

НАУКОВІ ВІСТІ

Національного технічного університету України
"Київський політехнічний інститут"

Науково–технічний журнал

№ 6(62)

2008

Започаткований у вересні 1997 року

Редакційна колегія:

Головний редактор
М.З. Згуровський

Заступник головного
редактора
М.Ю. Ільченко

Відповідальний
секретар
П.П. Маслянко

Члени редколегії –
координатори
наукових напрямків

С.Г. Бунін,
М.І. Бобир
В.Ю. Горчаков
І.А. Дичка,
О.В. Збруцький
Б.В. Новіков
О.М. Новіков
Є.М. Письменний
А.В. Праховник
Д.Ф. Чернега
О.Г. Юрченко
Ю.І. Якименко

Редакційна рада

Адреса редакції:
03056, Київ-56,
проспект Перемоги, 37,
Національний технічний
університет України
"Київський політехнічний
інститут",
Тел. 454-91-23

У номері:

Економіка та організація
виробництва

Електроніка, радіотехніка та
засоби телекомунікацій

Інформаційні технології,
системний аналіз та керування

Матеріалознавство
та машинобудування

Приладобудування та інформа-
ційно-вимірювальна техніка

Проблеми біотехнології

Проблеми хімії та хімічної
технології

Теоретичні та прикладні
проблеми фізико-
математичних наук

Засновник – Національний технічний університет України “Київський політехнічний інститут”
Свідоцтво про державну реєстрацію журналу – серія КВ № 2863, видане 26 вересня 1997 року

Рекомендовано Вченою Радою Національного технічного університету України
“Київський політехнічний інститут”, протокол № 12 від 8.12.08 р.

Члени редакційної ради (за галузями науки)

Фізико-математичні науки

Математика	Фізика	Механіка	Інформатика і кібернетика
В.В. Булдігін	В.Г. Бар'яхтар	А.Е. Бабаєв	Ю.М. Данілін
Н.О. Вірченко	Ю.І. Горобець	С.О. Довгий	О.С. Макаренко
А.А. Дороговцев	В.М. Локтев	Я.Ф. Каюк	Н.Д. Панкратова
М.М. Кухарчук	С.І. Сидоренко	В.В. Матвеев	В.В. Остапенко
А.М. Самойленко	А.П. Шпак	Ю.М. Шевченко	В.М. Панін

Хімічні науки	Біологічні науки	Технічні науки	Економічні науки	
О.О. Андрійко	Л.Б. Бондаренко	В.І. Губар	Є.А. Мачуський	О.Ф. Балацький
І.М. Астрелін	П.І. Гвоздяк	В.С. Коваленко	О.А. Павлов	В.Г. Герасимчук
А.К. Дорош	О.М. Дуган	В.І. Костюк	М.Г. Попович	Є.В. Крикавський
Ю.А. Малетін	Л.А. Лившиць	Ю.Ю. Лукач	В.М. Прохоренко	М.П. Панченко
А.А. Фокін	С.С. Малюта	Г.М. Любчик	Н.С. Равська	Г.К. Яловий
	В.С. Підгорський		В.О. Румбешта	
	Ю.М. Сиволап		В.І. Сенько	
	С.С. Ставська		В.П. Тарасенко	

Секретар редакції Л.Д. Калько

Редактор Т.С. Мельник

Графічний дизайн Б.В. Валуєнка
Комп'ютерна верстка О.С. Фрадіна

Підписано до друку 31.12.2008. Формат 60×84¹/₈. Папір офс. Гарнітура Times.
Спосіб друку – ризографія. Ум. др. арк. 18,60. Обл.-вид. арк. 31,68. Зам. № . Наклад 200 прим.

НТУУ “КПІ” ВПІ ВПК “Політехніка”. 03056, Київ, вул. Політехнічна, 14, корп. 15.
Тел./факс (044) 241-68-78

ЗМІСТ

Економіка та організація виробництва

Дергачова В.В. Розвиток фондового ринку України як складової національної інвестиційної політики 5

Електроніка, радіотехніка та засоби телекомунікацій

Мариненко О.А. Оптичні і пасивувальні властивості нітриду кремнію 14

Інформаційні технології, системний аналіз та керування

Гриша С.М., Іотко О.А. Стратегічне планування функціональності ERP/MRP-систем із врахуванням множинних замічень 20

Ємець О.О., Ємець Ол-ра О. Побудова математичної моделі однієї комбінаторної задачі упакування прямокутників з нечіткими розмірами 25

Маслянок П.П., Майстренко О.С. Системна інженерія проектів інформатизації організаційних систем 34

Повещенко Г.П. Динамічні і часові характеристики процесу співіснування 43

Матеріалознавство та машинобудування

Кулініч А.А. Механічні властивості сплаву ВАЛ11 при різних режимах температурно-часової обробки 51

Легеза В.П. Узагальнення варіаційної задачі про брахістохрону у випадку кочення однорідного циліндра 55

Магазій П.М., Мікульюнок І.О., Ружинська Л.І. Модельні дослідження процесів переробки термопластичних матеріалів із застосуванням вторинної сировини 60

Малежик М.П. Числовий перерахунок динамічних напружень з фотопружних ортотропних моделей на натурне тіло 68

Сахаров О.С., Сівецький В.І., Сокольський О.Л. Дискретні математичні моделі для розрахунку пружно-в'язкопластичних середовищ із змінною стисливістю при термосилових навантаженнях 74

Хижняк В.Г., Курило Н.А., Летвицька І.В., Сердитов О.Т. Азототитанування сталей і твердих сплавів 83

Приладобудування та інформаційно-вимірвальна техніка

Мелашенко О.М., Рижков Л.М. Оптимізація магнітної системи стабілізації мікросупутника за змішаним H_2/H_∞ -критерієм 89

Міхеєнко Л.А., Микитенко В.І. Методи, засоби та метрологічне забезпечення калібрування еталонних випромінювачів 94

Проблеми біотехнології

Клечак І.Р., Бісько Н.А., Поєдинок Н.Л., Антоненко Л.О. Закономірності росту перспективних об'єктів біотехнології – базидіоміцетів роду *Coriolus* у поверхневій культурі 100

Проблеми хімії та хімічної технології

Астрелін І.М., Синюшкін О.М., Іванюк О.В. Лужне вилучення міді з гальванічних шламів 108

Ізотов В.Ю., Громадський Д.Г., Малетін Ю.А. Моделювання і розрахунок робочих параметрів суперконденсатора 114

Фроленкова С.В., Донченко М.І. Вплив оксоаніонів на анодну і хімічну пасивацію сталі в слабомінералізованій воді 119

Теоретичні та прикладні проблеми фізико-математичних наук

Булдигін В.В., Тимошенко О.А. Точний порядок росту розв'язків стохастичних диференціальних рівнянь 127

Вірченко Н.О., Зайкіна С.М. Узагальнені інтегральні перетворення і їх застосування 133

Капустян В.О., Когут О.П. Достатні умови стійкості відносно збурень області одного класу задач оптимального керування 138

Касьянов П.О. Періодичні розв'язки для класу диференціально-операторних включень з відображеннями типу S_k 144

Овчаренко О.В. Асимптотичні розвинення і нові застосування узагальненої гіпергеометричної функції Гаусса 149

Реферати 155

Автори номера 158

CONTENTS

Economy and organization of production

Dergachova V.V. The development of the ukrainian stock market as a part of the national investment policy 5

Electronics, radio engineering and telecommunications

Marinenko O.A. The optical and passivating properties of silicon nitride 14

Information technology, system analysis and guidance

Grysha S.M., Gnatenko N.S. The strategic planning of ERP/MRP-systems functionality with regard to plural substitutions 20

Yemets' Oleg O., Yemets' Oleksandra O. The construction of the mathematical model of the one combinatorial problem of rectangles packing with fuzzy sizes 25

Maslyanko P.P., Maystrenko O.S. The system engineering of organizational system informatization projects 34

Poveshchenko G.P. The dynamic and temporal descriptions of the coexistence process 43

Materials science and machine building

Kylinich A.A. The mechanical properties of alloy VAL-11 at various treatment modes 51

Legeza V.P. The generalization of variation problem on brahistrochrone in the case of rolling homogeneous cylinder 55

Magazjy P.M., Mikulionok I.O., Ruzhinska L.I. The modeling research of thermoplastic materials processing using secondary raw material 60

Malezhyk M.P. The numerical recalculation of dynamic stress with photoelastic ortotropic models on a natural body 68

Saharov O.S., Sivetskiy V.I., Sokolskiy O.L. The discrete mathematical models for calculation of elastic-viscid-plastic environments with variable compressibility at thermopower loadings 74

Khizhniak V.G., Kurilo N.A., Letvitska I.V., Serditov O.T. Nitrogenitining of steels and firm alloys 83

Instrument manufacturing and information measuring technology

Melaschenko O.M., Ryzhkov L.M. The optimization of microsatellite magnetic stabilizing system on the mixed H_2/H_∞ -criterion 89

Mikheenko L.A., Mykytenko V.I. The approaches, means and metrological assurance of calibration of the standard radiators 94

Problems of biotechnologies

Klechak I.R., Bisko N.A., Poyedinok N.L., Antonenko L.O. The growth mechanisms of the promising research subjects of biotechnology – basidiomycetes mushrooms of the genus *Coriolus* on agar mediums 100

Problems of chemistry and chemical engineering

Astrelin I.M., Sinyushkin O.M., Ivanyuk O.V. The alkaline extraction of copper from galvanic dross 108

Izotov V.Yu., Gromadskiy D.G., Maletin Yu.A. The modeling and calculation of performance parameters of ultracapacitor 114

Frolenkova S.V., Donchenko M.I. The influence of the oxyanions on anodic and chemical steel passivation in poorly mineralized water 119

Theoretical and applied problems of physico-mathematical sciences

Buldygin V.V., Tymoshenko O.A. The asymptotic behaviour of the solutions of stochastic differential equations 127

Virchenko N.O., Zaikina S.M. The generalized integral transformations and their application 133

Kapustyan V.O., Kogut O.P. The sufficient conditions of the shape stability for perturbation of the one class of optimal control problems 138

Kasyanov P.O. The periodic solutions for a class of differential-operator inclusions with S_k type maps 144

Ovcharenko O.V. The asymptotic expansions and new application of the generalized hypergeometric Gaussian functions 149

Reports 155

Contributors to the issue 158

ЕКОНОМІКА ТА ОРГАНІЗАЦІЯ ВИРОБНИЦТВА

УДК 336.767:330.322

В.В. Дергачова

РОЗВИТОК ФОНДОВОГО РИНКУ УКРАЇНИ ЯК СКЛАДОВОЇ НАЦІОНАЛЬНОЇ ІНВЕСТИЦІЙНОЇ ПОЛІТИКИ

Вступ

Досвід розвинутих країн свідчить про те, що вагомий вклад у розвиток національної інвестиційної політики з метою залучення до реального сектора економіки вільних грошових ресурсів інвесторів робить фондовий ринок, ефективно функціонування якого сприяє залученню, концентрації та перерозподілу інвестиційних ресурсів на користь як перспективних галузей взагалі, так і окремих підприємств. Національна економіка в умовах інтеграції в сучасне світове господарство не може бути конкурентоспроможною без розвинутого ринку цінних паперів. Україна нині проходить складний історичний період державного становлення. Розвиток ефективного і дійового фондового ринку є важливим етапом завершення трансформації національної економіки. Високий потенціал промисловості і сільськогосподарства, наявність природних ресурсів та інфраструктури є підґрунтям для перспектив становлення й розвитку вітчизняного фондового ринку, який формально існує вже понад п'ятнадцять років (з часу прийняття Закону України "Про цінні папери та фондову біржу"). Але процес інституційного становлення, набуття необхідних якісних параметрів ринку ще далеко не завершено. Все це актуалізує проблеми виведення фондового ринку України на конкурентні позиції щодо світових фінансових ринків, здійснення докорінних перетворень у технології організації та програмно-апаратному забезпеченні вітчизняних фондових бірж, а також підвищення їх конкурентоспроможності.

Наукове обґрунтування функціонування ринку цінних паперів є необхідною умовою розвитку механізмів реалізації національної інвестиційної політики. Дослідженням проблем формування, розвитку і вдосконалення ринку цінних паперів займається багато українських науковців. Напрямки їх досліджень дуже різноманітні. Це праці, присвячені проблемам становлення [1, 2] і шляхам удосконалення фондового ринку України [3, 4], особливостям [5, 6] та перспективам [7, 8] розвитку вітчизняного ринку цінних паперів.

Розглядаються також дещо вузчі проблеми фондового ринку перехідного типу: інвестиційні ризики [9], ринок акцій [10], регіональні фондові ринки [11] тощо. Втім, на сьогодні актуальними залишаються дослідження у сфері розвитку ефективно функціонуючого ринку цінних паперів як джерела фінансування технологічного оновлення та структурно-інноваційних перетворень у реальному секторі національної економіки. Важливість такого напрямку досліджень зумовлена значенням ринку цінних паперів для трансформаційної економічної системи і його роллю в забезпеченні її фінансовими ресурсами, необхідними для розвитку реального сектора економіки.

В умовах обмежених можливостей самофінансування підприємств (відсутності нагромаджень, низького рівня прибутків, знецінення амортизаційних відрахувань) проблемою подальшого динамічного розвитку національної економіки стає недостатність фінансування відтворювального процесу, заснованого на новітніх досягненнях технологічного прогресу. В економічній ситуації, що склалася в Україні, розвиток ринку цінних паперів, за допомогою якого можуть бути забезпечені умови для залучення інвестицій на підприємства, має розглядатись як один із реальних способів подолання інвестиційного спаду та направлення значних фінансових ресурсів у промисловість. Інакше кажучи, фондовий ринок як механізм переміщення коштів від інвесторів до емітентів сприятиме ринковому перерозподілу капіталів і направленню їх до сфер найефективнішого використання.

З огляду на все це, першими заходами щодо розвитку фондового ринку України має бути підвищення якості ресурсної бази підприємств-емітентів, що позначиться на рівні їх потенціальної ринкової капіталізації на національних і міжнародних фондових майданчиках. Для цього необхідно подолати депресію ресурсної бази національної економіки послідовним реформуванням її балансової системи [12], що забезпечить підвищення інтересу потенціальних інвесторів до вітчизняного фондового ринку і посилить його конкурентоспроможні позиції на міжнародних фондових ринках. Чому саме балансової системи? Тому що якраз система фінансових балансів має індикатори стану вітчизняної ресурсної бази (основних фондів), який у розвинутих країнах є ключовим показником національного розвитку. Основні положення і напрямки такого реформування було запропоновано автором у дисертаційній роботі.

Постановка задачі

Мета даної статті полягає у визначенні альтернативних джерел фінансування відтворювального процесу в реальному секторі національної економіки в умовах знецінення амортизаційних відрахувань і недостатнього їх нагромадження в межах національної інвестиційної політики шляхом розвитку фондового ринку України, а також підвищення його конкурентоспроможності в міжнародній кредитно-фінансовій системі.

Економічні і історичні передумови знецінення ресурсної бази національної економіки

У національній економіці знецінення фінансових балансів товарного виробництва виражається у скороченні оборотних засобів, дефіциті власних інвестиційних ресурсів, моральному і технічному старінню основних фондів та втраті конкурентних позицій багатьох галузей вітчизняного господарства. Знецінення ресурсної бази може тривалий час відбуватися на фоні позитивної динаміки основних показників економічного розвитку (зростання валового продукту, стабільності національної валюти і відсутності дефіциту бюджету), про що свідчать показники міжнародних порівнянь [13].

В економічній і фінансовій літературі головні показники розвитку національної економіки пов'язуються з індикаторами Систем національних рахунків (СНР), в основі яких лежить стандартизована система, схвалена Статистичною комісією ООН. Поява першої стандартизованої СНР ООН у 1968 р. не випадкова. Це були часи, коли інтереси трансграничного капіталу, зорієнтовані на реалізацію принципів вільної торгівлі, стикалися з реаліями захисту національних інтересів з боку провідних країн світу. Тому в 1950 р. США, переживаючи ревальвацію долара до його дійсного паритету під впливом післявоєнного відновлення економік і валютних систем Німеччини, Японії та інших країн, твердо відмовилися від умов ГАТТ, сформованих на переговорах у Женеві в 1947 р. У 1971 р. президент США Р. Ніксон прийняв безпрецедентну програму підтримання долара і скасував його розмір на золото. Це означало, що США стали на шлях емісії та стимулювання власного експорту без будь-яких гарантій щодо забезпечення долара в міжнародних кредитах. Після цього в 1973 і 1978 рр. вибухнули світові нафтові кризи, наслідком чого стали гігантські обсяги трансграничного капіталу (не по-

в'язаного з національною територією), здатні викликати валютні, фондові та цінові деформації світового ринку, а також нагромаджувати прибутки в одній країні, а збитки – в іншій.

Саме в цей складний період відбувається розпад колоніальної системи світу – провідні країни-виробники втрачають як дешеві ринки сировини, так і величезні ринки збуту. Трансграничний капітал (так звані “нафтодолари”), що виріс у геометричній прогресії, шукає сприятливі умови для свого подальшого зростання, для чого йому потрібні були орієнтири для вливання в ту чи іншу економіку. Створення міжнародних правил обліку і звітності спрямовуються на збереження цих орієнтирів. Контроль за динамікою ВВП у Системах національних рахунків слаборозвинутих країн (колишніх колоній) дає орієнтири розвинутих країнам (колишнім метрополіям) для розміщення надлишкового трансграничного капіталу. Контроль же за станом фінансових балансів – справжнього сховища ресурсів і капіталу національних економік – міжнародними правилами обліку та звітності не передбачається, що позбавляє слаборозвинуті країни можливості об'єктивно оцінювати свої активи і власні позиції в процесах глобалізації світового розвитку. В таких умовах Франція, Великобританія, США та ряд інших країн зберігають власні СНР, зорієнтовані на індикатори саме фінансових балансів [14]. На жаль, радянська економічна наука залишила такий історичний поворот без уваги. У той період економіка СРСР працювала в закритому режимі і була зорієнтована тільки на марксистську теорію додаткової вартості. Так у сучасній СНР склалися подвійні стандарти: у розвинутих країнах національним багатством вважається наявність активів економіки, а в Україні та на всьому пострадянському просторі національне багатство асоціюється з експлуатацією активів і пов'язується тільки з валовим внутрішнім продуктом. Тому головні орієнтири економічного розвитку цих держав націлено на збільшення ВВП.

За своїм економічним змістом ВВП пов'язаний з обліком активів вітчизняних підприємств, які під впливом інфляції перебувають у депресії (тобто знецінені). Але міжнародний стандарт СНР не має відповідних індикаторів або коригуючих коефіцієнтів щодо стану національних активів. Депресія активів видається за дефіцит грошей в економіці, що створює широкі можливості для відкритої та прихованої емісії грошей.

В економіці активів, притаманній розвинутих країнам сучасного світу, головні орієнтири національного розвитку, крім ВВП, націлені на підвищення вартості і якості національних активів, для характеристики стану яких вітчизняна статистика надає досить широкий набір фінансових індикаторів. Для компенсації інфляційних наслідків депресії активів вживаються заходи щодо вибіркової емісії активів економіки: через амортизаційну політику та гнучку систему переоцінки. Активні заходи щодо відновлення вартості і якості національних активів можна відзначити в діяльності Франкліна Делано Рузвельта у США, Людвіга Ерхарда в Німеччині та Шарля де Голля у Франції. Такі заходи посідають важливе місце в сучасній політиці США, країн ЄС і багатьох інших провідних економіках світу.

Так, неадекватність валової економіки потребам міжнародної конкурентоспроможності стала однією з базових причин розпаду СРСР і всієї соціалістичної системи. Національна економіка Радянського Союзу мала закритий характер і була націлена на валові орієнтири зростання продуктивності праці та прибутку. Титули власності на активи економіки із загального обороту вилучались, оскільки власник був один – держава. Ціни товаровиробників теж регулювалися державою. Все це нібито слугувало підвищенню міжнародної конкурентоспроможності країни, оскільки захищало баланси економіки від негативних курсових, інфляційних та інших впливів іззовні. Але штучна природа економічного середовища СРСР, у свою чергу, створювала і штучний характер її міжнародної економічної безпеки та стабільності – радянська національна балансова система відчувала депресію національних активів. Однією з важливих причин цього стала податкова ідеологія економічної діяльності, орієнтована, як і сучасна, на валові результати. Підприємства віддавали в доход бюджету майже весь прибуток (за винятком невеликих фондів виробничого і соціального розвитку, а також матеріального заохочення). При цьому держава під свої бюджетні потреби створювала, знову ж таки, штучний обсяг прибутку, всіляко занижуючи норми витрат на реновацію основного капіталу. Дефіцит інвестиційних процесів і, як наслідок, амортизаційних активів при інтенсивному технологічному змаганні з розвинутими країнами (в космічній галузі, гонці озброєнь) весь час зростав, що тримало національну економіку в стані постійного недоінвестування. Централізовані капітальні вкладення частково компенсували дефіцити відтворення ресурсної бази економіки, але

їх було недостатньо. Національна балансова система відреагувала на це латентною схованою інфляцією, коли плани підвищення продуктивності праці виконувалися масовим переходом до випуску дедалі більш ресурсомістких і дорогих виробів. За відсутності офіційної інфляції вимивалася номенклатура дешевих товарів. На руках у населення накопичувалися доходи, не забезпечені товарною масою. Національна валюта реально знецінювалась. У такий спосіб відбулася деградація фінансових балансів національної економіки, що, в свою чергу, спричинилося до депресії її активів. Таким чином, маючи один із досить високих показників темпів зростання ВВП у світі, ми прийшли до сумних наслідків, коли балансова вартість багатьох великих українських компаній стала меншою від їх річного прибутку.

Проблема знецінення системи фінансових балансів набула вже хронічного характеру і не має простого вирішення через механічний перерахунок їх вартості на підвищення за допомогою використання цільової індексації чи офіційного індексу-дефлятора. В умовах нестабільності економіки і ревальвації курсу національної валюти цей індекс штучно занижується, що зумовлено дешевим споживчим імпортом, зниженням ефективності експорту та залежністю від світового ринку енергоносіїв. А енергія (у будь-якому прояві: електроенергії, нафти, газу, бензину, вугілля) – це універсальний товар, наявність якого в будь-якому іншому товарі або послуді є обов'язковою. Цей факт разом з критичною залежністю від імпортних поставок енергоресурсів, надмірною енергомісткістю вітчизняного виробництва і загальною світовою тенденцією до зростання цін на первинні види палива стає причиною штучного заниження індексу реальної інфляції.

Таким чином, реальна вартість активів національної економіки знижується через підвищення вартості ресурсів, які необхідно купувати за ринковими поточними цінами для здійснення виробничого циклу. А в межах чинного законодавства прийнятий порядок індексації вартості активів національної економіки та існуючої схеми їх амортизації не дають можливості проводити не тільки розширене, але й просте відтворення.

Своєчасні заходи щодо відтворення активів – передумова для відновлення ресурсної бази національної економіки та зміцнення економічної безпеки держави і на цій основі – підвищення довіри інвесторів, що є основними факторами забезпечення та утримання конкурентних позицій країни на міжнародних фондових ринках.

Інвестиційний потенціал амортизації як економічного ресурсу розвитку фондового ринку України

Стан основних фондів як економічного ресурсу розвитку фондового ринку України має надзвичайно високу залежність від національної амортизаційної політики. Про значення інвестицій в активи реального сектору економіки в межах національної інвестиційної політики країни в умовах нерозвинутого вітчизняного фондового ринку свідчить те, що найбільший приріст продукції в період становлення незалежної економіки України одержали виробництва, які інвестували в основний капітал більше за інших: підприємства зв'язку, паливно-енергетичного та металургійного комплексів. Для порівняння – середньорічні капіталовкладення в економіку протягом 1995–2003 рр. здійснювалися на рівні 24% від обсягів 1990 р. у промисловість у цілому – 27%, тоді як розвиток зазначених галузей (підприємства зв'язку, паливно-енергетичного і металургійного комплексів) забезпечувався капіталовкладеннями, що порівняно з 1990 р. становили 79, 44 і 48%, відповідно [15, с. 659–668].

