | В.М. Локтев | Я.Ф. Каюк | В.В. Остапенко |
| М.М. Кухарчук | С.І. Сидоренко | В.В. Матвеев | Н.Д. Панкратова |
| А.М. Самойленко | А.П. Шпак | Ю.М. Шевченко | В.М. Панін |

| <i>Хімічні науки</i> | <i>Біологічні науки</i> | <i>Технічні науки</i> | <i>Економічні науки</i> | |
|----------------------|-------------------------|-----------------------|-------------------------|------------------|
| О.О. Андрійко | Л.Б. Бондаренко | В.І. Губар | О.А. Павлов | О.Ф. Балацький |
| І.М. Астрелін | П.І. Гвоздяк | В.С. Коваленко | М.Г. Попович | В.Г. Герасимчук |
| А.К. Дорош | О.М. Дуган | В.І. Костюк | В.М. Прохоренко | Є.В. Крикавський |
| Ю.А. Малетін | Л.А. Лившиць | Ю.Ю. Лукач | Н.С. Равська | М.П. Панченко |
| А.А. Фокін | С.С. Малюта | Г.М. Любчик | В.О. Румбешта | Г.К. Яловий |
| | В.С. Підгорський | Є.А. Мачуський | В.І. Сенько | |
| | Ю.М. Сиволап | | В.П. Тарасенко | |
| | С.С. Ставська | | Я.К. Трохименко | |

Секретар редакції Л.Д. Калько

Редактор В.Г. Мельник

Графічний дизайн Б.В. Валуєнка
Комп’ютерна верстка О.М. Нестеренко

Підписано до друку 30.06.2008. Формат 60×84¹/8. Папір офс. Гарнітура Times.
Спосіб друку – ризографія. Ум. др. арк. 18,60. Обл.-вид. арк. 31,68. Зам. № Тираж 200 прим.

НТУУ “КПІ” ВПІ ВПК “Політехніка”. 03056, Київ, вул. Політехнічна, 14, корп. 15.
Тел./факс (044) 241-68-78

ЗМІСТ

Інформаційні технології, системний аналіз та керування

Ємець О.О., Устьян Н.Ю. Ітераційний метод розв'язування ігрових задач на перестановках 5

Кузнєцова Н.В., Бідюк П.І. Системний підхід до аналізу кредитних ризиків з використанням мереж Байєса 11

Маслянюк П.П., Стокоз К.В. Дослідження методів і розробка інтегрованих засобів доступу до інформаційних ресурсів інформаційно-комунікаційної системи 25

Матусов Ю.П. Застосування похідної Ф. Кларка у квазідиференціальних методах стохастичної оптимізації 33

Панкратова Н.Д., Радюк А.М. Розпізнавання позаштатної ситуації в динаміці функціонування техногенно небезпечного об'єкта 43

Повещенко Г.П. Конкуренція ідей за умови паритету 53

Романюк В.В. Тактика перебору чистих стратегій як теоретичне підґрунтя для дослідження ефективності різних способів реалізації оптимальних змішаних стратегій 61

Матеріалознавство та машинобудування

Коноплюк С.М. Композити на основі Ti_3SiC_2 з покращеними механічними властивостями 69

Скрипник С.В., Чернега Д.Ф. Відновлення шатуна гарячештампувального преса LZK 6500-380-960 електрошлаковим зварюванням 76

Приладобудування та інформаційно-вимірювальна техніка

Апостолюк О.С., Апостолюк В.О. До переходу від дискретних до неперервних полюсів лінійної інваріантної в часі динамічної системи за методом Проні 80

Гусинін В.П., Гусинін А.В. Синтез алгоритму оптимального керування рухом аеростатичного літального апарата на етапі зльоту 87

Котлярів В.П., Хамідреза Салаваті. Технічне забезпечення процедур лазерної терапії 96

Янкевич Г.Є., Малярів С.П., Цірук В.Г. Поліпшений метод найшвидшого спуску 104

Проблеми біотехнології

Григор'єва М.А., Клочко В.В., Тодосійчук Т.С. Оптимізація складу поживного середовища для біосинтезу ферментного комплексу продуцентом р. *Streptomyces* 111

Проблеми хімії та хімічної технології

Лавриненко О.М. Утворення ультрадисперсних феритів нікелю, міді та цинку в системі гальваноконтакту залізо–вуглець. 2. Аналіз колоїдно-хімічних механізмів утворення ультрадисперсних феритів у системі гальваноконтакту залізо–вуглець 119