Обсяги іноземних інвестицій останнім часом зросли: станом на 1 березня 2007 р. вони становили суму в 211,89 млрд дол. (для порівняння – інвестиції в економіку Росії тільки в 2007 р. дорівнювали 52 млрд дол.). Обсяги інвестицій в основний капітал на кінець 2006 р. становили 125,2 млрд грн. Однак деяке поживлення інвестиційної діяльності, що спостерігається нині в українській економіці, ще не можна вважати за надійну базу для забезпечення стабільного фінансування розвитку й оновлення, оскільки, по-перше, воно йде від безпрецедентно низької бази, що стало результатом занепаду інвестиційної діяльності в роки ринкових перетворень в економіці України, по-друге, це поживлення поки що є тенденцією, яка не перетворилася в закономірність такого розвитку процесу інвестування, а по-третє, не ліквідовано фундаментальні недоліки національної економіки, серед яких зношеність виробничого апарату реального сектору економіки, що є найтяжчим та найвагомим проявом передкризового стану економіки.

Відомо, що сучасна економіка перевантажена морально і фізично застарілою технікою та будівлями, що негативно відображається на технічному і структурному стані наявних фондових нагромаджень і є наслідком ще радянської інвестиційної політики, яка протягом багатьох десятиріч знижувала ефективність нагромадження основного капіталу і продукувала регресивні тенденції в економіці в цілому. За останні 25 років,

що передували встановленню державності в Україні, середньорічні капіталовкладення номінально зросли в 3,6 раза, балансова оцінка засобів праці збільшилася в чотири рази, а її динаміка – у п'ять разів, тоді як фондвіддача в цей час знизилася наполовину, а ще 25% капіталовкладень втрачалося у зв'язку із збільшенням строків капітального будівництва та прихованою інфляцією [15, с. 659–668].

Таким чином, найбільш відчутними негативними передумовами для сучасного етапу трансформації вітчизняної економіки були наслідки “радянської моделі” капіталоутворення, тобто послідовне і тривале згортання амортизаційних процесів, уповільнення обсягів введення нових та ліквідації спрацьованих основних фондів, постійне перевищення нормативних строків їх служби і збільшення фізичного та морального зносу.

Сучасна модель амортизаційної політики тільки сповільнює технічне оновлення матеріальної бази економіки. Так, протягом 1997–2003 рр. середня норма амортизації основних фондів, обумовлена вітчизняним законодавством, у перерахунку на лінійну становила 13%, що передбачало списання авансованої вартості протягом 7,7 року. Коефіцієнт введення основних фондів скоротився з 9,8 до 4,3%, а коефіцієнт ліквідації застарілих – знизився з 2,5 до 1,5%; середній строк експлуатації основних фондів підвищився з 37 до 43 років, рівень їх фізичного і морального зносу досяг критичного рівня [15, с. 659–668]. За останні чотири роки в правовому полі в цьому сегменті економічної політики не було позитивних зрушень, тому на сьогодні стан ресурсної бази національної економіки має такі самі тенденції розвитку, що підтримується і закріплюється політичною кризою у владі.

Таким чином, діюча амортизаційна практика протидіє цілям національної інвестиційної політики і її продовження матиме негативні наслідки для розвитку національного фондового ринку в подальшій перспективі. Мало того, що амортизаційних ресурсів катастрофічно не вистачає, вони ще й знеособлені при поверненні на підприємства у вигляді виторгу від реалізації, і тому часто відволікаються на оборотні потреби у зв'язку із зростаючими дефіцитами коштів, тобто для цілей розширеного відтворення, відновлення і модернізації устаткування на підприємствах реального сектору національної економіки утворюється постійно зростаючий дефіцит коштів. До того ж, бюджет нашої країни протягом всього часу реформ приховано запозичує кошти з активів економіки для створен-

ня штучного рівня рентабельності за допомогою облікової політики відносно основного капіталу і його амортизації. Саме цим викликаний хронічний інвестиційний голод у більшості галузей національної економіки, неконкурентоспроможність вітчизняних товаровиробників і все більше згортання національних позицій на ринку високих технологій.

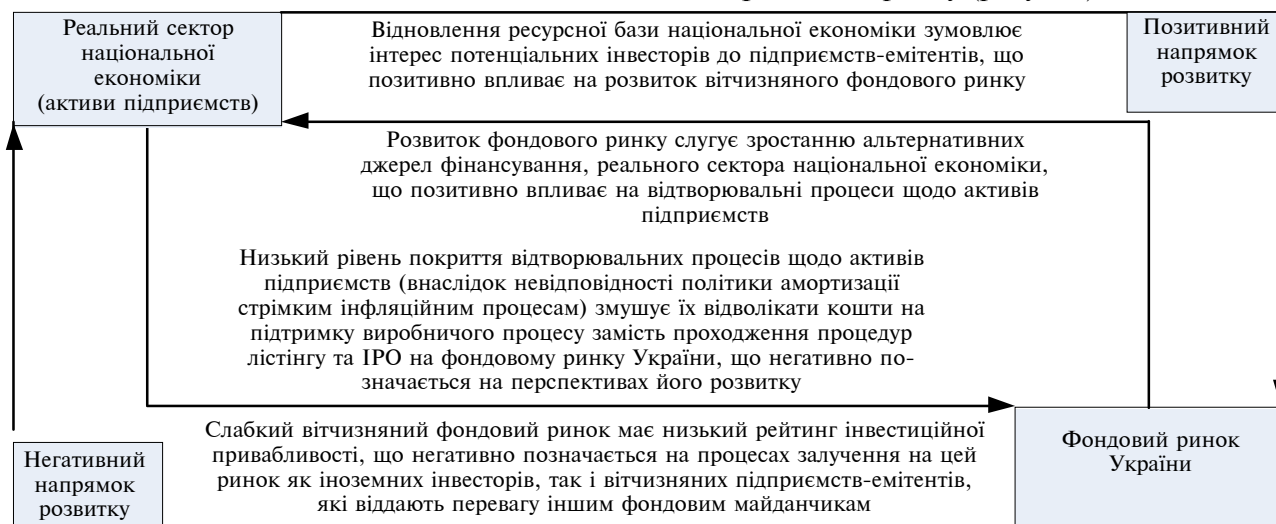
Нині конкурентоспроможність розвинених країн ґрунтується насамперед на конкуренції їх активів. Стан і якість ресурсної бази економіки є основою високих темпів їх розвитку. Знецінення фінансових балансів економіки під впливом інфляції компенсується в розвинених країнах регулярним перерахунком вартості активів, але вся різниця криється в його методології, тобто переоцінка національних активів має іншу ідеологію, що переносить акценти в реновації активів із трудових ресурсів на матеріальні і нематеріальні виробничі активи як основу ефективно зайнятості населення. Важливим інструментом тут є амортизаційна політика, яка має розвинуте законодавство і поширюється на всі види активів: основний і фінансовий капітал, інтелектуальні ресурси, венчурний капітал тощо. Тому відповідність амортизаційних нормативів реальним умовам відтворення (при певному ефекті випередження) є важливим елементом державної амортизаційної політики, що врівноважує об'єктивні інвестиційні потреби економіки з можливостями розвитку фондового ринку.

Таким чином, на сучасному етапі розвитку національної економіки пріоритетною задачею для розвитку вітчизняного фондового ринку має стати не тільки стимулювання національної інвестиційної політики, але й налагодження механізму відшкодування та відновлення активів економіки. Значущість амортизаційної політики як фактора національної інвестиційної політи-

ки треба розглядати за двома основними параметрами: у кількісному аспекті – як найбільш масштабне джерело фінансування основних фондів, а також в якісному – як напрямок розвитку фондового ринку України та оновлення його елементів, один з вагомих важелів економічного впливу держави на фінансовий стан суб'єктів господарювання, інвестиційний розвиток та ефективність національної економіки в цілому. Отже, амортизаційна складова інвестиційної політики поки ще не вичерпала свого потенціалу і підлягає системному реформуванню.

Проблеми і перспективи розвитку фондового ринку України як складової національної інвестиційної політики

В умовах невідповідності діючої політики амортизації стрімким інфляційним процесам низький рівень покриття відтворювальних процесів у реальному секторі національної економіки змушує підприємства відволікати кошти на підтримку виробничого процесу замість проходження процедур лістингу та IPO на фондовому ринку України (оскільки це досить затратна процедура). До того ж, такі підприємства навіть якби і розмістили свої акції на ринку цінних паперів, то внаслідок відсутності до них інтересу з боку потенціальних інвесторів були б змушені пройти процедуру делістингу, що негативно позначилося б на їх репутації. Розвиток же вітчизняного фондового ринку сприяє зростанню додаткових джерел фінансування реального сектора національної економіки, що позитивно впливає на відтворювальні процеси в цьому секторі, а це, в свою чергу, викликає інтерес потенціальних інвесторів до підприємств-емітентів і позитивно впливає на розвиток вітчизняного фондового ринку (рисунк).



Взаємозалежність стану фондового ринку і реального сектора національної економіки

Отже, сталий, стабільно функціонуючий ринок цінних паперів є одним із чинників, який може поліпшити інвестиційний клімат у країні, сприятиме залученню й перерозподілу інвестиційного капіталу в найперспективніші сфери економіки. Фондовий ринок є важливим елементом мобілізації національних заощаджень і трансформації їх в інвестиційні ресурси.

Тим часом, успішне функціонування фондового ринку передбачає наявність цілого ряду передумов – таких, як свобода переміщення капіталу, забезпечення ліквідності цінних паперів, наявність розвинутої інфраструктури фондового ринку, чітка специфікація прав власності, інформаційна прозорість ринку, макроекономічна стабільність, високий рівень довіри до держави та її інституцій, а також між суб'єктами господарювання. Наявність цих передумов сформувала б привабливий і сприятливий інвестиційний клімат, який, в свою чергу, забезпечив би надходження в економіку додаткових фінансових ресурсів.

На жаль, сьогоднішній стан вітчизняного фондового ринку не відповідає тій ролі, яку має відігравати у створенні сприятливого інвестиційного клімату, хоч деяке поживавлення торгів у Першій фондовій торговельній системі (ПФТС), на якій зосереджено понад 90% операцій з цінними паперами в цілому спостерігалось (до іпотечної кризи на світовому фінансовому ринку). Протягом 2000–2007 рр. обсяг ринку акцій в Україні зріс від одного з найменших – 10% ВВП – до майже 35% ВВП, що є порівнянним з розміра-

ми ринків акцій Чехії, Польщі та Румунії [4]. Наприкінці 2006 р. (для порівняння береться період до фінансової кризи в США, яка вплинула на стан торгів на фондових майданчиках усієї Європи) капіталізація ринку акцій в Україні становила 222,84 млрд грн (у 2007 р. – 564,65 млрд грн), тоді як загальний обсяг торгів акціями – 6,1 млрд грн, що майже удвічі перевищує відповідно показник 2005 р. (таблиця). Зареєстрований обсяг торгів облигаціями становив 21,3 млрд грн, що також майже удвічі перевищує показник 2005 р., з них корпоративними – 12,3 млрд грн, державними – 8,0 млрд грн, муніципальними – 1,0 млрд грн. За 2006 р. порівняно з 2005 р. обсяг торгів у ПФТС подвоївся і досяг 27,6 млрд грн (у 2007 р. – 31,49 млрд грн).

Тим часом, зростання обсягу торгів у ПФТС не відтворює реального зростання фондового ринку. Наведені показники стосуються виключно організованого ринку цінних паперів, представленого в Україні переважно ПФТС. Але тут, за оцінками експертів, понад 90% обсягу угод з цінними паперами виконуються поза межами організованого ринку [4]. Так, у 2003 р. частка організованого ринку становила лише близько 3%, у 2004 р. – 4,1%, у 2005 р. – до 5% [16], що зумовлено поточними нормами регулювання вітчизняного фондового ринку цінних паперів, згідно з якими учасники ринку не зобов'язані фіксувати інформацію про такі угоди на організованому ринку. Тому фактичний обсяг торгів цінними паперами може перевищувати зафіксований на організованому ринку в кілька разів, що

Таблиця. Динаміка обсягу і якості торгів у ПФТС за 2000–2007 рр.*

Показник	Рік							
	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007
Загальний обсяг торгів на фондовому ринку України, млн грн	Нема даних	Нема даних	108610	202960	321300	403800	492800	Нема даних
Загальний обсяг торгів на організованому ринку, млн грн	2820	9241	6536	3533	9400	16400	29100	Нема даних
Загальний обсяг торгів у ПФТС, млн грн	1463	6285	6272	3216	7000	14490	27630	31490
Частка ПФТС в організованому ринку, %		68,01	95,97	91,03	74,7	88,2	96,3	Нема даних
Відношення обсягу торгів фондового ринку до ВВП, %	21,40	29,01	45,20	76,02	90,63	96,50	69,12	Нема даних
Капіталізація, млрд грн	12,02	8,062	23,280	25,616	71,078	147,09	222,84	564,65

* Джерело інформації: <http://www.pfts.com/uk>

підтверджується випереджаючими темпами зростання загального обсягу торгів на ринку цінних паперів порівняно з обсягом торгів за допомогою організаторів ринку. Такій ситуації сприяла недостатня глибина приватизації великих підприємств, яка спричинила низьку активність на українських ринках цінних паперів стратегічних покупців, наслідками чого, в свою чергу, стали дефіцит ліквідних цінних паперів і “тінізація” організованого ринку. Новий імпульс для розвитку фондового ринку України могли б дати вторинні емісії підприємств-емітентів, але через їх незначний обсяг, зумовлений знеціненням ресурсної бази вітчизняних підприємств, збільшення їх обігу на ринку не відбувається.

Наступним фактором, який може сприяти розвитку вітчизняного фондового ринку, є організатори торгівлі, діяльність яких підвищує інвестиційну привабливість емітента за рахунок забезпечення ліквідності та прозорості ринку цінних паперів. Існування в нашій державі кількох фондових бірж, кожна з яких діє автономно і проводить угоди з цінними паперами за власними правилами, вносить диспропорції в єдиний простір біржової діяльності. Тому в Україні, на думку багатьох вітчизняних науковців [4, 7, 16], доцільно мати єдину біржову фондову систему, оскільки капіталізація ринку цінних паперів є ще незначною, а концентрація попиту і пропозиції в одній системі дасть змогу підвищувати ліквідність ринку і його інформативну відкритість. До того ж, за такої системи можливим стає використання в біржовій торгівлі єдиного клірингового та депозитарного центру.

На сьогодні в Україні роль центрального депозитарію виконують три структури: Національний депозитарій України, Міжрегіональний фондовий союз (для корпоративних цінних паперів) і Національний банк України (для державних цінних паперів), що не відповідає вимогам інвесторів і аналогічним системам розвинутих країн (де забезпечується обслуговування 95% організованого ринку центральними депозитаріями) [16]. Водночас існуюча національна депозитарна система не відповідає вимогам сучасного міжнародного ринку капіталу – вона технологічно відстає від вітчизняної платіжної системи і гальмує обіг фінансових інструментів.

Таким чином, незважаючи на нещодавні позитивні тенденції на фондовому ринку України (зростання обсягу торгів і відношення капіталізації до ВВП), фондовий ринок залишається

одним із найслабших елементів вітчизняної фінансової системи, що, в свою чергу, зумовлено інертністю розвитку та різноспрямованістю завдань, які він вирішує. На попередніх етапах становлення фондового ринку України організований фондовий ринок виконував вузькі і специфічні функції – був одним із технічних засобів під час приватизації державних підприємств. Завдяки цьому в Україні виник первинний ринок, щоправда, зі специфічними характеристиками – він використовувався лише в приватизаційних процесах, тоді як первинне розміщення акцій там практично не відбувалося. Такий фондовий ринок не забезпечував підприємства реальними інвестиційними ресурсами. За сучасних умов функція перерозподілу прав власності поступово вичерпує своє початкове значення. Тому на сучасному етапі перед фондовим ринком необхідно поставити нові завдання, зорієнтовані на вирішення проблеми забезпечення економіки інвестиційними ресурсами, які мають переваги над іншими видами інвестування:

- *переваги внутрішнього інвестування*: на відміну від акумулювання і перерозподілу коштів через банківську систему фондовий ринок повинен орієнтуватися на перерозподіл довгострокових і відносно дешевих фінансових ресурсів, що має зробити його альтернативним і більш конкурентоспроможним джерелом фінансування національної економіки;

- *переваги іноземного інвестування*: залучення іноземних інвестицій саме через фондовий ринок вбачається найпривабливішою формою іноземного інвестування, оскільки правила функціонування фондового ринку забезпечують мобільність руху капіталів і ліквідність вкладів. За наявних нестабільних умов функціонування економіки України ліквідність вкладів можна вважати одним із вирішальних чинників, які зможуть вплинути на поліпшення інвестиційної діяльності.

Отже, ліквідний і прозорий фондовий ринок має забезпечити реалізацію національних інтересів України, сприяти підвищенню конкурентоспроможності національної економіки через: акумулювання і перерозподіл інвестиційних ресурсів між різними галузями та підприємствами, які потребують додаткового фінансування для свого подальшого розвитку; формування коректної ринкової вартості підприємств; утворення ін-

формаційних індикаторів для інвесторів, індикації загального стану економіки для всіх суб'єктів господарювання; залучення коштів для покриття дефіциту державного і місцевих бюджетів; фінансування державних та місцевих програм розвитку.

Висновки

Протидія сучасної амортизаційної політики (у межах чинного законодавства) цілям національної інвестиційної політики негативно впливає на розвиток вітчизняного фондового ринку і породжує хронічний інвестиційний голод у більшості галузей національної економіки. Причини занепаду її ресурсної бази криються ще в історичній спадщині – в соціалістичній системі господарювання, що мала бюджетні пріоритети, для реалізації яких вона стимулювала підвищення оподаткованого прибутку за рахунок скорочення частки амортизаційних відрахувань у витратах.

Недостатня увага до відновлення ресурсної бази національної економіки, в свою чергу, спричиняє дефіцит уваги інвесторів до підприємств її реального сектора. Розвиток фондового ринку України дасть можливість диверсифікувати і стабілізувати джерела фінансування підприємств-емітентів через мобілізацію тимчасово вільних коштів населення, а також іноземних і вітчизняних суб'єктів господарської діяльності з метою подальшого перерозподілу цих коштів у ті сектори економіки, які потребують додаткового фінансування для свого подальшого розвитку.

Але істотне превалювання неорганізованого фондового ринку над організованим, мала кількість цінних паперів, якими торгують біржі, обмежена кількість інструментів фондового ринку, низькі темпи приведення нормативної бази у відповідність до вимог міжнародних стандартів, низька зацікавленість стратегічних іноземних інвесторів у вітчизняному фондовому ринку, слабкість внутрішніх інституційних інвесторів (пайові інвестиційні фонди, недержавні пенсійні фонди та страхові компанії) і низька активність фізичних осіб на ринку цінних паперів негативно позначаються на прозорості вітчизняного фондового ринку безпосередньо та інвестиційному кліматі в країні взагалі. З огляду на це, важливим є подальший розвиток фондового ринку України в межах національної інвестиційної політики, який залежить від конкретних заходів

держави щодо розбудови національної фінансової системи. Необхідність втручання держави в даний сектор економіки зумовлена тим, що саморегуляція ринкових відносин у фінансовій сфері України не можлива у зв'язку з їх незрілістю (що притаманна нещодавно утвореним ринкам). Тому темпи розвитку вітчизняного фондового ринку та розкриття його інвестиційного потенціалу залежать від конкретних *заходів державної політики у фінансовій сфері*, які доцільно зосередити на таких напрямках:

- налагодження тісного співробітництва національної економіки з глобальною в рамках міжнародних організацій з метою створення позитивного іміджу фондового ринку України серед іноземних і вітчизняних інвесторів;

- узгодження вітчизняного законодавства з міжнародними нормами і сучасними вимогами розвитку фінансових відносин; підвищення вимог до корпоративного управління; чітке визначення прав і обов'язків емітентів та інвесторів;

- створення єдиного клірингового і депозитарного центру на принципах незалежності, прозорості, некомерційного характеру діяльності, державної підтримки; запровадження доступних та рівних умов і тарифів для всіх користувачів; мінімізація витрат;

- удосконалення механізму продажу акцій підприємств, які перебувають у державній власності, з метою справедливої оцінки реальної ринкової вартості підприємства та створення умов для зростання його капіталізації;

- врівноваження амортизаційних нормативів із реальними умовами відтворення (при певному ефекті випередження) через параметри відтворення і відшкодування основного капіталу, що виведе з існуючого конфлікту об'єктивні інвестиційні потреби національної економіки та можливості розвитку вітчизняного фондового ринку;

- формування механізму активного залучення широких верств населення до участі в діяльності ринку цінних паперів через становлення на ньому рейтингової інфраструктури.

Для іноземних інвесторів Україна – це хороша можливість диверсифікації вкладів. Із здійсненням окреслених у статті заходів державної політики у фінансовій сфері та стабілізації економічних і політичних процесів наша держава здобуватиме дедалі більшу довіру і привабливість у міжнародному середовищі.

В.В. Дергачева

РАЗВИТИЕ ФОНДОВОГО РЫНКА УКРАИНЫ КАК СОСТАВЛЯЮЩЕЙ НАЦИОНАЛЬНОЙ ИНВЕСТИЦИОННОЙ ПОЛИТИКИ

Рассмотрены альтернативные источники финансирования воспроизводственных процессов в реальном секторе национальной экономики, выявлены экономические и исторические предпосылки обесценивания ресурсной базы национальной экономики, исследовано состояние государственной амортизационной политики как экономического ресурса развития фондового рынка Украины, рассмотрены проблемы и перспективы развития рынка ценных бумаг как составляющей национальной инвестиционной политики.

V.V. Dergachova

THE DEVELOPMENT OF THE UKRAINIAN STOCK MARKET AS A PART OF THE NATIONAL INVESTMENT POLICY

The paper considers the alternative sources of reproducible processes financing in the real sector of the national economy. Moreover, this paper reveals the economic and historical pre-conditions of devaluation of the national economy's resource base, studies the current state of the Ukrainian depreciation policy as an economic resource for the Ukrainian stock market development and addresses the problems and future trends of the stock market development as a part of the national investment policy.

1. Федоренко В. Інвестиції та економіка України // Економіка України. – 2007. – № 5. – С. 12–16.
2. Терещенко Г.М. Проблеми становлення та напрями удосконалення функціонування ринку цінних паперів в Україні // Фінанси України. – 2007. – № 6. – С. 97–104.
3. Карпенко Г.В. Досвід розвитку фондового ринку країн Європи та його використання в Україні // Там же. – С. 90–95.
4. Поворозник В.О. Фондовий ринок України на сучасному етапі: проблеми та шляхи їх вирішення // Стратегічні пріоритети. – 2007. – № 1(2). – С. 127–132.
5. Міньков В.І. Деякі особливості розвитку фондового ринку України // Фінанси України. – 2005. – № 12. – С. 104–111.
6. Яценюк А. Фондовий ринок України: проблеми та перспективи розвитку // Вісн. Нац. банку України. – 2004. – № 11. – С. 4–9.
7. Ватаманюк З.Г., Баула О.В. Перспективи розвитку ринку цінних паперів в Україні // Фінанси України. – 2007. – № 5. – С. 75–85.
8. Корнєєв В. Еволюція та перспективи фінансового ринку України // Економіка України. – 2007. – № 9. – С. 21–29.
9. Кондрашкін А. Інвестиційні ризики українського ринку цінних паперів // Банківська справа. – 2002. – № 2. – С. 62–70.
10. Евстигнеев Р. Рынок акций в экономике переходного периода // Мировая экономика и междунар. отношения. – 2004. – № 9. – С. 47–56.
11. Прутник Э., Ретинский Ю., Назарчук М. Региональный фондовый рынок и инвестирование экономики Донецкой области // Экономика Украины. – 2003. – № 1. – С. 13–17.
12. Дергачова В.В. Міжнародна конкурентоспроможність національної економіки в контексті забезпечення економічного зростання. – Донецьк: ДонДУЕТ, 2006. – 392 с.
13. Статистичний щорічник України за 2005 рік / Держкомстат України / За ред. О.Г. Осауленка; Відп. за випуск В.А. Головка. – К.: Консультант, 2006. – 576 с.
14. Савельев Н.Н. Река времени: История глобализации мирового развития. – Краснодар: Пересвет, 2002. – 264 с.
15. Економіка України: Стратегія і політика довгострокового розвитку / За ред. В.М. Геєця. – К.: Фенікс, 2003. – 1008 с.
16. Ватаманюк З.Г., Звонар Н.В. Ринок цінних паперів в умовах фінансової глобалізації // Фінанси України. – 2007. – № 6. – С. 82–89.

Рекомендована Радою факультету менеджменту та маркетингу НТУУ “КПІ”

Надійшла до редакції
17 вересня 2008 року

ЕЛЕКТРОНІКА, РАДІОТЕХНІКА ТА ЗАСОБИ ТЕЛЕКОМУНІКАЦІЙ

УДК 621.383

О.А. Мариненко

ОПТИЧНІ І ПАСИВУВАЛЬНІ ВЛАСТИВОСТІ НІТРИДУ КРЕМНІЮ

Вступ

Напівпровідникові фотоелектричні перетворювачі забезпечують безпосереднє перетворення сонячної енергії в електричну. Основна проблема у значному поширенні фотоенергетичних систем полягає в необхідності підвищення коефіцієнта корисної дії (ККД) і зниженні питомої вартості вироблюваної енергії. Досягнення ККД рівня 15–18% для кремнієвих фотоелектричних перетворювачів (ФЕП) з питомою вартістю вироблюваної електричної потужності 3,0–3,5 дол./Вт дало новий поштовх розвитку фотоенергетичних систем. Основними напрямками в цій галузі слід вважати фотоелектричні перетворювачі на основі монокристалічного, мультикристалічного, аморфного кремнію, потрійних напівпровідникових з'єднань A^3B^5 і систем Cu–In–Se [1–8].

Ключові моменти широкого розвитку фотоенергетики у світі і в Україні зосереджено на значному підвищенні ефективності перетворення сонячної енергії в електричну та зниженні собівартості вироблюваної енергії. Відповідно до програми США SAI (“Сонячна американська ініціатива”) [9] передбачена могутня підтримка американських фірм і університетів (більше 10 млрд дол.), що займаються розробкою і великомасштабним виробництвом фотоелектричних модулів і систем. Для забезпечення конкурентоздатності фотоенергетичних систем з відомими джерелами енергії (випалюване паливо, атомна енергетика та інші види поновлюваної енергії) необхідно знизити вартість одного вата пікової потужності як мінімум у два рази (менше 2,2 дол./Вт) і збільшити до 2030 р. обсяг виробництва в 1000 разів [10, 11]. При цьому треба враховувати поширеність базового матеріалу в природі, екологічну чистоту не тільки готових фотоенергетичних систем (ФЕС), але й технологічних процесів їх виготовлення, енерговитрати виробництва і термін їх окупності. В даний час більше 90% всього обсягу виробництва ФЕС становлять плоскопанельні модулі з кристалічного і мультикристалічного кремнію [11]. У цьому напрямку планується підвищення ефективності пе-

ретворення з 12–16 до 20–22% за рахунок удосконалення конструктивно-технологічних параметрів і зниження витрати кремнію більше ніж у два рази, оскільки 50% вартості модуля становить ціна вихідних кремнієвих пластин.

За останні роки розмір основних фотоелектричних перетворювачів зріс від 100×100 до 156×156 мм, що забезпечує зниження втрат енергії на вузлах з'єднання при роботі фотоелектричних перетворювачів у складі фотоелектричного сонячного модуля. Такі планарні розміри, безумовно, ведуть до збільшення впливу стану поверхні на вихідні електрофізичні параметри ФЕП.

Відносно низька ефективність перетворення сучасних фотоелектричних перетворювачів на кремнії зумовлена втратами перетворення короткохвильової і інфрачервоної області спектра сонячного випромінювання, втратами в результаті поверхневої й об'ємної рекомбінації, а також оптичного відображення. Це висуває проблему необхідності розробки нових методів перетворення короткохвильового випромінювання, технологічних прийомів пасивації, гетерування і наноструктурування поверхні.

Поглинання сонячного випромінювання відбувається в приповерхній зоні ФЕП, тому для досягнення високої ефективності перетворення сонячної радіації необхідно забезпечити мінімальні втрати, зумовлені процесами відображення світла, рекомбінацією і нефотоактивним поглинанням.

У розробленій технології виготовлення ФЕП на основі монокристалічного і полікристалічного кремнію (1980 р.) і при наступному впровадженні її в серійне виробництво було запропоновано як покриття, що просвітлює і пасивує, нітрид кремнію, який одержували плазмохімічним методом при температурах осадження 350°C [12–14]. Синтез нітриду кремнію в тліючому розряді із силану та аміаку приводив до ефективної пасивації поверхні кремнію воднем. Зараз цей метод широко застосовується при виробництві ФЕП багатьох закордонних фірм, але процес потребує подальшого удосконалення.

Постановка задачі

Мета даної статті полягає в дослідженні основних фізико-технологічних процесів виготовлення кремнієвих фотоелектричних перетворювачів ФЕП, установленні впливу технологічних параметрів осадження плазмохімічного нітриду кремнію на характеристики ФЕП та режимів оптимізації для підвищення ККД.

Задачами, що розв'язуються для досягнення вказаної мети, є порівняльна характеристика плівки нітриду кремнію з іншими типами антивідбивальних і пасивувальних шарів, що широко використовуються в крупносерійних виробництвах ФЕП на великоформатних кремнієвих пластинах, встановлення особливостей формування плівки нітриду кремнію при використанні як бази фотоелектричного перетворювача монокремнієвої та мультикремнієвої пластин.

Параметри антивідбивальних покриттів для кремнієвих ФЕП

Основним призначенням антивідбивальних покриттів (АВП) є зменшення коефіцієнта відбиття світла від поверхні робочої поверхні приладу. При створенні кремнієвого ФЕП першочергово треба звернути увагу на його власну спектральну характеристику (рис. 1). При цьому стає очевидним, що для кремнієвого ФЕП потрібно вибирати АВП, який забезпечує мінімальний коефіцієнт відбиття в діапазоні довжин хвиль 0,4–1 мкм. Не існує поверхонь, оптичні властивості яких є неселективними в дуже широкому діапазоні спектра. Поглинаючи частину випромінювання з видимої частини спектра, поверхні тіл відбивають іншу частину спектра, визначаючи колір поверхні.

Отже, при виборі АВП для ФЕП першочергово слід визначити основні параметри необхідної плівки АВП. Вихідними даними при розрахунку є спектральна залежність коефіцієнта відбиття та спектральна чутливість (відношення густини струму короткого замикання при даній довжині хвилі до одиниці падаючої енергії опромінення) кремнієвого елемента з текстурованою поверхнею і глибиною залягання емітерного переходу менш ніж 1 мкм [15].

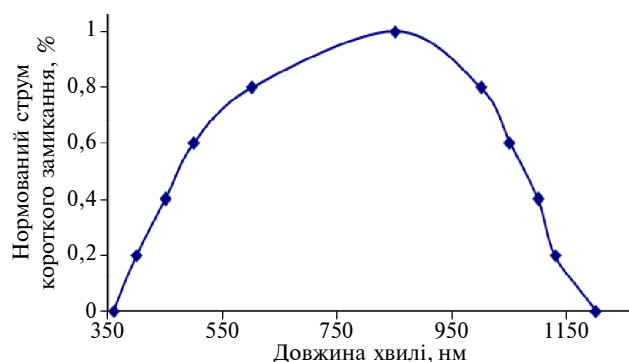


Рис. 1. Спектральний розподіл густини струму короткого замикання кремнієвого ФЕП без антивідбивального покриття

Внаслідок відносно великого значення коефіцієнта заломлення (при $\lambda = 0,6$ мкм, $n = 3,94$) фронтальна поверхня кремнієвого ФЕП відбиває значну частину падаючого світла в усьому “робочому” діапазоні (рис. 2).

Розрахунок оптимальних параметрів покриття зводиться в загальному випадку до знаходження оптичної товщини та коефіцієнта заломлення плівки, що для непрозорих пластин визначається співвідношенням

$$\frac{(n_2 - n_0)^2}{(n_1 + n_0)^2} = \frac{(n_2 + n_1)^2 + k^2}{(n_2 - n_1)^2 + k^2}, \quad (1)$$

де $n_0 = 1$, n_1 , n_2 – коефіцієнти заломлення повітря, антивідбивального покриття та пластини (кремнію), відповідно; $k = \alpha\lambda/4\pi$ і α – показник і коефіцієнт поглинання кремнію.

Використовуючи ряд припущень, наведених у [16], для довжини хвилі більше ніж 500 нм отримуємо

$$n_1 = \sqrt{n_2}. \quad (2)$$

Виходячи з (2) і коефіцієнта заломлення кремнію 3,94 (при довжині хвилі більше ніж 500 нм), отримуємо, що оптимальна плівка повинна мати коефіцієнт заломлення близько 1,98–2.

Внаслідок дисперсії n_2 оптимальна товщина покриття дорівнює чверті довжини хвилі при мініальному коефіцієнті відбиття ($\lambda_{\min}/4$). Але визначення оптимальної товщини покриття ускладнюється тим, що потрібно враховувати не лише оптичні властивості, але й електрофізичні характеристики ФЕП. При цьому максимум спектра розподілу енергії сонячного випромінювання (0,5–0,6 мкм) і максимум спектральної чутливості ФЕП (0,5–0,85 мкм) не збігаються. Наслідком цього буде те, що λ_{\min} повинна бути в діапазоні 120–200 нм, але більш точно визначення λ_{\min} без проведення експери-

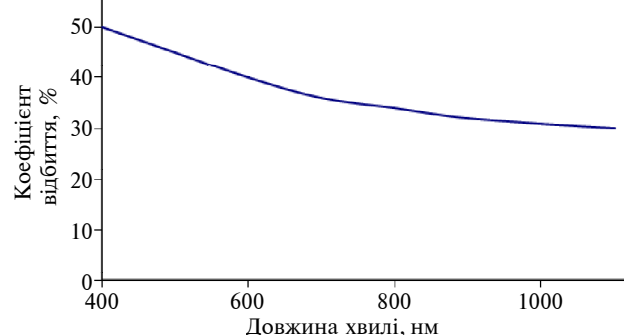


Рис. 2. Коефіцієнт відбиття кремнієвого ФЕП без антивідбивального покриття

ментальних робіт для конкретного випадку неможливе, оскільки максимум спектральної чутливості ФЕП має сильну залежність від таких параметрів, як глибина залягання емітерного переходу, рівень легування вихідної пластини, рівень поверхневої концентрації домішки емітера тощо.

Отже, для точного визначення оптимальних параметрів антивідбивальної плівки потрібне проведення експериментальної роботи із встановленням емпіричної залежності спектральної чутливості ФЕП від товщини плівки.

Пасивувальні властивості нітриду кремнію

За останні роки площа поверхні ФЕП збільшилась від 100 (для ФЕП із стороною квадрата 100 мм) до 250 см² (для ФЕП із стороною квадрата 156 мм), а товщина пластини невпинно зменшується (від 300 мкм в 2002 р. до 150 мкм у 2007 р.). Таким чином, відбувається зменшення впливу об'ємних ефектів і збільшення впливу приповерхневих ефектів. Крім пасивувальних властивостей плівки, яка буде використана для пасивації поверхні, потрібно знайти оптичні характеристики плівки, узгодженість технології формування з технологічним маршрутом виготовлення ФЕП, враховувати подальшу можливість формування контактної системи без використання фотолітографічних процесів.

Звичайно, найбільш прийнятною, з точки зору узгодженості властивостей, є плівка оксиду кремнію, але якщо взяти до уваги коефіцієнт заломлення світла на рівні 1,5 (що неприйнятно з погляду на вимоги до оптичних властивостей) та деякі інші фізико-хімічні явища (зокрема, інверсію провідності) [17], то стає очевидним, що для даного випадку ця плівка неприйнятна.

Іншою, досить поширеною в кремнієвій технології пасивувальною плівкою є нітрид кремнію.

Існує два принципово різних методи формування плівки нітриду кремнію: піролітичне осадження і осадження, стимульоване плазмою при пониженому тиску. Виходячи з властивостей плівок, отриманих цими методами [18], можна дійти висновку, що більш прийнятним є другий варіант, особливо з позицій насичення плівки і приповерхневого шару пластини воднем, також він не потребує високої температури процесу, що призводить до можливості "температурного старіння" пластини [15].

Для процесу пасивації поверхні ФЕП стимульованим плазмою осадженням плівки ні-

риду кремнію з газів моносилану та аміаку (чи азоту) мають додатково до росту плівки на поверхні пластини суттєвий механізм: проникнення іонів водню в приповерхневий шар пластини з наступним заміщенням дефектів кристалічної решітки.

При дослідженні пасивувальних властивостей плівки нітриду кремнію було отримано, що найкраща пасивація поверхні досягається при таких режимах процесу, які забезпечують формування плівки нітриду кремнію, збагачену кремнієм, таку, що має коефіцієнт заломлення більше ніж 2,3 [19], тобто збагачених кремнієм. Але таке значення коефіцієнта заломлення значно погіршує оптичні властивості системи ФЕП (рис. 3).

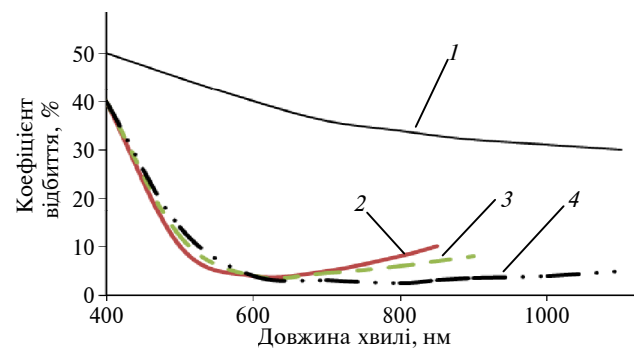


Рис. 3. Залежність спектрального коефіцієнта відбиття поверхні ФЕП від показника заломлення плівки нітриду кремнію (значення показника заломлення вказано при $\lambda = 0,6$ мкм): 1 – без покриття; 2 – 1,95; 3 – 1,97; 4 – 2

Дослідження властивостей плівок SiN:H, виготовлених при використанні суміші силан/аргон, показали, що при оптимізації процесу осадження до конкретних умов (процентне співвідношення силан/аргон, температура процесу тощо) дозволяє досягнути прийнятної поверхневої пасивації при використанні стехіометричної плівки Si_xN_y:H замість збагачених кремнієм плівок SiN. Вони також не поглинаються в ультрафіолетовому діапазоні сонячного спектра, мають достатню механічну та хімічну стійкість при звичайних умовах і досить легко розчинні при формуванні контактної системи.

Вплив режимних параметрів на властивості плівки нітриду кремнію

Традиційно вважалося, що показник заломлення плівки змінюється від 1,95 до 2,0 залежно від умов проведення процесу [18]. При цьому, змінюючи режимні параметри процесу, було отримано більш широкий діапазон 1,9–2,8, що ще раз свідчить про необхідність проводити

оптимізацію процесу для кожного конкретного випадку (тип обладнання, технологія підготовки пластин тощо).

Оскільки методи, що використовувалися для визначення оптичних характеристик, здатні аналізувати лише абсолютно рівні поверхні (клас поверхні не гірше ніж 10), то під час проведення процесів поряд із текстурованими (“робочими”) пластинами встановлювалися поліровані (“контрольні”) пластини КДБ-1, які попередньо були проведені по такому ж маршруту виготовлення ФЕП, що й “робочі” пластини, крім процесу текстурування.

Експериментальне дослідження проводилося на установці осадження діелектричних покриттів “Ізоплаз-150”. Для формування плівки використовувалися робочі гази аміак (NH_3) та моносилан (SiH_4).

Вплив робочої температури. При зміні температури процесу встановлено більш сильну залежність для коефіцієнта заломлення (рис. 4) плівки, яку було сформовано на поверхні пластини, ніж наведено в [18]. Цей факт було пов’язано з різним якісним складом аміаку (а саме більшим вмістом кисню і парів води), що використовувався як робочий газ. Це призводить (при низьких температурах проведення процесу) до часткового формування плівки $\text{Si}_x\text{N}_y:(\text{H}, \text{O})$, що має значно менший коефіцієнт заломлення.

Якість пасивації далі оцінювалася за напругою холостого ходу ФЕП, параметром, що прямо залежить від якості пасивації поверхні (від швидкості поверхневої рекомбінації) і меншою мірою залежить від оптичних властивостей ФЕП, ніж струм короткого замикання. Для цього пластини (“робочі”) було проведено по такому маршруту:

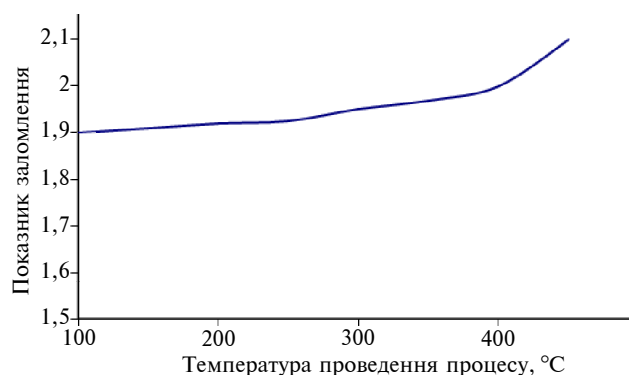


Рис. 4. Залежність коефіцієнта заломлення плівки $\text{Si}_x\text{N}_y:\text{H}_z$ від температури проведення процесу (значення показника заломлення вказано при $\lambda = 0,6$ мкм)

- вихідна пластина: $\mu\text{КДБ-1}$;
- хімічна очистка поверхні (розчин СР-4);
- структурування поверхні (суміш кислот $\text{HF}:\text{HNO}_3$);
- формування мілкозалегаючого емітера (830°C , 30хв) [15];
- ізоляція емітерного переходу методом травлення бокової частини пластини (до p -шару) [20];
- видалення фосфорносілікатного скла;
- формування плівки нітриду кремнію;
- формування контактної системи ФЕП.

Для порівняння бралися ФЕП, що не проходили операцію зняття шару фосфорносілікатного скла і формування плівки нітриду кремнію. Як антивідбивальна плівка на ці пластини наносилася плівка оксиду титану.

Для визначення впливу температури нагріву пластини було проведено дослідження температурного діапазону $25\text{--}600^\circ\text{C}$.

Проведені вимірювання показали залежність напруги холостого ходу $U_{x,x}$ від температури нагріву камери (рис. 5). У наведеному графіку чітко виділяються три характерні області: $25\text{--}200^\circ\text{C}$; $200\text{--}400^\circ\text{C}$; $400\text{--}600^\circ\text{C}$.

У діапазоні $25\text{--}200^\circ\text{C}$ рівень напруги холостого ходу майже незмінний. Цей факт пояснюється тим, що при проведенні процесу під впливом наявності омичного опору електродів відбувається саморозігрів пластин. При цьому рівень додаткового нагріву нижчий, ніж рівень саморозігріву. Таким чином, фактичний рівень нагріву пластин знаходиться на рівні близько 250°C . Цей факт пояснюється (як і у випадку з оптичними властивостями) рівнем наявності сторонніх домішок у плівці.

У наведеному графіку чітко простежується досить сильний вплив температури пластини на напругу холостого ходу ФЕП у температурному діапазоні $200\text{--}400^\circ\text{C}$.

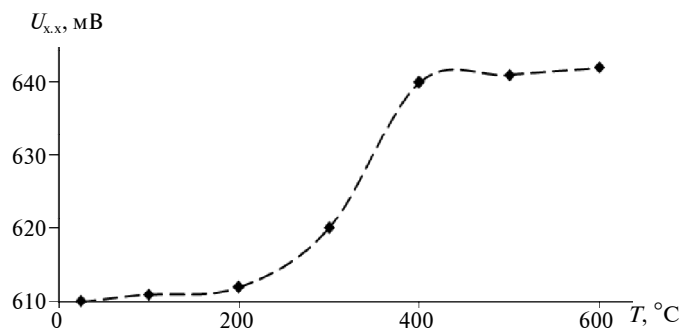


Рис. 5. Залежність напруги холостого ходу $U_{x,x}$ ФЕП від температури нагріву камери проведення процесу

Вплив співвідношення робочих газів. Співвідношення робочих газів впливає на те, з яким елементом (кремнієм чи азотом) пов'язаний водень. При цьому, крім оптичних властивостей (впливу на коефіцієнт заломлення) [18], змінюються й пасивувальні властивості плівки.

Змінюючи співвідношення робочих газів (моносилану і аміаку), при збереженні сумарного розходу газів можна побудувати графіки залежності напруги холостого ходу від цього співвідношення газів (рис. 6):

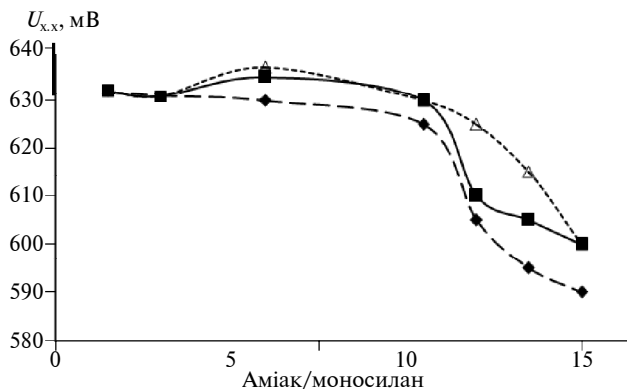


Рис. 6. Залежність напруги холостого ходу $U_{х,х}$ ФЕП від співвідношення робочих газів при різній температурі нагріву камери проведення процесу, °C: —◆— — 200; —■— — 350; —△— — 400

При цьому, проводячи аналіз отриманих залежностей, можна зробити відповідні висновки.

1. При великих значеннях NH_3/SiH_4 наявність у зоні реакції значної кількості аміаку (з супутніми киснем, парами води тощо) пасивувальні властивості досить слабкі, плівка в граничній області насичена значною кількістю домішок (кисень, групи ОН, азот тощо), рівень напруги холостого ходу ФЕП низький. При цьому відчувається значний вплив температури додаткового нагріву пластин.

2. При збільшенні розходу моносилану в граничній області зростає рівень кремнію, що позитивно відбивається на якості пасивації, рівень напруги холостого ходу збільшується.

3. При значеннях NH_3/SiH_4 , близьких до 1,5 (і менше), склад плівки набуває властивостей полікремнію, пасивувальні властивості стабілізуються, криві стають менш похилими.

Виходячи з наведених результатів, можна запропонувати, що для досягнення високої ефективності ФЕП необхідно формувати плівки нітриду кремнію, збагачені кремнієм, але при цьому коефіцієнт заломлення плівки буде більшим, ніж 2,2, що призведе до значного погіршення оптичних властивостей ФЕП та зниження значення струму короткого замикання, і, як результат, при значеннях співвідношення NH_3/SiH_4 , менших ніж 5, зменшення складової струму короткого замикання у виразі ефективності ФЕП стає більш значимим, ніж зростання напруги холостого ходу.

Отже, для отримання високої ефективності фотоелектричного перетворення потрібно при вирощуванні плівки нітриду кремнію для фотоелектричних перетворювачів витримувати співвідношення робочих газів у діапазоні 4–7.

Висновки

Одним із визначальних технологічних процесів підвищення ефективності перетворення кремнієвих фотоелектричних перетворювачів є створення антивідбивального покриття, що має необхідні просвітлювальні і пасивувальні властивості. Встановлені основні закономірності формування плазмохімічного нітриду кремнію дозволили підвищити ефективність перетворення до 16,5–19%.