Мельников Б.І., Василенко І.А., Астрелін І.М. Дослідження кінетики гомогенного гідролізу сульфату заліза(II) при наявності карбаміду 130

Теоретичні та прикладні проблеми фізико-математичних наук

Денисенко Н.Л. Асимптотичні властивості неперервних розв'язків систем диференціально-функціональних рівнянь з лінійними перетвореннями аргументу 135

Задоянчук Н.В., Касьянов П.О. Про розв'язність нелінійних еволюційних рівнянь II порядку з некоерцитивними W_{λ_0} -псевдомонотонними відображеннями 142

Кухарчук М.М., Яременко М.І. Квазілінійні рівняння другого порядку з матрицею Гільбарга–Серріна і нелінійні напівгрупи стиску. Частина 2. Побудова нелінійної напівгрупи стиску 150

Реферати 159

Автори номера 162

CONTENTS

Information technology, system analysis and guidance

Yemets O.O., Ustian N.Yu. Iteration Method for Solving Game Problems on the Arrangements..... 5

Kuznyetsova N.V., Bidyuk P.I. The System Approach to the Credit Risk Assessment Using Bayesian Networks 11

Maslyanko P.P., Stokoz K.V. Methods Research and Development of the Integrated Tools for Access to Information Resources of Information Communication System 25

Matusov Yu.P. Application of F. Clarke's Derivation in Quasi-Differential Methods of Stochastic Optimization 33

Pankratova N.D., Radjuk A.M. The Approach to Abnormal Situation Recognition in Dynamics of Man-Caused Dangerous Object Functioning 43

Poveshchenko G.P. Competition of Ideas in the Parity Conditions 53

Romanuke V.V. The Tactics of the Pure Strategies Selecting as a Theoretic Groundwork for Investigating the Efficiency of Diverse Ways of the Optimal Mixed Strategies Realization 61

Materials science and machine building

Konoplyuk S.M. Ti_3SiC_2 – Based Composites With Improved Mechanical Properties..... 69

Skrypnyk S.V., Chernega D.F. Renewal of Hot Stamping Press LZK 6500-380-960 Piston-Rod by Electroslag Welding 76

Instrument manufacturing and information measuring technology

Apostoliuk O.S., Apostoliuk V.O. To the Transition From Discrete to Continuous Poles of a Linear Time-Invariant Dynamic System Based on Prony's Method 80

Gusynin V.P., Gusynin A.V. Optimal Control Algorithm Synthesis of Aerostatic Vehicle Movement on the Take-Off Phase 87

Kotlyarov V.P., Hamidreza Salavati. Maintenance Engineering of Laser Therapy Procedures 96

Yankelevich G.Ye., Malyarov S.P., Tsiruk V.G. Improved Method of the Quickest Descent 104

Problems of biotechnologies

Grygorieva M.A., Klochko V.V., Todosiychuk T.C. Components Content Optimization of Nutrition Medium for Biosynthesis of Enzyme Complex by sp.*Streptomyces* Producer 111

Starovoitova S.O., Oryabinskaya L.B., Gorchakov V.Yu. Lactic Acid Bacteria as Biosorbents of Heavy Metals ... 108

Problems of chemistry and chemical engineering

Lavrynenko O.M. Formation of Ultradisperse Ferrites of Nickel, Copper, and Zinc in the Iron–Carbon Galvanocontact System. 2. Analysis of Colloidal-Chemical Mechanisms of Ultra-Disperse Ferrites Formation in the Iron–Carbon Galvanocontact System 119

Melnykov B.I., Vasylenko I.A., Astrelin I.M. Investigation of the Kinetics to Reactions of Joint Hydrolysis of the ferric Sulphate in Whiteness of Carbamide 130

Theoretical and applied problems of physics and mathematics

Denysenko N.L. Asymptotic Properties of Continuous Solutions for Systems of Differential-Functional Equations with Linear Argument Transformations 135

Zadoyanchuk N.V., Kasyanov P.O. On solvability for the second order nonlinear evolution equations with noncoercive W_{λ_0} -pseudomonotone maps 142

Kukharchuk M.M., Yaremenko M.I. The Second-Order Quasilinear Elliptic Equations with Gilbarg-Serrin Matrix and Nonlinear Contraction Semigroups. Part 2. Construction of Nonlinear Contraction Semigroups ... 150

Reports..... 159

Contributors to the issue..... 162