А.А. Мариненко

ОПТИЧЕСКИЕ И ПАССИВИРУЮЩИЕ СВОЙСТВА НИТРИДА КРЕМНИЯ

Рассмотрены физико-технологические процессы повышения эффективности преобразования фотоэлектрических преобразователей на основе монокристаллического и мульткристаллического кремния. Исследованы оптические и пассивирующие свойства пленок нитрида кремния, полученных плазмохимическим осаждением.

O.A. Marinenko

THE OPTICAL AND PASSIVATING PROPERTIES OF SILICON NITRIDE

This paper considers physical and technological processes of enhancing transformation efficiency of photoelectric transducers on the basis of singlecrystalline and multicrystalline silicon. The core of this work is the study of optical and passivating properties of silicon nitride films, produced by the plasma chemical deposition technology.

1. *Фаренбрех А., Бьюб Р.* Солнечные элементы: теория и эксперимент / Пер. с англ. – М.: Энергоатомиздат, 1987. – 280 с.
2. *Амброзьяк А.* Конструкция и технология полупроводниковых фотоэлектрических приборов. – М.: Сов. радио, 1970. – 392 с.
3. *Green M.A.* Third generation photovoltaic – theoretical and experimental progress // Proc. of the 19th European Photovoltaic Solar Energy Conf. and Exhibition. – Paris (France), 2004. – P. 12–19.
4. *Roca F., Carabe J.* Silicon heterojunction cells // Ibid. – P. 1321–1328.
5. *Yasler C., Koch W., Krumbe W., Thurm S.* Multicrystalline Baysix silicon for high-efficient solar cells from the new freiberg production facility // Proc. of the 2nd World Conf. and Exhibition on Solar Energy Conversion. – Vienna, 1998. – P. 463.
6. *Longo C., De Paoli M.* Dye-Sensitized Solar Cells: A Successful Combination of Materials // J. Braz. Chem. Soc. – 2003. – **14**, N 6. – P. 889–901.
7. *Шмырева А.Н.* Назначение, состав и основные характеристики электроснабжения космических аппаратов // Матер. региональной школы-семинара “Украинский молодежный спутник”. – К., 2004. – С. 32–43.
8. *Bergmann R.B.* Crystalline Si thin-film solar cells: a review // Appl. Phys. – 1999. – A69. – P. 187–194.
9. *Barnett A., Honsberg C., Kirkpatrick D.* New US Ultra High Efficiency R&D Programme // Proc. of the 21st European Photovoltaic Solar Energy Conf. – Dresden (Germany), 2006. – P. 124–128.
10. *Swanson R.M.* A Vision for crystalline silicon solar cells // Proc. 19th European Photovoltaic Solar Energy Conf. – Paris (France), 2004. – P. 968–974.
11. *Унтила Г.Г., Кост Т.Н., Чеботарёва А.Б. и др.* Новый тип высокоэффективных двусторонних кремниевых солнечных элементов с внешними шинами и проволочной контактной сеткой // Физика и техника полупроводников. – 2005. – **39**, вып. 11. – С. 1393–1398.
12. *Шмырева А.Н., Иващук А.И.* Фотоэлектрические свойства МДП-фототранзисторов при высоких уровнях возбуждения // Физика и техника полупроводников. – 1979. – **13**, № 9. – С. 1835–1838.
13. *Шмырева А.Н., Кирпатенко Л.Т.* Солнечные элементы с поверхностными барьерами // Матер. Всесоюз. семинара “Полупроводниковые приборы с барьерами Шоттки”. – К., 1980. – С. 72.
14. *Шмырева А.Н., Кирпатенко Л.Т.* Фотоэлектрические свойства кремниевых МДП-структур с инверсионными слоями // Диэлектрики и полупроводники. – К.: Наук. думка, 1987. – Вып. 31. – С.71–73.
15. *Мариненко О.А.* Вплив параметрів дифузійних процесів на характеристики фотоелектричних перетворювачів // Електроніка і зв'язь. – 2007. – № 1. – С. 12–16.
16. *Колтун М.М.* Селективные оптические поверхности преобразователей солнечной энергии. – М.: Наука, 1979. – 246 с.
17. *Лукомський Д.В., Мариненко О.А., Пашков О.С.* Пассивация поверхні фотоелектричних перетворювачів за допомогою окислу кремнію в умовах серійного виробництва // Вісник Київського нац. ун-ту ім. Тараса Шевченка. Військово-спеціальні науки. – 2007. – № 14. – С. 17–19.
18. *Толливер Д., Новицки Р., Хесс Д. и др.* Плазменная технология в производстве СБИС / Пер. с англ. под ред. Н. Айнспрука, Д. Брауна. – М.: Мир, 1987. – С. 387.
19. *Schmidt J., Moschner J.D., Henze J.* Recent progress in the surface passivation of silicon solar cells using silicon nitride 19th European Photovoltaic Solar Energy Conf., 7–11 June 2004. – Paris (France), 2004. – P. 391–396.
20. *Fedorovich O.A., Kruglenko M.P., Lukomskij D.V., Marinenko A.A., Polozov B.P.* Modernization of the plasma chemical etching equipment for isolation of the p-n junction at the photoconverters production // Proc. 11th Intern. Conference-School on Plasma Physics and Controlled Fusion, Alushta (Ukraine), 11–16 September, 2006. – Алушта, 2006. – P. 142–143.

ІНФОРМАЦІЙНІ ТЕХНОЛОГІЇ, СИСТЕМНИЙ АНАЛІЗ ТА КЕРУВАННЯ

УДК 51-74

С.М. Гриша, О.А. Іотко

СТРАТЕГІЧНЕ ПЛАНУВАННЯ ФУНКЦІОНАЛЬНОСТІ ERP/MRP-СИСТЕМ ІЗ ВРАХУВАННЯМ МНОЖИННИХ ЗАМІЩЕНЬ

Вступ

Розширення задачі планування функціональності комп'ютеризованих інтегрованих систем (КІС) [1], що полягає в можливості заміщення підмножин елементів забезпечення іншими підмножинами таких елементів у контексті елементів функціональності, має велике практичне значення, але в існуючих методологіях розробки КІС задача вибору функцій, які підлягають реалізації в системі з множини потенційно можливих елементів, розв'язується експертним способом, тобто інтуїтивно, а отже, кінцевий успіх критично залежить від суб'єктивного фактора [2].

В існуючих підходах часто виходять з того, що структура функціональності вже визначена, і забезпечують аналітика лише засобами візуальної оцінки системної цілісності. Такий стан справ можна пояснити тим, що зазначені методики зорієнтовані на вирішення проблем програмної інженерії, а відповідальність за вибір функцій у них перекладається на замовника.

Сучасний бізнес, що функціонує в умовах турбулентного оточення, потребує адекватних за оперативністю і об'єктивністю засобів стратегічного управління функціональністю, підхід до створення яких розглядається в даній статті і полягає у визначенні оптимального цілісного набору вимог за допомогою інформаційно-вартісного аналізу.

Постановка задачі

Мета статті – розробка підходу, який мінімізує вплив людського фактора на планування функціональності. Засіб досягнення мети – звільнення аналітиків від рутинних задач перебору можливих варіантів при їх концентрації на таких задачах:

1) оцінювання корисності кожної функції системи (далі – ситуаційного елемента) окремо;

2) виділення множин ситуаційних елементів, що дають синергетичний ефект, та його оцінка;

3) оцінювання вартості реалізації кожного елемента забезпечення окремо;

4) виділення множин ситуаційних елементів та елементів забезпечення, що дають синергетичний ефект зниження вартості володіння за рахунок інтеграційних процесів;

5) вибір оптимальної за критерієм “вартість володіння” функціональної структури системи для послідовності витків “спірального” процесу розвитку.

Запропонована методологія забезпечує зменшення залежності від суб'єктивності експертів, прискорює розв'язання задачі планування розвитку функціональності при збільшенні глибини “варіантності” аналізу.

Для подання всієї функціональності, яка може бути реалізована в системі, та елементів її забезпечення використовується двошаровий орієнтований ациклічний граф. Елементом функціональності або підсистемам відповідають вершини першого шару, а елементам забезпечення – вершини другого шару. Вартості підсистем та елементів забезпечення – це, власне, вартісна функція, а залежність підсистем від елементів функціональності задається дугами графа. Відношення заміщення задає альтернативні можливості при реалізації підсистем.

Провівши інформаційно-вартісний аналіз, можна зробити висновок про недоцільність реалізації певних прецедентів з точки зору їх економічної неефективності внаслідок перевищення вартості володіння забезпечуючими інформаційними технологіями (ІТ) над вигодами від зростання інформованості процесу прийняття рішення. Результатом роботи алгоритму буде оптимальний узгоджений підграф.

Для розв'язання задачі без альтернатив забезпечуючих ІТ використовується поліноміальний алгоритм редукції [1], а для розширеної задачі пропонується оригінальне поєднання генетичного алгоритму з алгоритмом редукції. Як база для порівняння використовується метод Монте-Карло та повний перебір на задачах відповідної розмірності.

Безальтернативна задача

Задано двошаровий оргграф $G = \{V, U\}$.

Множина вершин $V = B \cup O$, де B – вершини першого шару, а O – вершини другого шару, тобто для всіх дуг $u = (b, o) \in U$ виконується умова $b \in B, o \in O$.

На множині вершин задана вагова функція, причому виконуються нерівності

$$\begin{aligned} w(b) &> 0, \quad b \in B, \\ w(o) &< 0, \quad o \in O. \end{aligned}$$

Потрібно знайти такий підграф

$$\begin{aligned} G' &= \{V' = B' \cup O', U'\}, \\ B' &\subseteq B, \\ O' &\subseteq O, \end{aligned}$$

для якого виконуються співвідношення

$$b \in B', (b, o) \in U \Rightarrow o \in O', \quad (1)$$

$$u = (b, o) \in U, b \in B', o \in O' \Rightarrow u \in U' \quad (2)$$

і цільова функція

$$c(G') = \sum_{v \in V'} w(v) \rightarrow \max.$$

Умова (1) означає, що коли вершина першого шару належить шуканому підграфу, то їй мають належати і всі інцидентні їй вершини другого шару, а умова (2) означає, що коли дуга належить вихідному графу і її вершини належать шуканому підграфу, то вона також належить шуканому підграфу, тобто, по суті, задача полягає в пошуку підграфа з максимальною сумою ваг вершин, що містить деякі вершини першого шару, а також всі інцидентні вершини другого шару.

Алгоритм розв'язання безальтернативної задачі

Як було показано в [1], безальтернативна задача розв'язується за допомогою такого поліноміального алгоритму.

1. Створення графа G' спеціальної структури на базі G таким чином:

1) додавання до графа G' вершин витоку s і стоку t ;

2) від витоку дуги ідуть до вершин першого шару $b \in B$; потужність дуг $w_{(s,b)} = w_b$;

3) від вершин другого шару $o \in O$ дуги ідуть до стоку; потужність дуг $w_{(o,t)} = -w_o$;

4) потужність дуг $w_{(b,o)} = \infty$.

2. Розв'язання допоміжної задачі про максимальний потік на G' .

3. Проведення редукції вилученням вершин другого шару, для яких виконується умова $w_{(o,t)} > f_{(o,t)}$.

4. Проведення редукції вилученням всіх вершин першого шару, інцидентних із вилученими вершинами другого шару.

5. У випадку, коли на попередньому кроці редукції було піддано хоч одну вершину, повернення до кроку 2 з графом G' .

В [1] доведено, що граф G' і буде оптимальним розв'язком задачі.

Оскільки на кожній ітерації алгоритму редукції піддається принаймні хоч одна вершина (або алгоритм припиняє роботу) і задача про максимальний потік розв'язується за поліноміальний час [3], то час роботи алгоритму також є поліноміальним.

Розширена задача

Розглянемо розширення задачі, в якому на дугах графа задано відношення заміщення.

Ця задача має велике практичне значення, але для неї не знайдено алгоритму з поліноміальним часом роботи. Для її розв'язання, крім повного перебору, методу гілок і границь та інших перебірних алгоритмів, пропонується використати генетичний алгоритм. Було поставлено обчислювальні експерименти, що засвідчили високу ефективність роботи даного підходу порівняно з перебірними алгоритмами та методом Монте-Карло. Як структурне різноманіття тут виступає граф з кольоровими дугами. Кожній вершині першого шару $\forall b \in B$ поставимо у відповідність множину, що задає покриття всіх інцидентних b вершин $V^b = \{V_i^b\}$, де $V_i^b \subseteq O$ і $\bigcup_i V_i^b = O^b$, O^b – множина всіх вершин другого шару, інцидентних b . Множини V_i^b можна отримати способом транзитивного замикання багатшарового графа з альтернативами [1].

Розглянемо задачу із зміненою таким чином умовою (1):

$$b \in B' \Rightarrow \exists V_i^b, V_i^b \subseteq O', \quad (4)$$

тобто, якщо в безальтернативній задачі для включення вершини першого шару в шуканий граф вимагалось включення всіх інцидентних їй вер-

шин другого шару, то в нашому випадку достатньо, щоб у шуканому підграфі були всі вершини принаймні однієї підмножини V_i^b .

Алгоритм розв'язання розширеної задачі

Введемо означення *множини варіантів* як $V^X = \{V_{i^x}^b\} \forall b \in B$, тобто, по суті, множина варіантів складається з множин V_i^b , вибраних певним чином по одній для кожної вершини першого шару b . Для розв'язання такої задачі пропонуємо використати генетичний алгоритм [4].

1. Генеруємо початкову популяцію множин варіантів $P = (V^X)$.

2. Для кожного елемента популяції V^X обчислюємо цільову функцію, розв'язуючи задачу таким чином:

1) проводимо редукції виключенням всіх дуг, таких, що $(b, o) \notin V_{i^x}^b$;

2) розв'язуємо оригінальну безальтернативну задачу з використанням редукованого графа;

3) використовуємо результат, отриманий в алгоритмі безальтернативної задачі як значення цільової функції генетичного алгоритму.

3. Якщо критерій зупинки алгоритму не досягнуто, то генеруємо наступну популяцію і переходимо до кроку 2.

4. Результатом буде найкраще значення, досягнуте на кроці 2.

Ефективність роботи алгоритму, очевидно, залежить від реалізації генетичного алгоритму, що задається такими параметрами [5, 6]:

- правила створення початкової популяції;
- реалізація операції селекції;
- реалізація операції кросовера;
- реалізація операції мутації;
- розмір популяції на кожному кроці;
- критерій зупинки.

Для визначення значень параметрів було поставлено багатофакторний обчислювальний експеримент на згенерованих тестових даних, що дозволило виявити значення параметрів, при яких досягаються найкращі результати:

1) початкова популяція генерується випадково;

2) селекція вибирає до участі в наступній популяції 30% кращих елементів;

3) операція кросовера вибирає випадково два елементи популяції V^X і V^Y і для кожного $b \in B$ включає в результат кросовера V^R такий еле-

мент з $V_{i^x}^b$ і $V_{i^y}^b$, для якого кількість елементів забезпечення, що не були наслідком попередніх кросоверів, є мінімальною; операція кросовера генерує 60% елементів популяції;

4) операція мутації елемента популяції V^X має бути випадковою та непріоритетованою, тобто вибраний випадково елемент $V_{i^x}^b \in V^X$ замінюємо $V_{i^y}^b$; в разі необхідності усувається перекриття забезпечень. Операція мутації генерує 10% елементів популяції;

5) розмір популяції на кожному кроці фіксований і дорівнює кількості вершин графа;

6) критерій зупинки алгоритму залежить від обмежень на час роботи алгоритму і може бути комбінованим – з перериванням за часом та із зупинкою прогресу більш ніж на два кроки.

Випробування алгоритму

Було проведено випробування роботи запропонованого алгоритму. Результати роботи алгоритму з найкращими параметрами та порівняння з методами Монте-Карло і повним перебором наведено у таблиці. Експеримент було побудовано так, щоб кількості ітерацій для Монте-Карло та запропонованого алгоритму збігалися. Під ітерацією розуміється кількість безальтернативних задач, розв'язаних у процесі роботи алгоритму. Під варіантністю розуміється максимальна кількість варіантів реалізації кожного елемента першого шару.

За результатами експерименту можна зробити відповідні висновки.

1. На задачах, розмірність яких дозволяє провести експеримент з повним перебором (не більше 15 вершин першого шару з варіантністю не більше 4), отриманий результат не гірший оптимального.

2. При одній і тій же кількості ітерацій час роботи запропонованого алгоритму в середньому на 36,4% менший за час роботи методу Монте-Карло.

3. При одній і тій же кількості ітерацій результат роботи запропонованого алгоритму в середньому на 8,2% більший за результат роботи методу Монте-Карло і немає жодного випадку, коли б результат роботи запропонованого алгоритму був би нижчий результату роботи методу Монте-Карло.

Таблиця. Порівняння результатів роботи методів

Розмірність			Час роботи			Кількість ітерацій	Результат		
Вершини першого шару	Вершини другого шару	Варіантність	Метод				Метод		
			Монте-Карло	Запропонований алгоритм	Повний перебір		Монте-Карло	Запропонований алгоритм	Повний перебір
5	5	2	< 1 мс	1 мс	< 1 мс	20	49	49	49
5	20	5	< 1 мс	1 мс	2 мс	20	43	43	43
10	20	3	13 мс	8 мс	776 мс	70	284	328	328
15	40	3	29 мс	28 мс	24 с	90	374	449	449
15	40	4	42 мс	39 мс	61 с	90	514	611	611
20	20	5	76 мс	50 мс	–	120	7317	7574	–
20	50	5	86 мс	81 мс	–	120	2681	3188	–
50	50	3	1,2 с	1 с	–	250	19306	19420	–
50	50	10	1,4 с	802 мс	–	250	18609	18624	–
50	200	15	9 с	5,5 с	–	400	16577	19088	–
100	100	15	20 с	11,2 с	–	700	44127	45338	–
100	400	20	66 с	45 с	–	800	39124	43437	–
500	500	20	47 хв 36 с	42 хв 52 с	–	3000	2360048	2368535	–

Висновки

У статті запропоновано постановку розширеної задачі стратегічного планування функціональності ERP-систем з відношенням заміщення, заданому на дугах графа. Аналіз наукових результатів показав, що немає конструктивних методів розв'язання задач цього класу.

Результатами роботи є розроблений гібридний алгоритм, який складається з поліноміальної і експоненційної частин. Алгоритм розв'язує поліноміальну складову задачі методом редукції до задачі про максимальний потік на мережі, а експоненційну – за допомогою оригінального ге-

нетичного алгоритму. Для доведення ефективності такого підходу створено програмне забезпечення та розроблено план обчислювального експерименту. Проведений обчислювальний експеримент показав перевагу запропонованого підходу над комбінацією метод Монте-Карло–редукція.

Отримані результати мають велике практичне значення, оскільки запропонована методологія планування функціональності КІС забезпечує значне зменшення залежності від суб'єктивності експертів та прискорює розв'язання задачі планування розвитку функціональності при збільшенні глибини “варіантності” аналізу.

С.Н. Гриша, А.А. Иотко

СТРАТЕГИЧЕСКОЕ ПЛАНИРОВАНИЕ ФУНКЦИОНАЛЬНОСТИ ERP/MRP-СИСТЕМ С УЧЕТОМ МНОЖЕСТВЕННЫХ ЗАМЕЩЕНИЙ

Рассматривается расширенная задача стратегического планирования функциональности ERP-сис-

S.M. Grysha, O.A. Iotko

THE STRATEGIC PLANNING OF ERP/MRP-SYSTEMS FUNCTIONALITY WITH REGARD TO PLURAL SUBSTITUTIONS

Much prominence is given in this paper to the extended problem of the strategic planning of the ERP

тем с отношением замещения, заданным на дугах графа. Для решения задачи предлагается использовать гибридный алгоритм, состоящий из полиномиальной и экспоненциальной частей. Алгоритм решает полиномиальную составляющую задачи методом редукции к задаче о максимальном потоке на сети, а экспоненциальную – с помощью оригинального генетического алгоритма. Приводятся результаты численного эксперимента.

systems functionality with the substitution relation, specified on the graph arcs. To solve this problem, a hybrid algorithm, composed of the polynomial and exponential parts is proposed to be used. This algorithm solves a polynomial component of the problem by reduction to the maximum network flow problem, and an exponential one – by means of the original genetic algorithm. Thus, we also provide the numerical experimental results.

1. Гриша С.М., Стенін О.А., Іотко О.А., Хедоят Хейдори. Стратегічне планування розвитку функціональності КІС методом редукції // Адаптивні системи автоматичного управління. – 2007. – **10(30)**. – С. 45–53.
2. Скурихин В.И., Павлов А.А., Путилов Э.П., Гриша С.Н. Автоматизированные системы управления гибкими технологиями. – К.: Техніка, 1987. – 166 с.
3. Кормен Т., Лейзерсон Ч., Ривест Р. Алгоритмы. Построение и анализ. – М.: МЦНМО, 2002. – 960 с.
4. Рутковская Д., Пилинский М., Рутковский Л. Нейронные сети, генетические алгоритмы и нечеткие системы. – М.: Горячая линия–Телеком, 2007 – 452 с.
5. Mitchell M. An introduction to Genetic algorithms. – Cambridge (USA): MIT Press, 1996. – 222 p.
6. Reeves C.R., Rowe J.E. Genetic Algorithms: Principles and Perspectives. A Guide to GA Theory. – Boston (USA): Kluwer Academic Publishers, 2002. – 344 p.

Рекомендована Радою навчально-наукового комплексу “Інститут прикладного системного аналізу” НТУУ “КПІ”

Надійшла до редакції
19 листопада 2008 року

УДК 519.85

О.О. Ємець, Ол-ра О. Ємець

ПОБУДОВА МАТЕМАТИЧНОЇ МОДЕЛІ ОДНІЄЇ КОМБІНАТОРНОЇ ЗАДАЧІ УПАКУВАННЯ ПРЯМОКУТНИКІВ З НЕЧІТКИМИ РОЗМІРАМИ

Вступ

У прикладних задачах комбінаторної оптимізації (див., наприклад, [1–8]) часто постає проблема більш адекватного врахування вихідних даних. У більшості праць із комбінаторної оптимізації невизначеність вхідних даних до цих пір не враховується.

Відомі праці, пов'язані з комбінаторною оптимізацією, в яких враховується невизначеність вхідних даних за допомогою інтервальної (див., зокрема, [7]) та стохастичної невизначеностей (див. [9]).

Але на сьогодні в задачах комбінаторної оптимізації немає апарата врахування невизначеності, яка адекватно моделюється нечіткими множинами (див., наприклад, [10]). У працях [11, 12] робляться певні кроки моделювання задачею комбінаторної оптимізації із врахуванням невизначеності нечіткими множинами, вводяться та досліджуються деякі необхідні для цього операції над нечіткими числами.

Постановка задачі

Мета статті – показати, як враховувати невизначеність даних, заданих нечіткими множинами, при моделюванні задачі геометричного проектування на прикладі задачі упакування прямокутників у смугу.

Моделювання однієї задачі геометричного проектування

Нехай є деяка напівнескінченна (достатньо довга) смуга, яка розділена на смужки однакової ширини h (рис. 1). Задано ще p прямокутників з довжинами a_1, \dots, a_p , шириною h . Задача полягає в розміщенні прямокутників без накладань один на одного у смугу на її початку таким чином, щоб довжина зайнятої частини смуги була мінімально можливою.

Під довжиною зайнятої частини смужки будемо розуміти суму довжин прямокутників, що розміщуються в цій смужці. Серед цих сум виберемо найбільшу. Вона й буде відповідати довжині зайнятої частини смуги.

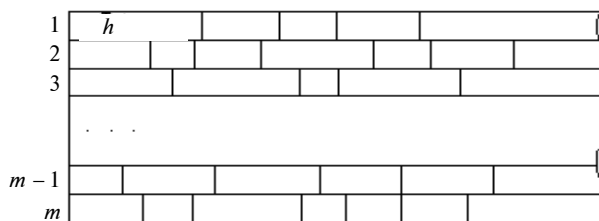


Рис. 1. Ілюстрація задачі упакування прямокутників

При розгляді питання упакування прямокутників у смугу з метою врахування невизначеності вхідних даних можна метричні характеристики об'єктів розглядати як нечіткі числа.

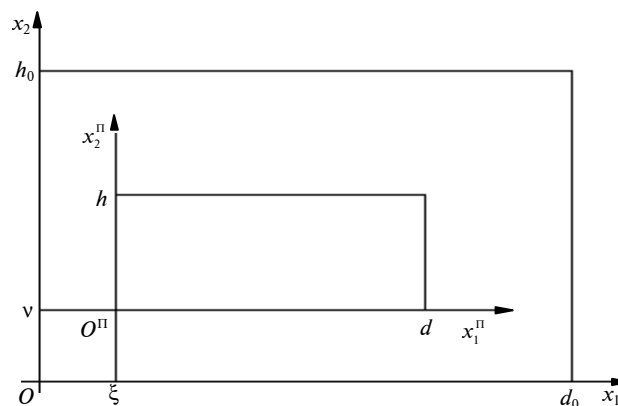
Означення 1* [12]. Нечітким числом a називають нечітку множину виду $a = \{(a_i | \mu_i), \dots, (a_k | \mu_k)\}$, де $\{a_1, a_2, \dots, a_k\}$ ($a_i \in R^1 \forall i \in J_k$) – носій нечіткої множини; $\{\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_k\}$, ($\mu_i \in R^1 \forall i \in J_k$) – множина значень функції приналежності, $0 \leq \mu_i \leq 1 \forall i \in J_k$ [10]. Тут і надалі J_k позначаємо множину перших k натуральних чисел.

Зуважимо, що дійсне число α можна представити як нечітке число $a = \{(\alpha | 1, 0)\}$.

Розглянемо задачі упакування прямокутників у смугу (або прямокутник, якщо довжина прямокутника така, що її треба враховувати, не вважаючи смугу достатньо довгою – “напівнескінченною”).

Нехай розміри прямокутника (смуги) задаються дійсними числами h_0 і d_0 (рис. 2). Зв'яжемо з нижнім лівим кінцем смуги початок прямокутної декартової системи координат, спрямувавши осі так, як показано на рис. 2.

Розглянемо прямокутник Π , який розміщується в смугі. Розміщення прямокутників будемо розглядати такі, що осі системи координат, зв'язаної з кожним із прямокутників, паралельні осям Ox_1x_2 (див. рис. 2) та направлені в той же бік.

Рис. 2. Розміщення прямокутника Π в смугі

* Означення 1–6 та деякі поняття взяті із статті [12].

Зручно початок O^{Π} власної системи координат прямокутника поміщати в лівий нижній кут прямокутника. Цю точку O^{Π} прямокутника будемо називати полюсом. Прямокутники розміщатимемо в смугі, щоб його сторони були паралельні (перпендикулярні) сторонам смуги (див. рис. 2). Тоді прямокутник Π_i відносно смуги H визначається такими параметрами:

- ξ_i – абсциса полюса в системі координат Ox_1x_2 ;
- v_i – ордината полюса в системі координат Ox_1x_2 ;
- h_i – ширина (висота) прямокутника;
- d_i – довжина прямокутника.

Прямокутник позначатимемо $\Pi_i(\xi_i, v_i, h_i, d_i)$ або просто Π_i .

Нехай числа ξ_i, v_i, h_i – звичайні (дійсні числа) і нехай d_i – нечітке число $d_i = \{(d_i^1 | \mu_1^i), \dots, (d_i^n | \mu_n^i)\}$. Виникає питання: що таке прямокутник Π з висотою h ("чітке" число) та довжиною $d = \{(d_1 | \mu_1), \dots, (d_n | \mu_n)\}$?

Оскільки число d – це:

- 1) d_1 із значенням функції приналежності μ_1 ;
- 2) d_2 із значенням функції приналежності μ_2 ;
-
- i) d_i із значенням функції приналежності μ_i ;
-
- n) d_n із значенням функції приналежності μ_n , то Π – це прямокутник з розмірами:
- 1) $h \times d_1$ із значенням функції приналежності μ_1 ;
- 2) $h \times d_2$ із значенням функції приналежності μ_2 ;
-
- i) $h \times d_i$ із значенням функції приналежності μ_i ;
-
- n) $h \times d_n$ із значенням функції приналежності μ_n ,

тобто Π – це звичайний прямокутник з розмірами $h \times d_i$, тільки d_i набуває одного з n можливих значень, що характеризується значенням функції приналежності μ_i .

Для математичної постановки задач розміщення (упаковки) прямокутників Π_i в смугі треба дати означення:

- 1) розміщення прямокутника в смугі (попадання в смугу);
- 2) взаємного перетину прямокутників Π_i і $\Pi_j, i \neq j$, які розміщені в смугі;
- 3) взаємного неперетину прямокутників Π_i і $\Pi_j, i \neq j$, які розміщені в смугі;
- 4) дотику прямокутників Π_i і $\Pi_j, i \neq j$, при їх розміщенні в смугі.

Ці означення можна дати, ввівши поряд із поняттями суми та лінійної впорядкованості нечітких чисел поняття характеристичної функції (функціонала) $H(x)$ нечіткого числа x як $H(x): X \rightarrow R^1$, яка діє з множини нечітких чисел X в R^1 (множину дійсних чисел) та узагальнює такі метричні властивості дійсного числа:

- 1) якщо $x \in R^1$, то $H(x) = x$;
- 2) для будь-яких двох нечітких чисел і характеристичної функції H виконувалась рівність $H(A + B) = H(A) + H(B)$;
- 3) для будь-яких трьох нечітких чисел $x = \{(x_1 | \mu_1^x), \dots, (x_\alpha | \mu_\alpha^x)\}, y = \{(y_1 | \mu_1^y), \dots, (y_\beta | \mu_\beta^y)\}, z = \{(z_1 | \mu_1^z), \dots, (z_\gamma | \mu_\gamma^z)\}$, таких, що $\sum_{k=1}^{\alpha} \mu_k^x = \sum_{k=1}^{\beta} \mu_k^y = \sum_{k=1}^{\gamma} \mu_k^z = 1, x_1 < \dots < x_\alpha, y_1 < \dots < y_\beta, z_1 < \dots < z_\gamma$, виконувалось таке правило: якщо $x < y$, то $x + z < y + z$, де " $<$ " означає лінійну впорядкованість;
- 4) $x < y$ тоді і тільки тоді, коли $H(x) \leq H(y)$.

Також необхідно, щоб для операції додавання нечітких чисел виконувались комутативність і асоціативність, тобто $A + B = B + A$ і $(A + B) + D = A + (B + D)$.

Таким чином, необхідно ввести поняття суми, лінійної впорядкованості та характеристичної функції, які б відповідали перерахованим властивостям.

Поняття суми нечітких чисел було введено нами в статті [12].

Сума $A + B$ двох нечітких чисел $A = \{(a_1 | \mu_1^A), \dots, (a_\alpha | \mu_\alpha^A)\}$ і $B = \{(b_1 | \mu_1^B), \dots, (b_\beta | \mu_\beta^B)\}$ утворювалась за допомогою побудови множини пар [12]:

$$\tilde{C} = \{(\tilde{c}_1 | \mu_1^{\tilde{C}}), \dots, (\tilde{c}_n | \mu_n^{\tilde{C}})\} = \left\{ \left(a_1 + b_1 \left| \frac{\mu_1^A \mu_1^B}{\sum_{i=1}^{\alpha} \mu_i^A \sum_{j=1}^{\beta} \mu_j^B} \right. \right), \dots, \left(a_1 + b_\beta \left| \frac{\mu_1^A \mu_\beta^B}{\sum_{i=1}^{\alpha} \mu_i^A \sum_{j=1}^{\beta} \mu_j^B} \right. \right) \right\}$$

$$\left(a_2 + b_1 \left| \frac{\mu_2^A \mu_1^B}{\sum_{i=1}^{\alpha} \mu_i^A \sum_{j=1}^{\beta} \mu_j^B} \right. \right), \dots, \left(a_2 + b_{\beta} \left| \frac{\mu_2^A \mu_{\beta}^B}{\sum_{i=1}^{\alpha} \mu_i^A \sum_{j=1}^{\beta} \mu_j^B} \right. \right), \quad (1)$$

.....

$$\left. \left(a_{\alpha} + b_1 \left| \frac{\mu_{\alpha}^A \mu_1^B}{\sum_{i=1}^{\alpha} \mu_i^A \sum_{j=1}^{\beta} \mu_j^B} \right. \right), \dots, \left(a_{\alpha} + b_{\beta} \left| \frac{\mu_{\alpha}^A \mu_{\beta}^B}{\sum_{i=1}^{\alpha} \mu_i^A \sum_{j=1}^{\beta} \mu_j^B} \right. \right) \right\}.$$

Перші елементи $\tilde{c}_1, \dots, \tilde{c}_{\eta}$, де $\eta = \alpha\beta$, цих пар утворюють мультимножину $\tilde{C}^* = \{\tilde{c}_1, \dots, \tilde{c}_{\eta}\}$ [12]. Основа $S(\tilde{C}^*)$ мультимножини \tilde{C}^* це $S(\tilde{C}^*) = \{c_1, \dots, c_r\}$ – носій нечіткого числа $A+B = \{(c_1|\mu_1), \dots, (c_r|\mu_r)\}$. Значення функції приналежності знаходять за правилом [12]

$$\mu_t = \sum_{\substack{\forall i \in J_{\eta}: \\ c_i = \tilde{c}_t}} \mu_i^{\tilde{c}_t}, \quad i \in J_{\eta}, t \in J_r, \quad (2)$$

тобто значення μ_t визначають як суму таких чисел $\mu_i^{\tilde{c}_t}$, для яких $\tilde{c}_i = c_t$, а r – число різних елементів в \tilde{C}^* .

Отже, маємо такі означення (див. [12]).

Означення 2 [12]. Сумою $A+B$ двох нечітких чисел A і B називається нечітке число $C = \{(c_1|\mu_1), \dots, (c_r|\mu_r)\}$, де $\{c_1, \dots, c_r\} = S(\tilde{C}^*)$ – основа мультимножини $\{\tilde{c}_1, \dots, \tilde{c}_{\eta}\}$, яка визначається за правилом (1), а значення μ_t – за правилом (2).

Означення 3 [12]. Сумою трьох нечітких чисел $A = \{(a_1|\mu_1^A), \dots, (a_{\alpha}|\mu_{\alpha}^A)\}$, $B = \{(b_1|\mu_1^B), \dots, (b_{\beta}|\mu_{\beta}^B)\}$ та $D = \{(d_1|\mu_1^D), \dots, (d_{\delta}|\mu_{\delta}^D)\}$ називають нечітке число $A+B+D = E+D$, де $E = A+B$.

Один із можливих варіантів означення характеристичної функції (функціонала) $H(x)$ нечіткого числа x $H(x): X \rightarrow R^1$ є такий.

Означення 4 [12]. Характеристичною функцією (функціоналом) $H(x): X \rightarrow R^1$ нечіткого числа $A = \{(a_1|\mu_1^A), \dots, (a_{\alpha}|\mu_{\alpha}^A)\}$ називають функцію, яка нечіткому числу $A \in X$ ставить у відповідність число $H(A) \in R^1$ за правилом

$$H(A) = \frac{\sum_{i=1}^{\alpha} a_i \mu_i^A}{\sum_{i=1}^{\alpha} \mu_i^A}.$$

Нехай задано два нечіткі числа: $A = \{(a_1|\mu_1^A), \dots, (a_{\alpha}|\mu_{\alpha}^A)\}$ і $B = \{(b_1|\mu_1^B), \dots, (b_{\beta}|\mu_{\beta}^B)\}$. Позначимо $a = \{a_1, \dots, a_{\alpha}\}$, $b = \{b_1, \dots, b_{\beta}\}$, $u = a \cup b = \{u_1, \dots, u_{\gamma}\}$. Тоді число A можна записати у вигляді

$$A^u = \{(u_1|\mu_1^{A^u}), \dots, (u_{\gamma}|\mu_{\gamma}^{A^u})\},$$

де $\mu_i^{A^u} = \begin{cases} \mu_j^A, & \text{якщо } u_i = a_j \in a, \\ 0, & \text{якщо } u_i \notin a. \end{cases}$

Число B запишемо у вигляді

$$B^u = \{(u_1|\mu_1^{B^u}), \dots, (u_{\gamma}|\mu_{\gamma}^{B^u})\},$$

де $\mu_i^{B^u} = \begin{cases} \mu_j^B, & \text{якщо } u_i = b_j \in b, \\ 0, & \text{якщо } u_i \notin b. \end{cases}$

Наведемо означення впорядкованості нечітких чисел, які були дані в [12].

Означення 5 [12]. Два нечіткі числа A і B називаються впорядкованими за зростанням ($A < B$), якщо:

а) або $\frac{\sum_{i=1}^{\alpha} a_i \mu_i^A}{\sum_{i=1}^{\alpha} \mu_i^A} < \frac{\sum_{j=1}^{\beta} b_j \mu_j^B}{\sum_{j=1}^{\beta} \mu_j^B}$, тобто, коли $H(A) < H(B)$;

б) або $H(A) = H(B)$, тобто $\frac{\sum_{i=1}^{\alpha} a_i \mu_i^A}{\sum_{i=1}^{\alpha} \mu_i^A} = \frac{\sum_{j=1}^{\beta} b_j \mu_j^B}{\sum_{j=1}^{\beta} \mu_j^B}$,

але $\mu_1^{A^u} = \mu_1^{B^u}, \dots, \mu_k^{A^u} = \mu_k^{B^u}, \mu_{k+1}^{A^u} < \mu_{k+1}^{B^u}$, ($k < \gamma$).

Говоритимемо, що A передре B за зростанням.

Означення 6 [12]. Два нечіткі числа A і B називаються впорядкованими за неспаданням (позначається $A < B$), якщо:

а) або $A < B$;

б) або $A = B$, тобто тоді, коли $a_i = b_i$ і $\mu_i^A = \mu_i^B \forall i$.

Для введеної таким чином характеристичної функції, операції додавання та лінійної впорядкованості виконуються зазначені вище властивості [12].

Маючи характеристичну функцію $H(A)$ для нечіткого числа A можна перейти до формалізації понять дотику прямокутників, неперетину їх, перетину (накладання) прямокутників тощо.

Нехай смуга (прямокутник), в якій відбувається розміщення, задана у вигляді $\Pi_0(h_0, d_0)$, де $h_0, d_0 \in R^1$, h_0 – ширина (висота) прямокутника, d_0 – його довжина. Система координат розміщена так, як показано на рис. 2.

Розглянемо розміщення двох прямокутників $\Pi_i(\xi_i, v_i, h_i, d_i)$ і $\Pi_j(\xi_j, v_j, h_j, d_j)$ за умови, що $h_i = h_j = h_0 \in R^1$, а $d_i, d_j \in X$ – множині нечітких чисел, ξ_i, ξ_j , взагалі кажучи, також належать X (нагадаємо, що $R^1 \in X$).

Нехай $\xi_i = x \in R^1$. Тоді отримуємо таке означення.

Означення 7. Прямокутник Π_j назвемо таким, що дотикається до прямокутника Π_i справа (в смузі Π_0), якщо

$$H(x + d_i) = H(\xi_j). \quad (3)$$

Зауваження. Враховуючи властивості характеристичної функції $H(A)$ нечіткого числа A з (3) маємо

$$H(x + d_i) = H(x) + H(d_i) = x + H(d_i).$$

Отже, рівність (3) набуває вигляду

$$x + H(d_i) = H(\xi_j), \quad (4)$$

тобто прямокутник Π_j називається таким, що дотикається до прямокутника Π_i справа (в смузі Π_0), якщо значення характеристичної функції абсциси його полюса дорівнює сумі абсциси полюса прямокутника Π_i та характеристичної функції його (Π_i) довжини.

Приклад 1. Нехай смуга задана так: $\Pi_0(h_0, d_0)$, де $h_0, d_0 \in R^1$.

Розглянемо розміщення двох прямокутників $\Pi_1(\xi_1, v_1, h_1, d_1)$ і $\Pi_2(\xi_2, v_2, h_2, d_2)$ за умови, що $h_0 = h_1 = h_2 \in R^1$, а $d_1, d_2, \xi_1, \xi_2 \in X$.

Нехай $h_0 = 2, d_0 = 10, \Pi_1(\xi_1 = \{(1|1)\}, v_1 = 0, h_1 = 2, d_1 = \{(1|0, 4), (6|0, 6)\})$ і $\Pi_2(\xi_2 = \{(5|1)\}, v_2 = 0, h_2 = 2, d_2 = \{(2|0, 1), (3|0, 5), (4|0, 2)\})$.

Тоді

$$H(\xi_1) = \frac{1 \cdot 1}{1} = 1, H(d_1) = \frac{1 \cdot 0,4 + 6 \cdot 0,6}{0,4 + 0,6} = 4, \xi_1 + H(d_1) =$$

$$= 1 + 4 = 5, H(\xi_2) = \frac{5 \cdot 1}{1} = 5,$$

$$H(d_2) = \frac{2 \cdot 0,1 + 3 \cdot 0,5 + 4 \cdot 0,2}{0,1 + 0,5 + 0,2} = 3,25,$$

$$\xi_2 + H(d_2) = 5 + 3,25 = 8,25.$$

Оскільки $5 = 5$, тобто $\xi_1 + H(d_1) = H(\xi_2)$, і справджується рівність (4), то прямокутник Π_2 дотикається до прямокутника Π_1 справа.

Означення 8. Прямокутник Π_j розміщений правіше прямокутника Π_i в смузі Π_0 (тобто Π_i і Π_j називаються такими, що не перетинаються, не налягають один на одного), якщо

$$H(x + d_i) < H(\xi_j),$$

або, те ж саме,

$$x + H(d_i) < H(\xi_j), \quad (5)$$

тобто прямокутник Π_j розміщений правіше прямокутника Π_i в смузі Π_0 , якщо значення характеристичної функції абсциси його полюса більше, ніж сума абсциси полюса прямокутника Π_i та характеристичної функції його (Π_i) довжини.

Приклад 2. Нехай смуга задана так: $\Pi_0(h_0, d_0)$, де $h_0, d_0 \in R^1$.

Розглянемо розміщення двох прямокутників $\Pi_1(\xi_1, v_1, h_1, d_1)$ і $\Pi_2(\xi_2, v_2, h_2, d_2)$ за умови, що $h_0 = h_1 = h_2 \in R^1$, а $d_1, d_2, \xi_1, \xi_2 \in X$.

Нехай $h_0 = 2, d_0 = 11, \Pi_1(\xi_1 = \{(1|1)\}, v_1 = 0, h_1 = 2, d_1 = \{(1|0, 1), (2|0, 5), (3|0, 4)\})$, $\Pi_2(\xi_2 = \{(6|1)\}, v_2 = 0, h_2 = 2, d_2 = \{(2|0, 1), (3|0, 5), (4|0, 2)\})$.

Тоді

$$H(\xi_1) = \frac{1 \cdot 1}{1} = 1, H(d_1) = \frac{1 \cdot 0,1 + 2 \cdot 0,5 + 3 \cdot 0,4}{0,1 + 0,5 + 0,4} = 2,3,$$

$$\xi_1 + H(d_1) = 3,3,$$

$$H(\xi_2) = \frac{6 \cdot 1}{1} = 6, H(d_2) = \frac{2 \cdot 0,1 + 3 \cdot 0,5 + 4 \cdot 0,2}{0,1 + 0,5 + 0,2} = 3,25,$$

$$\xi_2 + H(d_2) = 6 + 3,25 = 9,25.$$

Оскільки $3,3 < 6$, тобто $\xi_1 + H(d_1) < H(\xi_2)$, і справджується нерівність (5), то прямокутник Π_2 розміщений правіше прямокутника Π_1 .

Означення 9. Прямокутники Π_i і Π_j (що розміщені в смузі Π_0) називаються такими, що перетинаються, якщо

$$H(x) \leq H(\xi_j) < H(x + d_i),$$

або, що те ж саме,

$$x \leq H(\xi_j) < x + H(d_i). \quad (6)$$

Нехай смуга, в якій відбувається розміщення, задана так: $\Pi_0(h_0, D_0)$, де $h_0 \in R^1, D_0 \in X$.

Розглянемо розміщення двох прямокутників $\Pi_i(\xi_i, v_i, h_i, d_i)$ і $\Pi_j(\xi_j, v_j, h_j, d_j)$ за умови, що $h_i = h_j = h_0 \in R^1$, а $d_i, d_j, \xi_i, \xi_j \in X$.

Нехай $\xi_i = x \in X$. Тоді маємо означення.

Означення 10. Прямокутник Π_j назовемо таким, що:

1) дотикається до прямокутника Π_i справа (в смузі Π_0), якщо

$$H(x + d_i) = H(\xi_j),$$

або

$$H(\xi_i) + H(d_i) = H(\xi_j);$$

2) розміщений правіше прямокутника Π_i в смузі Π_0 (тобто Π_i і Π_j називаються такими, що не перетинаються, не налягають один на одного), якщо

$$H(x + d_i) < H(\xi_j),$$

або, що те ж саме,

$$H(\xi_i) + H(d_i) < H(\xi_j);$$

3) перетинаються, якщо

$$H(x) \leq H(\xi_j) < H(x + d_i),$$

або, що те ж саме,

$$H(\xi_i) \leq H(\xi_j) < H(\xi_i) + H(d_i).$$

Приклад 3. Нехай смуга, в якій відбувається розміщення, задана так: $\Pi_0(h_0, D_0)$, де $h_0 \in R^1, D_0 \in X$.

Розглянемо розміщення двох прямокутників $\Pi_1(\xi_1, v_1, h_1, d_1)$ і $\Pi_2(\xi_2, v_2, h_2, d_2)$ за умови $h_0 = h_1 = h_2 \in R^1, d_1, d_2, \xi_1, \xi_2 \in X$.

Нехай $h_0 = 2, D_0 = \{(12|1)\}, \Pi_1(\xi_1 = \{(1|1)\}, v_1 = 0, h_1 = 2, d_1 = \{(1|0,4), (6|0,6)\}), \Pi_2(\xi_2 = \{(5|1)\}, v_2 = 0, h_2 = 2, d_2 = \{(2|0,1), (3|0,5), (4|0,2)\}), \Pi_3(\xi_3 = \{(8|1)\}, v_3 = 0, h_3 = 2, d_3 = \{(2|0,5), (4|0,5)\})$.

Тоді

$$H(\xi_1) = \frac{1 \cdot 1}{1} = 1, H(d_1) = \frac{1 \cdot 0,4 + 6 \cdot 0,6}{0,4 + 0,6} = 4, H(\xi_1) + H(d_1) = 1 + 4 = 5,$$

$$H(\xi_2) = \frac{5 \cdot 1}{1} = 5, H(d_2) = \frac{2 \cdot 0,1 + 3 \cdot 0,5 + 4 \cdot 0,2}{0,1 + 0,5 + 0,2} = 3,25, H(\xi_2) + H(d_2) = 5 + 3,25 = 8,25,$$

$$H(\xi_3) = \frac{8 \cdot 1}{1} = 8, H(d_3) = \frac{2 \cdot 0,5 + 4 \cdot 0,5}{0,5 + 0,5} = 3, H(\xi_3) + H(d_3) = 8 + 3 = 11, H(D_0) = \frac{12 \cdot 1}{1} = 12.$$

Оскільки $5 = 5$, тобто $H(\xi_1) + H(d_1) = H(\xi_2)$, то прямокутник Π_2 дотикається до прямокутника Π_1 справа.

Оскільки $5 < 8$, тобто $H(\xi_1) + H(d_1) < H(\xi_3)$, то прямокутник Π_3 розміщений правіше прямокутника Π_1 .

Оскільки $5 < 8 < 8,25$, тобто $H(\xi_2) < H(\xi_3) < H(\xi_2) + H(d_2)$, то прямокутник Π_2 перетинається з прямокутником Π_3 .

Нехай смуга, в якій відбувається розміщення, задана так: $\Pi_0(H_0, D_0)$, де $H_0, D_0 \in X$.

Розглянемо розміщення двох прямокутників $\Pi_i(\xi_i, v_i, h_i, d_i)$ і $\Pi_j(\xi_j, v_j, h_j, d_j)$ за умови $\xi_i, \xi_j, v_i, v_j, h_i, h_j, d_i, d_j \in X$.

Означення 11. Прямокутник Π_i назовемо таким, що розміщується (поміщається) в смузі Π_0 (рис. 3), якщо

$$\begin{cases} 0 \leq H(\xi_i), \\ H(\xi_i + d_i) \leq H(D_0), \\ 0 \leq H(v_i), \\ H(v_i + h_i) \leq H(H_0), \end{cases}$$

або, що те ж саме,

$$\begin{cases} 0 \leq H(\xi_i) \leq H(D_0) - H(d_i), \\ 0 \leq H(v_i) \leq H(H_0) - H(h_i), \end{cases} \quad (7)$$

а умови (7) назовемо умовами розміщення прямокутника Π_i в смузі Π_0 .

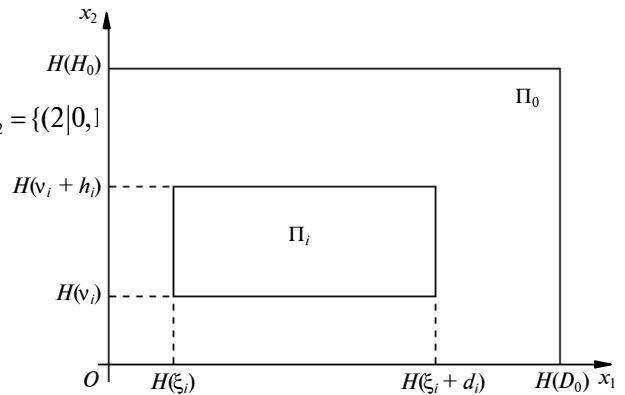


Рис. 3. Ілюстрація розміщення прямокутника Π_i в смузі Π_0

Приклад 4. Нехай смуга, в якій відбувається розміщення, задана так: $\Pi_0(H_0, D_0)$, де $H_0, D_0 \in X$.

Розглянемо розміщення прямокутника $\Pi_1(\xi_1, v_1, h_1, d_1)$ за умови $\xi_1, v_1, h_1, d_1 \in X$.

Нехай $H_0 = \{(6|1)\}, D_0 = \{(12|1)\}$. Прямокутник $\Pi_1(\xi_1, v_1, h_1, d_1)$ задається так: $\Pi_1(\xi_1 = \{(1|0,5), (2|0,5)\}, v_1 = \{(2|0,5), (4|0,5)\}, h_1 = \{(1|0,5), (3|0,5)\}, d_1 = \{(1|0,4), (6|0,6)\})$.

Тоді

$$H(\xi_1) = \frac{1 \cdot 0,5 + 2 \cdot 0,5}{0,5 + 0,5} = 1,5, \quad H(d_1) = \frac{1 \cdot 0,4 + 6 \cdot 0,6}{0,4 + 0,6} = 4,$$

$$H(\xi_1) + H(d_1) = 1,5 + 4 = 5,5,$$

$$H(v_1) = \frac{2 \cdot 0,5 + 4 \cdot 0,5}{0,5 + 0,5} = 3, \quad H(h_1) = \frac{1 \cdot 0,5 + 3 \cdot 0,5}{1} = 2,$$

$$H(v_1) + H(h_1) = 3 + 2 = 5,$$

$$H(H_0) = \frac{6 \cdot 1}{1} = 6, \quad H(D_0) = \frac{12 \cdot 1}{1} = 12,$$

$$H(H_0) - H(h_1) = 6 - 2 = 4, \quad H(D_0) - H(d_1) = 12 - 4 = 8.$$

Прямокутник Π_1 поміщається в смугі Π_0 , оскільки

$$\begin{cases} 0 < 5,5 < 8, \\ 0 < 3 < 4, \end{cases}$$

тобто справджується умова (7).

Означення 12. Прямокутники Π_i та Π_j назвемо такими, що перетинаються, якщо виконуються або (рис. 4) умова

$$\begin{cases} H(\xi_i) \leq H(\xi_j) < H(\xi_i) + H(d_i), \\ H(v_i) \leq H(v_j) < H(v_i) + H(h_i), \end{cases} \quad (8)$$

або (рис. 5) умова

$$\begin{cases} H(\xi_i) \leq H(\xi_j) < H(\xi_i) + H(d_i), \\ H(v_j) \leq H(v_i) < H(v_j) + H(h_j); \end{cases} \quad (9)$$

умови (8) та (9) назвемо умовами взаємного перетину двох прямокутників.

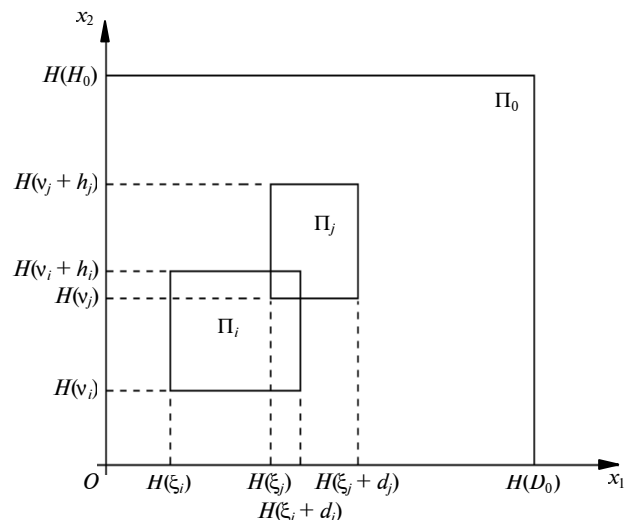


Рис. 4. Ілюстрація умови перетину прямокутників Π_j і Π_i

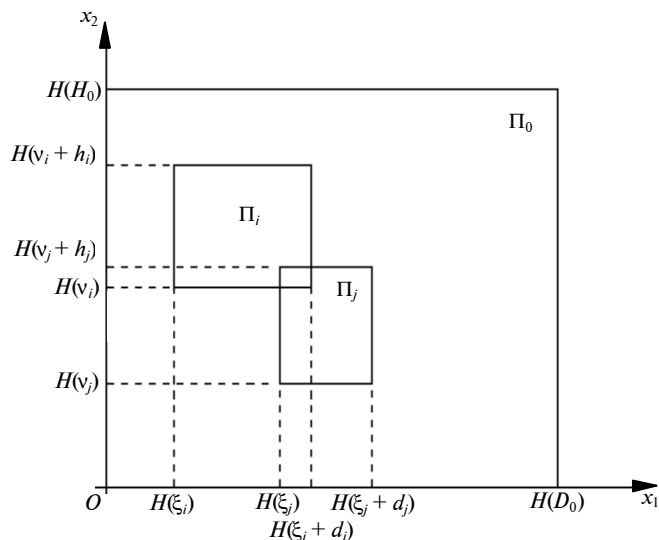


Рис. 5. Ілюстрація умови перетину прямокутників Π_i і Π_j

Приклад 5. Нехай смуга, в якій відбувається розміщення, задана так: $\Pi_0(H_0, D_0)$, де $H_0, D_0 \in X$.

Розглянемо розміщення двох прямокутників $\Pi_1(\xi_1, v_1, h_1, d_1)$ і $\Pi_2(\xi_2, v_2, h_2, d_2)$ за умови $\xi_1, \xi_2, v_1, v_2, h_1, h_2, d_1, d_2 \in X$.

Задано два прямокутники:

$$\begin{aligned} \Pi_1(\xi_1) &= \{(1|0,5), (2|0,5)\}, \quad v_1 = \{(2|0,5), (4|0,5)\}, \quad h_1 = \\ &= \{(1|0,5), (3|0,5)\}, \quad d_1 = \{(1|0,4), (6|0,6)\}, \\ \Pi_2(\xi_2) &= \{(2|0,6), (7|0,4)\}, \quad v_2 = \{(1|0,6), (3,5|0,5)\}, \quad h_2 = \\ &= \{(1|0,5), (3|0,5)\}, \quad d_2 = \{(2|0,1), (3|0,5), (4|0,2)\}. \end{aligned}$$

$$\text{Тоді } H(\xi_1) = \frac{1 \cdot 0,5 + 2 \cdot 0,5}{0,5 + 0,5} = 1,5,$$

$$H(v_1) = \frac{2 \cdot 0,5 + 4 \cdot 0,5}{0,5 + 0,5} = 3, \quad H(h_1) = \frac{1 \cdot 0,5 + 3 \cdot 0,5}{0,5 + 0,5} = 2,$$

$$H(d_1) = \frac{1 \cdot 0,4 + 6 \cdot 0,6}{0,4 + 0,6} = 4,$$

$$H(\xi_1) + H(d_1) = 1,5 + 4 = 5,5, \quad H(v_1) + H(h_1) = 3 + 2 = 5,$$

$$H(\xi_2) = \frac{2 \cdot 0,6 + 7 \cdot 0,4}{0,6 + 0,4} = 4, \quad H(v_2) = \frac{1 \cdot 0,6 + 3,5 \cdot 0,4}{0,6 + 0,4} = 2,$$

$$H(h_2) = \frac{1 \cdot 0,5 + 3 \cdot 0,5}{0,5 + 0,5} = 2,$$

$$H(d_2) = \frac{2 \cdot 0,1 + 3 \cdot 0,5 + 4 \cdot 0,1}{0,1 + 0,5 + 0,2} = 3,25,$$

$$H(\xi_2) + H(d_2) = 5,5 + 3,25 = 8,75, \quad H(v_2) + H(h_2) = 2 + 2 = 4.$$

Оскільки $1,5 < 4 < 5,5$, тобто $H(\xi_1) < H(\xi_2) < H(\xi_1) + H(d_1)$, тобто справджуються умови (9), то прямокутники Π_1 і Π_2 перетинаються.

Означення 13. Прямокутники Π_i і Π_j назвемо такими, що не перетинаються (рис. 6), якщо виконується:

$$H(\xi_j) > H(\xi_i) + H(d_i),$$

або умова

$$H(v_j) > H(v_i) + H(h_i).$$

Іншими словами, виконується сукупність нерівностей

$$\begin{cases} H(\xi_j) > H(\xi_i) + H(d_i), \\ H(v_j) > H(v_i) + H(h_i). \end{cases}$$

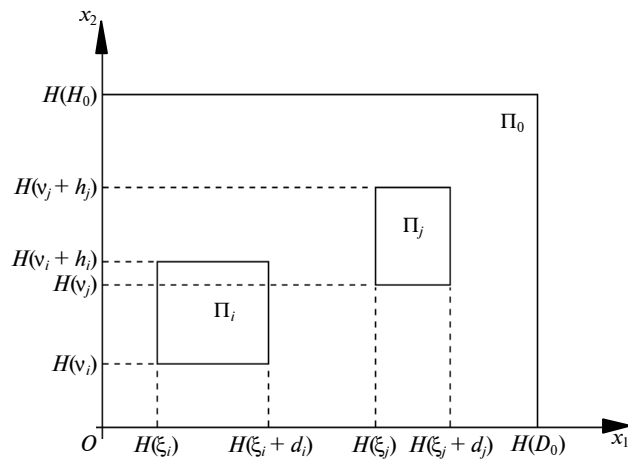


Рис. 6. Ілюстрація умови неперетину прямокутників Π_i і Π_j

Приклад 6. Нехай смуга, в якій відбувається розміщення, задана так: $\Pi_0(H_0, D_0)$, де $H_0, D_0 \in X$.

Розглянемо розміщення двох прямокутників $\Pi_1(\xi_1, v_1, h_1, d_1)$ і $\Pi_2(\xi_2, v_2, h_2, d_2)$ за умови $\xi_1, \xi_2, v_1, v_2, h_1, h_2, d_1, d_2 \in X$.

Задано два прямокутники:

$$\Pi_1(\xi_1 = \{(1|0,5), (2|0,5)\}, v_1 = \{(2|0,5), (4|0,5)\}, h_1 = \{(1|0,5), (3|0,5)\}, d_1 = \{(1|0,4), (6|0,6)\},$$

$$\Pi_2(\xi_2 = \{(4|0,5), (8|0,5)\}, v_2 = \{(1|0,6), (3,5|0,5)\}, h_2 = \{(1|0,5), (3|0,5)\}, d_2 = \{(2|0,1), (3|0,5), (4|0,2)\}.$$

Тоді

$$H(\xi_1) = \frac{1 \cdot 0,5 + 2 \cdot 0,5}{0,5 + 0,5} = 1,5,$$

$$H(v_1) = \frac{2 \cdot 0,5 + 4 \cdot 0,5}{0,5 + 0,5} = 3, \quad H(h_1) = \frac{1 \cdot 0,5 + 3 \cdot 0,5}{0,5 + 0,5} = 2,$$

$$H(d_1) = \frac{1 \cdot 0,4 + 6 \cdot 0,6}{0,4 + 0,6} = 4,$$

$$H(\xi_1) + H(d_1) = 1,5 + 4 = 5,5, \quad H(v_1) + H(h_1) = 3 + 2 = 5,$$

$$H(\xi_2) = \frac{4 \cdot 0,5 + 8 \cdot 0,5}{0,5 + 0,5} = 6, \quad H(v_2) = \frac{1 \cdot 0,6 + 3,5 \cdot 0,4}{0,6 + 0,4} = 2,$$

$$H(h_2) = \frac{1 \cdot 0,5 + 3 \cdot 0,5}{0,5 + 0,5} = 2,$$

$$H(d_2) = \frac{2 \cdot 0,1 + 3 \cdot 0,5 + 4 \cdot 0,1}{0,1 + 0,5 + 0,2} = 3,25,$$

$$H(\xi_2) + H(d_2) = 5,5 + 3,25 = 8,75,$$

$$H(v_2) + H(h_2) = 2 + 2 = 4.$$

Оскільки $6 > 5,5$, тобто $H(\xi_2) > H(\xi_1) + H(d_1)$, то прямокутники Π_1 і Π_2 не перетинаються.

Означення 14. Прямокутники Π_i і Π_j назвемо такими, що дотикаються, якщо виконується: або умова

$$\begin{cases} H(\xi_j) = H(\xi_i) + H(d_i), \\ H(v_i) \leq H(v_j) \leq H(v_i) + H(h_i), \end{cases}$$

або

$$\begin{cases} H(\xi_j) = H(\xi_i) + H(d_i), \\ H(v_i) \leq H(v_j) + H(h_j) \leq H(v_i) + H(h_i), \end{cases}$$

або

$$\begin{cases} H(v_j) = H(v_i) + H(h_i), \\ H(\xi_i) \leq H(\xi_j) \leq H(\xi_i) + H(d_i), \end{cases}$$

або

$$\begin{cases} H(v_j) = H(v_i) + H(h_i), \\ H(\xi_i) \leq H(\xi_j) + H(d_i) \leq H(\xi_i) + H(d_i), \end{cases}$$

або деякі з цих умов виконуються одночасно (рис. 7).

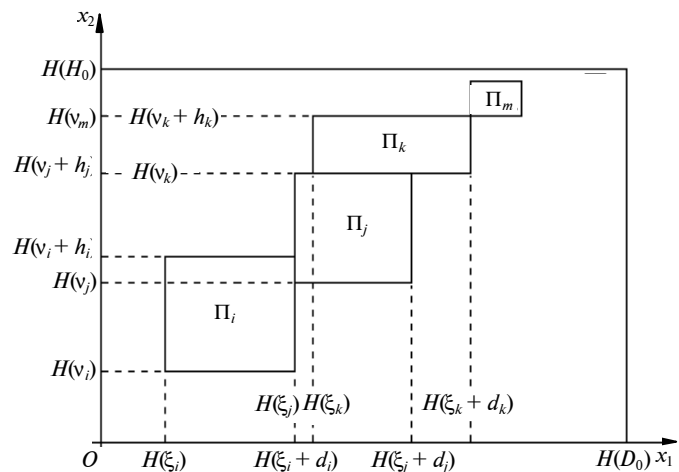


Рис. 7. Ілюстрація дотику прямокутників

Приклад 7. Нехай смуга, в якій відбувається розміщення, задана так: $\Pi_0(H_0, D_0)$, де $H_0, D_0 \in X$.

Розглянемо розміщення двох прямокутників $\Pi_1(\xi_1, v_1, h_1, d_1)$ і $\Pi_2(\xi_2, v_2, h_2, d_2)$ за умови $\xi_1, \xi_2, v_1, v_2, h_1, h_2, d_1, d_2 \in X$.

Задано два прямокутники:

$$\Pi_1(\xi_1 = \{(1|0,5), (2|0,5)\}, v_1 = \{(2|0,5), (4|0,5)\}, h_1 = \{(1|0,5), (3|0,5)\}, d_1 = \{(1|0,4), (6|0,6)\}),$$

$$\Pi_2(\xi_2 = \{(5|0,5), (6|0,5)\}, v_2 = \{(1|0,6), (3,5|0,5)\}, h_2 = \{(1|0,5), (3|0,5)\}, d_2 = \{(2|0,1), (3|0,5), (4|0,2)\}).$$

Тоді

$$H(\xi_1) = \frac{1 \cdot 0,5 + 2 \cdot 0,5}{0,5 + 0,5} = 1,5,$$

$$H(v_1) = \frac{2 \cdot 0,5 + 4 \cdot 0,5}{0,5 + 0,5} = 3, \quad H(h_1) = \frac{1 \cdot 0,5 + 3 \cdot 0,5}{0,5 + 0,5} = 2,$$

$$H(d_1) = \frac{1 \cdot 0,4 + 6 \cdot 0,6}{0,4 + 0,6} = 4, \quad H(\xi_1) + H(d_1) = 1,5 + 4 = 5,5,$$

$$H(v_1) + H(h_1) = 3 + 2 = 5,$$

$$H(\xi_2) = \frac{5 \cdot 0,5 + 6 \cdot 0,5}{0,5 + 0,5} = 5,5, \quad H(v_2) = \frac{1 \cdot 0,6 + 3,5 \cdot 0,4}{0,6 + 0,4} = 2,$$

$$H(h_2) = \frac{1 \cdot 0,5 + 3 \cdot 0,5}{0,5 + 0,5} = 2,$$

$$H(d_2) = \frac{2 \cdot 0,1 + 3 \cdot 0,5 + 4 \cdot 0,1}{0,1 + 0,5 + 0,2} = 3,25,$$

$$H(\xi_2) + H(d_2) = 5,5 + 3,25 = 8,75,$$

$$H(v_2) + H(h_2) = 2 + 2 = 4.$$

Оскільки $5,5 = 5,5$, тобто $H(\xi_2) = H(\xi_1) + H(d_1)$, то прямокутники Π_1 і Π_2 дотикаються.

Означення 15. Розміщенням прямокутника $\Pi_i(\xi_i, v_i, h_i, d_i)$ в смузі $\Pi_0(H_0, D_0)$, де $H_0, D_0 \in$ нечіткими числами, називатимемо розміщення прямокутника в смузі $\Pi_0(h_0, d_0)$, де $h_0 = H(H_0)$, $d_0 = H(D_0)$.

Означення 16. Розміщенням прямокутника $\Pi_i(\xi_i, v_i, h_i, d_i)$ в смузі $\Pi_0(h_0, d_0)$, де $\xi_i, v_i, h_i, d_i \in X$, $h_0, d_0 \in R^1$, називатимемо розміщення прямокутника $\Pi^i(x_i, y_i, h^i, d^i)$ в Π_0 , де $x_i = H(\xi_i)$, $y_i = H(v_i)$, $h^i = H(h_i)$, $d^i = H(d_i)$.

Ввівши означення 15 і 16, одержуємо таке очевидне твердження.

Твердження. Означення 15, 16 та відповідні попередні означення еквівалентні.

Зауважимо, що підхід, розглянутий у даній статті, може бути застосований до будь-якого узагальнення прямокутника (чи то з "інтервальними" розмірами (як інтервал), чи то з "ймовірніс-

ними" (як випадкова величина) тощо), що враховують невизначеність вимірювання розмірів.

Означення 17. Нечітке число A_1 називається мінімальним серед нечітких чисел A_1, A_2, \dots, A_k числом, якщо $A_1 < A_2 < \dots < A_k$.

Означення 18. Нечітке число A_k називається максимальним серед нечітких чисел A_1, A_2, \dots, A_k числом, якщо $A_1 < A_2 < \dots < A_k$.

Побудуємо математичну модель сформульованої задачі упакування прямокутників з нечіткими розмірами, вважаючи, що довжини прямокутників a_i задаються нечіткими числами.

У кожній смужці в оптимальному розв'язку, очевидно, може розміщуватися від одного до $p - (m - 1) = p - m + 1$ прямокутників, де m - кількість смужок, на яку розділено смугу, тобто ціла частина частки від ділення ширини смуги на h . Позначимо $n = m(p - m + 1)$ та введемо до розгляду $n - p$ прямокутників з шириною h та довжиною a_0 , де $a_0 \in$ нечітким числом вигляду $a_0 = \{(0|1)\}$, тобто звичайним нулем, $a_0 \in R^1$.

Тоді можна вважати, що в кожній смужці стоїть рівно $p - m + 1$ прямокутників. Позначимо x_{ij} - нечітку довжину прямокутника, що стоїть у i -й смужці на j -му від початку смуги місці, $i \in J_m, j \in J_{p-m+1}$.

Розглянемо вектор x вигляду

$$x = (x_{11}, \dots, x_{1, p-m+1}, x_{21}, \dots, x_{2, p-m+1}, \dots, x_{i1}, \dots, x_{i, p-m+1}, \dots, x_{m1}, \dots, x_{m, p-m+1}).$$

Утворимо мультимножину $G = \{a_1, \dots, a_p, a_0, \dots, a_0\}$, в якій елемент a_0 зустрічається $n - p$ раз. Тоді вектор x можна розглядати як елемент множини $E_n(G)$ переставлень з елементів мультимножини G , тобто $x \in E_n(G)$. При цьому кожному переставленню x буде відповідати певне розміщення прямокутників у смузі і навпаки.

Використовуючи введені операції додавання, лінійної впорядкованості, знаходження максимального і мінімального нечіткого числа, математичну модель сформульованої задачі упакування прямокутників з нечіткими розмірами можна подати в такому вигляді:

$$F^*(x^*) = \min_{x \in E_n(G)} \max_{1 \leq i \leq m} \sum_{j=1}^{p-m+1} x_{ij}, \quad (10)$$

$$x^* = \arg \min_{x \in E_n(G)} \max_{1 \leq i \leq m} \sum_{j=1}^{p-m+1} x_{ij}, \quad (11)$$

де $\arg f(x)$ позначає точку x , що доставляє значення $f(x)$ функції f .

Формула (10) дає мінімально можливу довжину зайнятої частини смуги у вигляді нечіт-

кого числа, а формула (11) – переставлення x^* , на якій ця довжина $F^*(x^*)$ досягається. Задача може бути розв’язана методом гілок та меж, аналогічно, як це зроблено в [11].

Висновки

У задачах комбінаторної оптимізації використовуються, як правило, параметри, що не містять невизначеності, оскільки їй важко врахувати. У статті здійснено врахування невизначеності в одній із комбінаторних оптимізаційних

задач – задачі упакування прямокутників у випадку, коли один із параметрів прямокутника є нечітким числом. Розглянутий підхід до моделювання такої ситуації може поширюватися на будь-які інші задачі евклідової комбінаторної оптимізації, якщо необхідно враховувати ту чи іншу невизначеність за допомогою нечіткої множини.

У подальшому доцільно направити зусилля на розробку точних та наближених методів розв’язування таких задач.

О.А. Емец, А.О. Емец

ПОСТРОЕНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ОДНОЙ КОМБИНАТОРНОЙ ЗАДАЧИ УПАКОВКИ ПРЯМОУГОЛЬНИКОВ С НЕЧЕТКИМИ РАЗМЕРАМИ

Определено расположение прямоугольников с нечеткими размерами в полосе: касание, пересечение, непересечение, а также расположение прямоугольников с нечеткими размерами в полосе нечеткого размера: попадание в полосу, касание, пересечение, непересечение. Построена новая математическая модель одной задачи упаковки прямоугольников в виде задачи комбинаторной оптимизации на множестве нечетких перестановок.

Oleg O. Yemets', Oleksandra O. Yemets'

THE CONSTRUCTION OF THE MATHEMATICAL MODEL OF THE ONE COMBINATORIAL PROBLEM OF RECTANGLES PACKING WITH FUZZY SIZES

In this paper, we define the arrangement of rectangles with fuzzy sizes in a breadth – tangency, intersection, non-intersection. We also define the arrangement of rectangles with fuzzy sizes in the fuzzy size breadth – tangency, intersection, non-intersection. Finally, we construct a new mathematical model of the one problem of the rectangle packing as a problem of the Euclidian combinatorial optimization on a set of fuzzy permutations.

1. *Сергиенко И.В., Шило В.П.* Задачи дискретной оптимизации: проблемы, методы исследования, решения. – К.: Наук. думка, 2003. – 264 с.
2. *Стоян Ю.Г., Емец О.О.* Теорія і методи евклідової комбінаторної оптимізації. – К.: Ін-т системних досліджень освіти, 1993. – 188 с.
3. *Стоян Ю.Г., Емец О.О., Емец Є.М.* Оптимізація на полірозміщеннях: теорія та методи. – Полтава: РВЦ ПУСКУ, 2005. – 104 с.
4. *Емец О.А., Барболина Т.Н.* Комбинаторная оптимизация на размещениях. – К.: Наук. думка, 2008. – 160 с.
5. *Панишев А.В., Плечистый Д.Д.* Модели и методы оптимизации в проблеме коммивояжера. – Житомир: ЖГТУ, 2006. – 300 с.
6. *Гуляницький Л.Ф.* Розробка моделей і наближених методів комбінаторної оптимізації та їх застосування в інформаційних технологіях: Автореф. дис. ... д-ра техн. наук: 01.05.02 / Ін-т кібернетики ім. В.М.Глушкова НАН України. – К., 2005. – 32 с.
7. *Гребенник І.В.* Математичні моделі та методи комбінаторної оптимізації в геометричному проектуванні: Автореф. дис. ... д-ра техн. наук: 01.05.02 / Ін-т проблем машинобудування ім. А.М. Підгорного. – Харків, 2006. – 34 с.
8. *Павлов О.А., Павлова Л.О.* Принцип розпаралелювання обчислень як засіб підвищення ефективності ПДС-алгоритмів для важкорозв’язуваних комбінаторних задач // Наукові вісті НТУУ “КПІ”. – 1997. – № 1. – С. 22–26.
9. *Емец О.А., Роскладка А.А.* О комбинаторной оптимизации в условиях неопределенности // Кибернетика и системный анализ. – 2008. – № 5. – С. 35–44.
10. *Котман А.* Введение в теорию нечетких множеств. – М.: Радио и связь, 1982. – 432 с.
11. *Роскладка А.А., Емец А.О.* Решение одной комбинаторной задачи упаковки с учетом неопределенности данных, описанной нечеткими числами // Радиоэлектроника и информатика. – 2007. – № 2. – С. 132–141.
12. *Емец О.О., Емец Ол-ра О.* Деякі операції та відношення над нечіткими числами // Наукові вісті НТУУ “КПІ”. – 2008. – № 5. – С. 39–46.

УДК 004.75

П.П. Маслянюк, О.С. Майстренко

СИСТЕМНА ІНЖЕНЕРІЯ ПРОЄКТІВ ІНФОРМАТИЗАЦІЇ ОРГАНІЗАЦІЙНИХ СИСТЕМ**Вступ**

Міжнародні стандарти системної інженерії і сучасні методології реалізації проєктів інформатизації організаційних систем базуються на фундаментальних основах прикладного системного аналізу та теорії систем. Згідно з міжнародними стандартами і рекомендаціями INCOSE (International Council on Systems Engineering) та OMG (Object Management Group), теоретичні положення і практичні рекомендації, опубліковані в [1–5], дають можливість удосконалювати існуючі та розробляти нові методи щодо реалізації процесів системної інженерії проєктів інформатизації організаційних систем (Орг.С) [6–12].

Цілковито зрозуміло, що інформаційно-комунікаційна система (ІКС) створюється для забезпечення діяльності Орг.С, а не навпаки. Саме тому вкрай необхідно при проєктуванні моделі ІКС безпосередньо спиратися на модель Орг.С. Обидві моделі повинні еволюціонувати під час створення проєкту інформатизації та бути взаємозалежними. Зокрема, таким принципом керується методологія MDA (Model Driven Architecture – архітектура, що базується на моделі) [2]. Фаза моделювання, яка передбачена MDA, забезпечує створення двох моделей: моделі бізнес-процесів PIM (Platform Independent Model), що фактично не залежать від програмної реалізації, та моделі PSM (Platform Specific Model), що базується на вибраній технології створення ІКС. Реалізація взаємозв'язку між даними моделями є одним із ключових питань при дослідженні та впровадженні цієї методології.

Створення сучасних інформаційно-комунікаційних систем для інформатизації Орг.С потребує проведення попереднього аналізу Орг.С, варіантів реалізації ІКС, впровадження методології їх розробки та підтримки протягом всього життєвого циклу ІКС [10,11]. Існуючі підходи та процеси розробки проєктів інформатизації не пристосовані до створення ІКС для широкого класу Орг.С [11]. Тому актуальною постає задача розробки технології системної інженерії із застосуванням прикладного системного ана-

лізу та сучасних процесів розробки (development process) на основі графічних мов моделювання.

Постановка задачі

Мета дослідження – розробка основних положень технології системної інженерії проєктів інформатизації Орг.С на основі методів прикладного системного аналізу і компонентного процесу реалізації проєктів інформатизації Орг.С. Системний аналіз проєктів інформатизації передбачає декомпозицію проєкту інформатизації на компоненти за загальносистемними ознаками та розробку ІКС із застосуванням UML (Unified Modeling Language).

Об'єкт дослідження – організаційні системи всіх форм власності.

Предмет дослідження – структурне і динамічне представлення процесів інформатизації організаційних систем на всіх етапах їх життєвого циклу.

Системна інженерія проєктів інформатизації організаційних систем

Системна інженерія – це, як правило, міждисциплінарний ітеративно-інкрементний процес розробки продуктів або процесів на основі теорії систем, що базується на використанні певних принципів декомпозиції системи на частини і створення таких систем на основі вимог користувачів.

Тут під “системою” ми розуміємо множину визначених сутностей і відношень між ними, необхідну і достатню для існування системи [10, 11].

Тоді, за аналогією, інформаційно-комунікаційна система – це множина визначених сутностей інформатизації і обумовлених зв'язків між ними, необхідна і достатня для забезпечення досягнення мети інформатизації Орг.С.

Системна інженерія проєктів інформатизації Орг.С спрямована насамперед на розробку максимально ефективних ІКС, скорочення витрат та часу на проєктування і експлуатацію, автоматизацію проєктування, генерацію кодів програмних систем і програмних продуктів.

Виходячи з цього методологія системної інженерії SE (System Engineering) проєктів інформатизації організаційних систем складається з розв'язання трьох класів задач: виділення множини сутностей, необхідних і достатніх для реалізації проєкту інформатизації Орг.С;

розробки бізнес-моделі Орг.С; розробки проекту інформаційно-комунікаційної системи для реалізації та досягнення мети проекту інформатизації Орг.С [10, 11].

Процес системної інженерії проектів інформатизації, фази, стадії та ітерації, відповідно до стандартів і рекомендацій INCOSE та OMG, наведено на рис. 1.

Процес розробки (development process) визначається як упорядкований, достатній і функ-

ціонально повний ряд робіт з розробки проектів інформатизації організаційних систем із заданими показниками ефективності.

Для реалізації методології системної інженерії проектів інформатизації Орг.С в [11] запропоновано один із можливих варіантів удосконаленого бізнес-профілю, який забезпечує представлення Орг.С і процесів інформатизації Орг.С як систему визначених сутностей та відношень між ними (рис. 2).

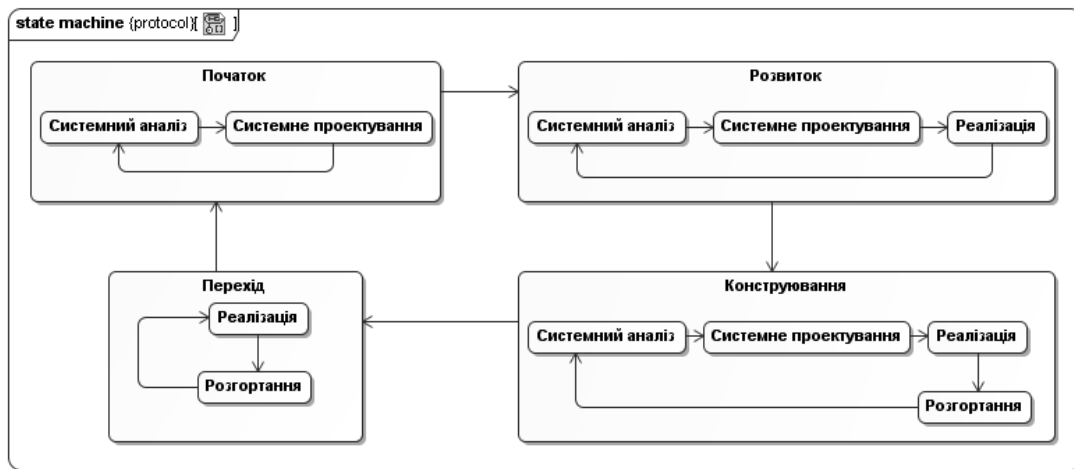


Рис. 1. Фази, стадії та ітерації системної інженерії проектів інформатизації Орг.С

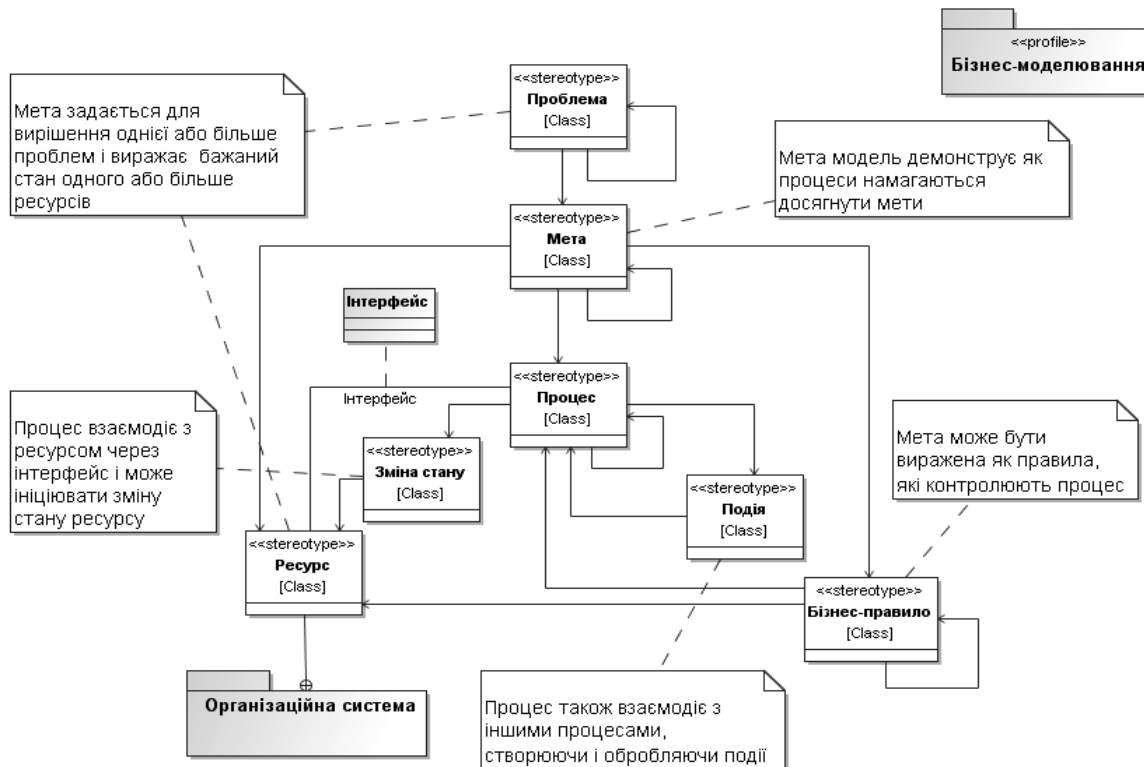


Рис. 2. Удосконалений бізнес-профіль Орг.С. Діаграма класів у нотатції UML

Бізнес-профіль є підмножиною існуючої базової метамоделі, тобто містить множину визначених стереотипів та обмежень. У моделі стереотип застосовується до елемента відповідного метатипу, а значення метаатрибуту присвоюються розробником моделі. Стереотипи являють собою визначені базові сутності Орг.С (див. рис. 2).

Бізнес-модель Орг.С, що базується на запропонованому бізнес-профілі, виконується за допомогою мови графічного моделювання UML. З точки зору автоматизації проектування ІКС і представлення результатів системного аналізу Орг.С, найдоцільніше виконувати графічне моделювання. Однак на деяких стадіях системного аналізу і системного проектування для більш точного дослідження особливостей Орг.С та її складових сутностей слід також виконувати і математичне моделювання.

Процес графічного моделювання передбачає застосування механізму профілювання допустимими засобами уніфікованої мови моделювання (profile in Unified Modeling Language), тобто визначення множини обмежених розширень базової метамоделі, які адаптують її для конкретної платформи або області [9].

Методологія бізнес-моделювання базується на виділенні базових системних сутностей

Орг.С: *мети діяльності, бізнесі-процесу, бізнесі-правил, персоналі і ресурсах*, необхідних і достатніх для проведення визначеної діяльності [5, 9, 11]. Ці сутності разом із процесом інформатизації і загальносистемними критеріями декомпозиції ІКС на окремі компоненти і формують бізнес-профіль.

Під *бізнес-профілем* в загальному випадку розуміється набір стандартів і технологій інформатизації, які зорієнтовані на реалізацію системної інженерії проектів інформатизації Орг.С [5, 9, 11].

Системні сутності організаційних систем

Бізнес-профіль базується на основних системних сутностях Орг.С: *мета діяльності, бізнес-процес, бізнес-правила, ресурси* [5,11].

Сутність *мета діяльності* визначає цілі і мету діяльності як Орг.С в цілому, так і кожного бізнес-процесу, зокрема. Мета задається для вирішення однієї або більше проблем і виражає бажаний стан ресурсів.

Сутність *бізнес-процес* – це стійка, цілеспрямована сукупність взаємопов'язаних видів діяльності, що, згідно з певною технологією, перетворюють вхідні ресурси у вихідні, які мають цінність для користувача [5, 13, 14] (рис. 3).

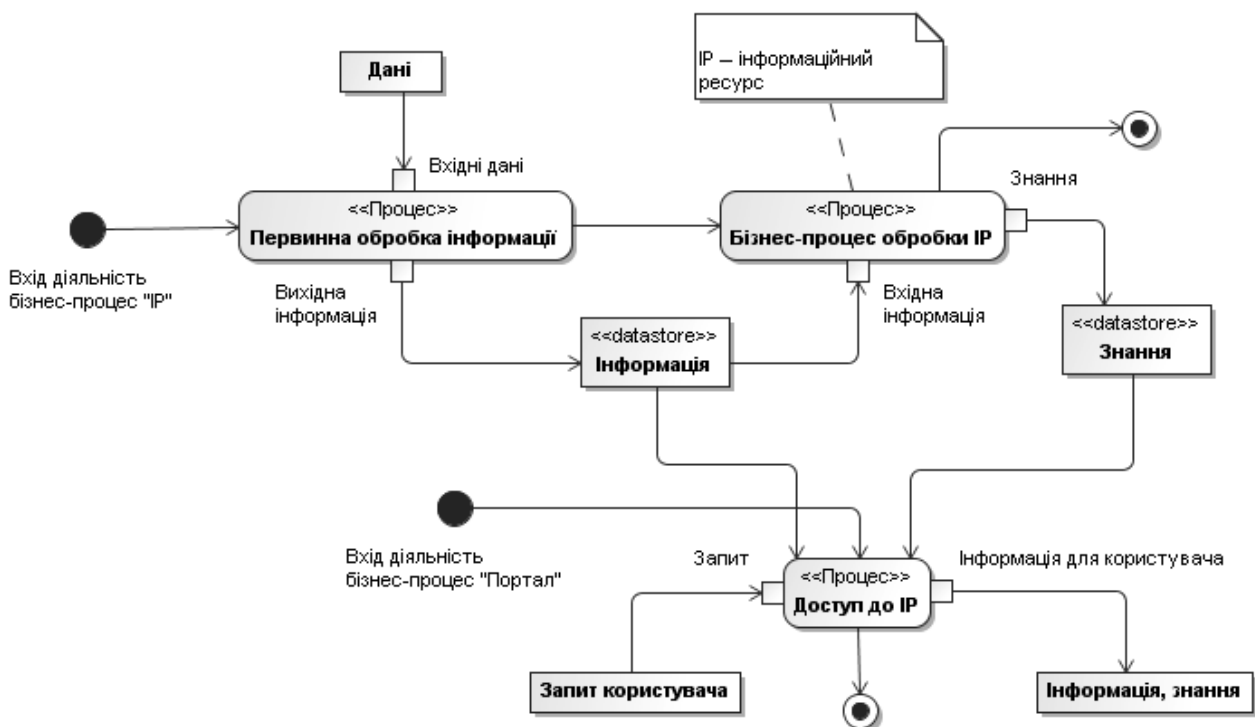


Рис. 3. Фрагмент діаграми діяльності UML AD бізнес-процесів Орг.С

Найбільш широкі класи бізнес-процесів, які використовуються практично в усіх Орг.С, це – корпоративне управління, стратегічний менеджмент, маркетинг, продаж, виробництво, набір персоналу, підтримка інформаційних ресурсів та фінансовий менеджмент.

Динамічне представлення бізнес-процесів за допомогою діаграми діяльності в нотатції UML (UML AD) являє собою моделювання бізнес-процесів із використанням семантики мереж Петрі (див. рис. 3). При цьому маркерами (“фішками”) мережі Петрі є об’єкти, які передаються в діяльності (activity) між діями (action) через вхідні та вихідні з’єднання (input, output pins).

Сутність *бізнес-правила* накладає статичні і динамічні обмеження на бізнес-процес для досягнення мети. Обмеження, що накладаються на бізнес-моделі, можуть бути представлені бізнес-правилами з використанням структурованої природної мови. Бізнес-правила формуються стратегічним менеджментом Орг.С і описують завдання, які повинні виконувати бізнес-процеси.

Прикладами узагальнених бізнес-правил є маркетингові стратегії, політика ціноутворення, практика керування взаємовідносинами із замовниками, політика роботи з персоналом та законодавчі обмеження.

Бізнес-правила регламентують реалізацію, поведінку і взаємодію бізнес-процесів Орг.С. Їх можна представити за допомогою елементів теорії множин. При цьому необхідно надати правила переходу між елементами графічного представлення (асоціації між класами, атрибути

класів, операції класів, асоційовані класи) та функціональними елементами. Для інтеграції в бізнес-модель бізнес-правила можуть бути виражені з використанням мови OCL (Object Constraint Language – мова об’єктних обмежень). Наприклад, вираження асоціації між класами C_0 і C_1 (рис. 4) можна описати в такому вигляді:

$$\forall C_0 : x \quad \forall C_1 : y (r_1(x) = y \leftrightarrow r_0(y) = x),$$

$$\text{якщо } m_0 = m_1 = 1;$$

$$\forall C_0 : x \quad \forall C_1 : y (y \in r_1(x) \leftrightarrow r_0(y) = x),$$

$$\text{якщо } m_0 = 1, m_1 \neq 1;$$

$$\forall C_0 : x \quad \forall C_1 : y (r_1(x) = y \leftrightarrow x \in r_0(y)),$$

$$\text{якщо } m_0 \neq 1, m_1 = 1.$$

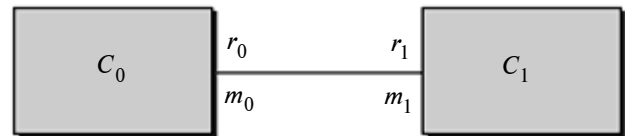


Рис. 4. Фрагмент представлення діаграми класів у нотатції UML

Сутність *ресурси* – об’єкти (матеріальні і нематеріальні сутності), які діють або використовуються при реалізації бізнес-процесів. Ресурси – це сутності, що споживаються, створюються або використовуються бізнес-процесами [5, 9–11, 13, 14]. На рис. 5 і 6 показано представлення ресурсів Орг.С відповідно до їх

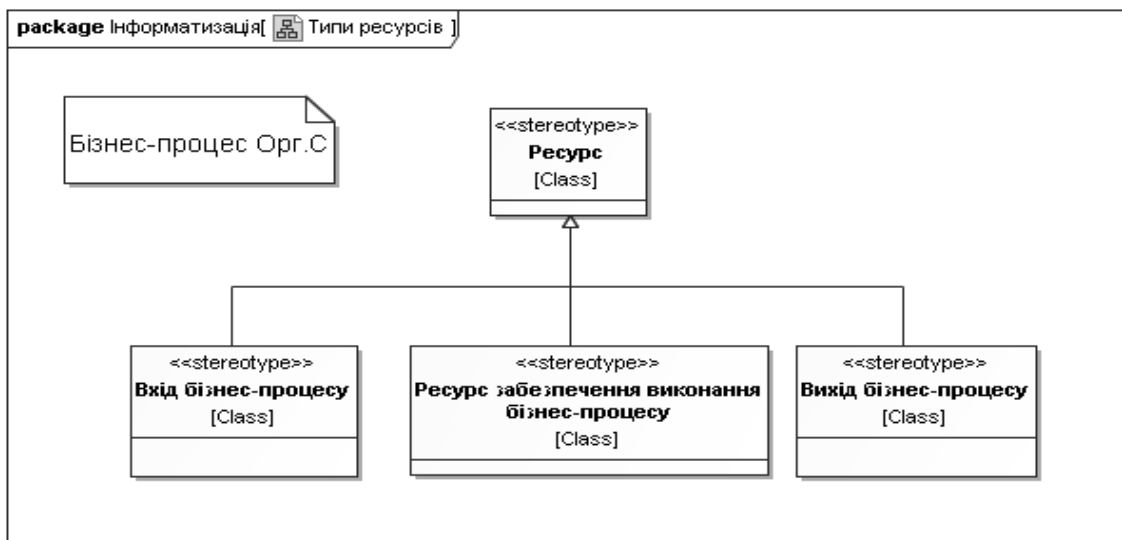


Рис. 5. Системне представлення ресурсів відносно процесів

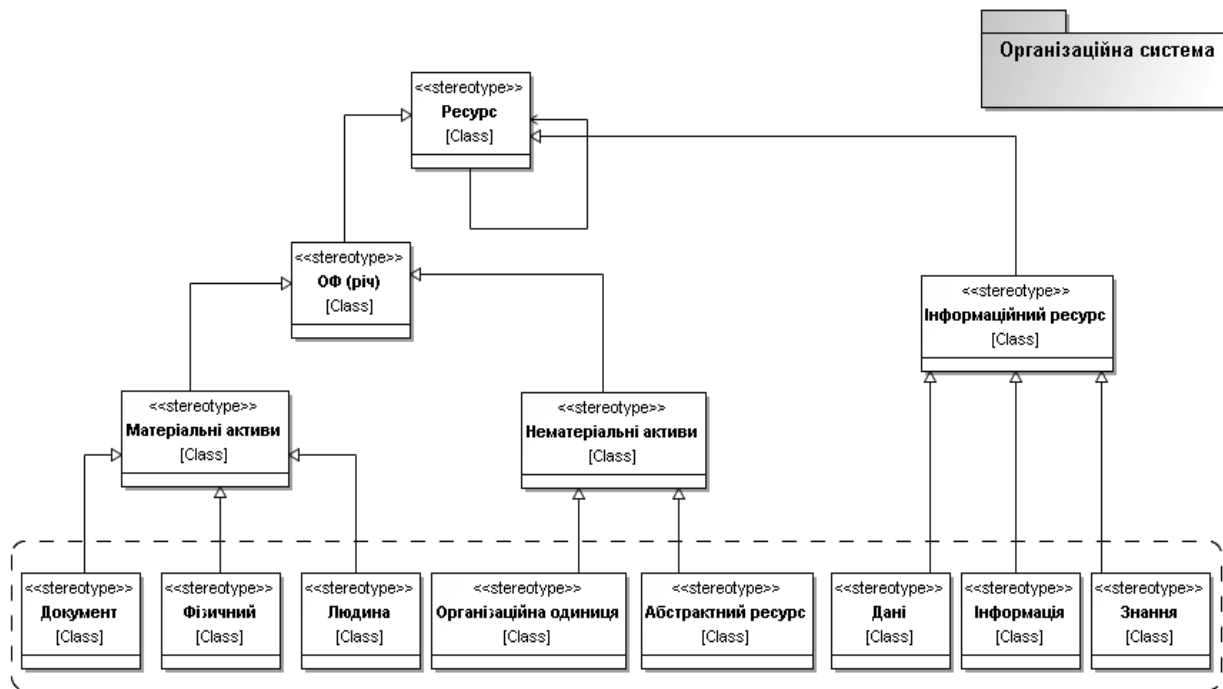


Рис. 6. Системне представлення ресурсів відповідно до їх сутностей

застосування та класифікації. Прикладами ресурсів є організаційна структура, фізичний ресурс, людина, документ, дані, інформація та знання.

Використання UML State Charts реалізує процес моделювання ресурсів на основі теорії скінченних автоматів. На рис. 7 наведено перетворення вхідних даних, інформації і знань під впливом бізнес-процесів обробки даних, обробки інформації та синтезу знань.

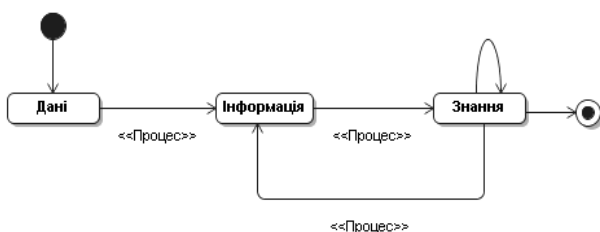


Рис. 7. Фрагмент діаграми UML State Chart бізнес-ресурсів

Таким чином, четвірка < мета діяльності, бізнес-процес, бізнес-правила, ресурси > реалізує систему сутностей, що необхідна і достатня для побудови бізнес-моделі Орг.С для обґрунтування та реалізації максимально ефективного проекту інформатизації Орг.С.

Безпосередньо процес моделювання бізнес-процесів як основної складової частини

Орг.С виконується в нотатції BPMN (Business Process Modeling Notation – нотатія моделювання бізнес-процесів) або з використанням діаграм діяльності UML. Для представлення інших сутностей Орг.С і їх зв'язків із бізнес-процесами використовуються діаграми класів (class diagram), діаграми діяльності (activity diagram) та діаграми станів (state chart diagram) UML.

Бізнес-модель ІКС

Визначення системних сутностей і розробка ефективної бізнес-моделі Орг.С створює передумови для розробки ефективної ІКС. Модель ІКС забезпечує логічний перехід від техніко-економічного обґрунтування до ескізного і технічного проектування, створення дослідного зразка та проведення випробувань. На рис. 8 показано структурне представлення процесів моделювання інформаційно-комунікаційної системи Орг.С і засоби його реалізації.

Конкретні варіанти бізнес-моделей і моделей ІКС використовуються при узгодженні та реалізації ІКС, а також при генерації програмного коду засобами автоматизації проектування.

Системна інженерія ІКС передбачає використання основних засобів інформатизації Орг.С для реалізації бізнес-моделі ІКС [6]:

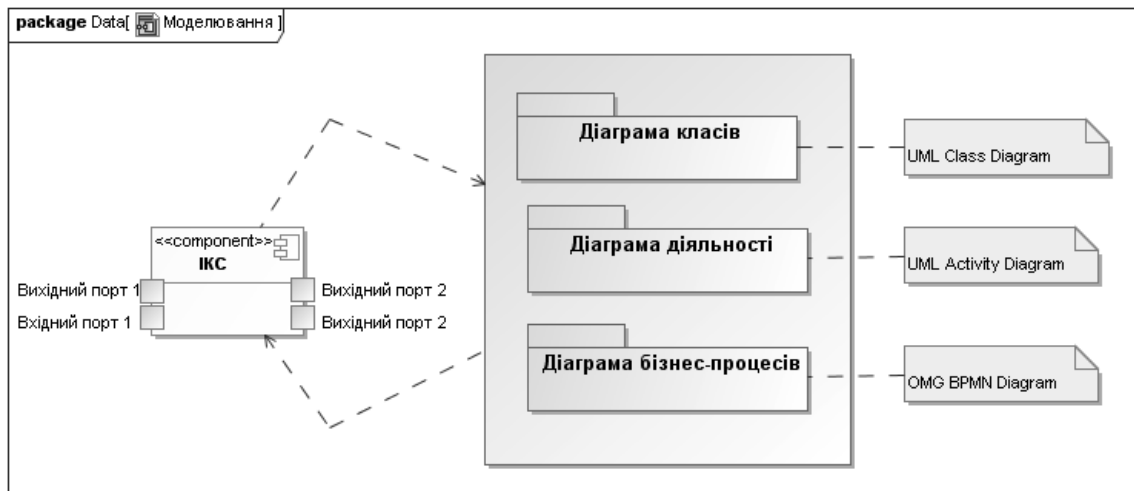


Рис. 8. Структурне представлення процесу моделювання ІКС

- організаційних технологій, технологій керування проектами інформатизації, технологій прикладного системного аналізу та CASE-технологій розробки проектів інформатизації;
- інтегрованих засобів здійснення комунікацій із загальнодержавним інформаційним простором та здійснення зовнішніх комунікацій з Орг.С інших держав;
- термінального обладнання і засобів доступу до інформаційних ресурсів як багатофункціональних платформ різних виробників і постачальників;
- мереж: первинного доступу, телефонних мереж, IP-мереж, безпроводових мереж, оптичних мереж та мультисервісних мереж;
- послуг – обробки, передачі і збереження голосу, даних та відео, інтеграції в структуру мереж інтелектуальних серверів;
- інформаційних ресурсів – файлових систем, персональних і розподілених баз даних, інформаційних сховищ, інформаційних колекторів, Web-ресурсів, публічних ресурсів зовнішніх Орг.С.
- технологій підготовки, підтримки прийняття та реалізації рішень:
 - засобів автоматизації комунікацій, підготовки документів і корпоративного документообігу, контролю за виконанням наказів і розпоряджень, персональних баз даних, класифікаторів і довідників, предметно-орієнтованих інформаційних систем;
 - інтелектуалізованих систем і технологій керування бізнес-процесами;
 - інтелектуалізованих комунікаційних технологій;
 - інтелектуалізованих систем навчання і тренування;

– інтелектуалізованих інформаційних технологій керування безпекою корпоративних ІКС.

Системна інженерія передбачає застосування ітеративно-інкрементного і компонентного процесів розробки із загальносистемним критерієм поділу проекту інформатизації на частини. Такий підхід може представляти ІКС набором незалежних компонентів, які реалізуються та взаємодіють між собою на основі специфікацій [15]. В цьому випадку модель ІКС являє собою діаграму компонентів (component diagram) в нотатції UML (рис. 9).

Компоненти – програмно-апаратні системи, такі як *корпоративний портал, інформаційні ресурси* та інші, що створюються окремо й незалежно один від одного, але інтегруються на системному рівні в єдиний компонент – ІКС на основі відкритих іменованих специфікацій та інтерфейсів; тобто компонент має специфікацію, відповідає стандартам, може бути представлений структурою модулів, встановлений в ІКС і має реалізацію. Компоненти поєднані між собою через пари іменованих інтерфейсів (required і provided interfaces).

Необхідний набір характеристик і параметрів моделі реалізується з використанням об'єктної мови OCL. Це дає можливість вже на етапі "Початок" [11, 12] отримати варіант специфікації ІКС в цілому, тобто формалізований опис властивостей, характеристик і функцій об'єктів, компонентів, пакетів та способів і правил їх взаємодії в системі. Характеристики формуються на основі результатів проведення процедур системного аналізу [1] – цільового, ситуаційного та інформаційного.

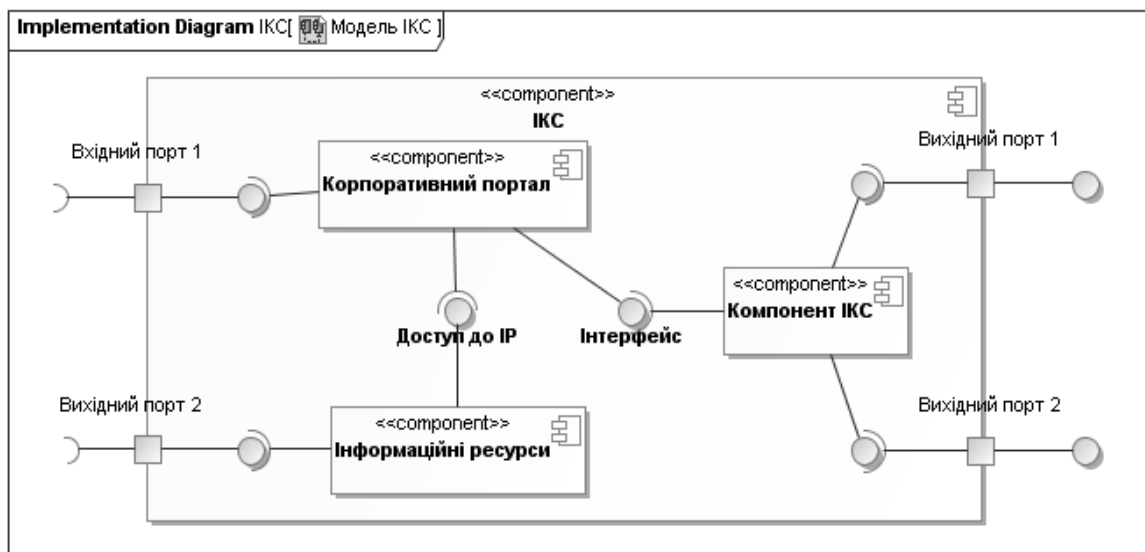


Рис. 9. Бізнес-модель ІКС

Основні компонентні елементи бізнес-моделі ІКС

Переважає більшість ІКС містить у собі такі основні компоненти, як *інформаційний ресурс* і *засоби доступу* до інформаційного ресурсу.

Корпоративний портал – це інтегрований інтерфейс із персоналізацією доступу до корпоративної системи, систематизованих інформаційних технологій та інформаційних ресурсів ІКС [16]. Під поняттям “корпоративний портал” слід розуміти функціонально повну частину організаційної системи, яка надає користувачам єдину точку доступу до внутрішніх і зовнішніх інформаційних ресурсів, необхідних для прийняття обґрунтованих управлінських рішень.

Для представлення множини виключно бізнес-процесів на програмному рівні можна використовувати поняття “сервіс” або ж “веб-сервіс” теорії корпоративних порталів – це цілком окремий об’єкт, який виконує індивідуальну, особливу бізнес-функцію або функцію інфраструктури. Таке представлення виконується за допомогою BPEL4WS (Business Process Execution Language for Web Service – мова виконання бізнес-процесів для веб-сервісів). Перехід від бізнес-моделі до моделі “Компоненти порталу” можливий з використанням автоматизованих засобів, що генерують програмну та програмно-апаратну модель з моделі опису бізнес-процесів.

Дані, інформація і знання – сутності, які можуть відображати об’єкти, процеси та явища навколишнього середовища і є абстрактними

об’єктами [17]. Засобом їх матеріалізації є інформаційний ресурс.

Інформаційний ресурс, згідно із законодавством України, – це сукупність документів в інформаційних системах (бібліотеках, архівах, банках даних тощо) [17]. Інформаційні ресурси використовуються під час реалізації бізнес-процесів. Модель Орг.С описує вимоги до інформаційних ресурсів, регламентує порядок їх обробки, зберігання та використання. Відповідно до цих вимог розробляється необхідний інформаційний ресурс Орг.С. Прототипування інформаційних ресурсів – одне з основних завдань системної інженерії проектів інформатизації Орг.С. Під прототипуванням інформаційних ресурсів розуміється створення нових видів інформаційних ресурсів на основі існуючих даних, інформації, знань [17].

Специфікація вимог до ресурсу і визначення іменованих інтерфейсів дозволяє розділити процес розробки ресурсу на незалежні компоненти, які можуть бути спроектовані і розроблені окремо. Визначені вимоги дають можливість обґрунтовано вибрати засоби створення окремих компонентів ресурсу. Використання компонентного процесу та іменованих специфікацій забезпечує інтеграцію розроблених окремо компонентів інформаційного ресурсу на стадіях реалізації та розгортання.

Висновки

Запропоноване рішення технології системної інженерії проектів інформатизації Орг.С на

основі методів прикладного системного аналізу та компонентного процесу реалізації проектів інформатизації дає змогу систематизувати та упорядкувати процес розробки проектів інформатизації Орг.С.

Системний аналіз проектів інформатизації передбачає декомпозицію проекту інформатизації на компоненти за загальносистемними ознаками та розробку ІКС із застосуванням UML (Unified Modeling Language).

Таким чином, технологія створення проектів інформатизації Орг.С специфікує і дає можливість налагодити процес розробки й розгортання ІКС на всіх етапах її життєвого циклу. На основі фаз розробки ітеративного процесу із загальносистемним критерієм поділу визначається принцип застосування технології моделювання Орг.С. Профіль моделювання застосовується при створенні графічної моделі на етапі бізнес-моделювання, що визначає всі необхідні і достатні складові сутності Орг.С для реалізації, впровадження і оцінки проекту ін-

форматизації. Безпосередньо процес реалізації компонентів (програмних систем) виконується автоматизовано за рахунок використання інструментарію мови UML.

Результати дослідження пропонуються для реалізації системної інженерії проектів інформатизації організаційних систем в частині:

1) застосування прикладного системного аналізу для виділення та представлення бізнес-сутностей Орг.С і відношень між ними;

2) використання удосконаленого бізнес-профілю для реалізації бізнес-моделювання Орг.С;

3) створення компонентної моделі інформаційно-комунікаційної системи Орг.С.

Таким чином, застосування прикладного системного аналізу і компонентного процесу розробки дає можливість автоматизувати процеси системної інженерії проектів інформатизації Орг.С на всіх етапах життєвого циклу малих (локальних), середніх (регіональних) та великих (глобальних) ІКС.

П.П. Маслянюк, А.С. Майстренко

СИСТЕМНАЯ ИНЖЕНЕРИЯ ПРОЕКТОВ ИНФОРМАТИЗАЦИИ ОРГАНИЗАЦИОННЫХ СИСТЕМ

Системная инженерия проектов информатизации организационных систем охватывает все этапы жизненного цикла информационно-коммуникационных систем. Итеративно-инкрементный процесс разработки, в соответствии с международными стандартами, на всех фазах и итерациях обеспечивает выделение множества сущностей, необходимых и достаточных для реализации проекта информатизации Орг.С, разработку бизнес-модели Орг.С и разработку проекта информационно-коммуникационной системы для реализации и достижения цели проекта информатизации Орг.С. Процесс бизнес-моделирования реализуется с помощью бизнес-профиля, который выделяет системные сущности и отношения между ними.

P.P. Maslyanko, O.S. Maystrenko

THE SYSTEM ENGINEERING OF ORGANIZATIONAL SYSTEM INFORMATIZATION PROJECTS

In this paper, we highlight that the system engineering of organizational system informatization projects includes all stages of informative-communicative systems lifecycle. We consider the iterative-incremental development process, which complies with international standards and provides the abstraction of a set of entities necessary and sufficient for implementation of Org.S informatization projects, development of Org.S business model and informative-communicative system to achieve the goal of Org.S informatization project. Thus, we show that a business profile, which separates the system entities and their relations contributes to the implementation of the business modeling process.

1. *Згуровский М.З., Панкратова Н.Д.* Системный анализ. Проблемы, методология, приложения. – К.: Наук. думка, 2005. – 744 с.
2. *MDA Explained: The Model Driven Architecture-Practice and Promise* 9780321194428 (032119442X), Addison Wesley, 2003.
3. *OMG Unified Modeling Language (OMG UML), Superstructure, V2.1.2* November. – 2007 <http://www.omg.org/docs/formal/07-11-02.pdf>
4. *Koehler J., Hauser R., Sendall S., Wahler M.* Declarative techniques for model-driven business process integration // IBM systems journal. – 2005. – 44, N 1.

5. Буч Г., Якобсон А., Рамбо Дж. UML. Классика CS. – 2-е изд. / Пер. с англ.; под общей ред. С. Орлова. – СПб.: Питер, 2006. – 736 с.
6. Маслянюк П.П. Концепція інформатизації корпоративних структур // Наукові вісті НТУУ “КПІ”. – 2001. – № 3. – С. 45–50.
7. Маслянюк П.П. Технология информатизации корпоративных структур. Ч.1 // Корпоративные системы. – 2001. – № 1. – С. 17–19.
8. Маслянюк П.П. Технология информатизации корпоративных структур. Ч.2 // Там же. – № 4. – С. 19–23.
9. Ericsson H.-E., Penker M. Business Modeling with UML: Business Patterns at work – Wiley Computer Publishing, 2000.
10. Маслянюк П.П. Основні положення методологій системного проектування інформаційно-комунікаційних систем // Наукові вісті НТУУ “КПІ”. – 2007. – № 6. – С. 54–60.
11. Маслянюк П.П. Системне проектування процесів інформатизації // Там же. – 2008. – № 1. – С. 28–36.
12. Maslyanko P., Maystrenko O. The research of business modeling technologies for informative-communicative systems design // Materials of international conference TCSET 2008. – Lviv, 2008.
13. Маслянюк П.П., Майстренко О.С. Система моделювання бізнес-процесів організаційної структури // Праці XIII Всеукр. наук. конф. “Сучасні проблеми прикладної математики та інформатики”. – Львів, 2006. – С. 103.
14. Репин В.В., Елиферов В.Г. Процессный подход к управлению. Моделирование бизнес-процесов. – М.: РИИ “Стандарты и качество”, 2004. – 408 с.
15. Маслянюк П.П. Компонентні процеси системного проектування інформаційно-комунікаційних систем // Наукові вісті НТУУ “КПІ”. – 2008. – № 2. – С. 29–38.
16. Маслянюк П.П., Стокоз К.В. Розробка та дослідження технологій автоматизованого проектування корпоративних порталів // Сучасні проблеми прикладної математики та інформатики. – Львів, 2006.
17. Маслянюк П.П., Лиссов П.М. Інформаційні ресурси та засоби їх створення // Вісн. Східноукр. нац. ун-ту ім. Володимира Даля. – 2007. – № 5 (111). – С. 141–145.

Рекомендована Радою
факультету прикладної математики
НТУУ “КПІ”

Надійшла до редакції
10 листопада 2008 року

УДК 581.52

Г.П. Повещенко

ДИНАМІЧНІ І ЧАСОВІ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПРОЦЕСУ СПІВІСНУВАННЯ

Вступ

Природа створила замкнутий трофічний (харчовий) ланцюг, тобто органічна речовина планети здійснює замкнутий цикл перетворення життя. Це стратегія природи за принципом “з’їсти пирога, щоб він був цілим” (Ю. Одум). Жодна система не може існувати без використання ресурсів, які майже завжди є обмеженими, що й спричиняє конкуренцію за них та відповідне насичення процесу. Незмінність обсягу ресурсів означає або їх відновлюваність, або таку кількість, що споживання практично їх не змінює. Необмежений обсяг ресурсів до існування популяції має своїм наслідком її необмежене зростання, що в більшості реальних ситуацій не відповідає дійсності [1–3].

Постановка задачі

Характеристики структури і поведінки системи істотно змінюються під впливом взаємних потоків ресурсів до існування між системою та її оточенням. Задачею даного дослідження є спроба визначити основні динамічні і часові характеристики системи на прикладі моделі процесу співіснування видів, прототипом якої є відома модель Лоттки–Вольтерри [2, 3]. Припускається, що термін “співіснування” може бути поширений за межі тваринного світу.

Модель співіснування видів з обмеженням ресурсів

Видами співіснування є “жертва”, “хижак” та “ресурси для жертви”. Для врахування обмеженості ресурсів модель співіснування видів “жертва”–“хижак”–“ресурси для жертви” можна записати у вигляді системи [1]

$$\frac{dx}{d\tau} = x(y_*z - yz_*), \quad (1)$$

$$\frac{dy}{d\tau} = y(xz_* - x_*z), \quad (2)$$

$$\frac{dz}{d\tau} = z(x_*y - xy_*). \quad (3)$$

Тут $x = X/N$; $y = Y/N$; $z = Z/N$ – зведені значення біомаси “жертви”, “хижака”, “ресурсів для жертви” (за припущенням, відновлюваності ресурсів); X, Y, Z – абсолютні значення біомаси “жертви”, “хижака”, “ресурсів для жертви”; x_*, y_*, z_* – відповідні зведені стаціонарні значення; $\tau = t/T_s$; t – поточний час; T_s – характерний час еволюції системи або її часовий масштаб, одна з часових характеристик системи; $N = X + Y + Z = \text{const}$ – загальна біомаса системи або її несуча здатність, яка вважається незмінною на певному інтервалі часу. Це – потенціал, потужність, ступінь можливостей, одна з динамічних характеристик системи. Зауважимо, що визначення несучої здатності системи є одним з етапів системного аналізу.

В разі незмінного обсягу ресурсів

$$z = z_* \quad (4)$$

система (1)–(3) набуває вигляду загальновідомої моделі співіснування видів “жертва–хижак” Лоттки–Вольтерри [2–4]

$$\frac{dx}{d\tau} = x(y_* - y), \quad (5)$$

$$\frac{dy}{d\tau} = y(x - x_*), \quad (6)$$

де $\tau = z_*t/T_s$, що означає уповільнення процесів при малих обсягах ресурсів і, навпаки, прискорення процесів при зростанні ресурсів.

Припущення про незмінність (або невичерпність) ресурсів у моделі Лоттки–Вольтерри можна пояснити тим, що в часи її створення (початок ХХ ст.) людство ще практично не зважало на стан довкілля. Крім того, в цій моделі не обмежується співвідношення біомаса “хижака”/біомаса “жертви”, хоч у реальності й існують поняття “ареал існування”, “щільність заселення” та ін. (наприклад, для тигрів реальна щільність заселення становить одну особ на сто квадратних кілометрів довкілля). Порушення такого параметра системи співіснування часто призводить до негативних наслідків.

Зауважимо, що в термінах темпів змін система (1)–(3) має вигляд

$$\text{temp}_x = y_*z - yz_*, \quad (7)$$

$$\text{temp}_y = xz_* - x_*z, \quad (8)$$

$$\text{temp}_z = x_*y - xy_*. \quad (9)$$

Використання темпів змін пояснюється тим, що багато загальновідомих математичних моделей “живих” систем побудовано саме в термінах темпів. Таку формалізацію можна вважати однією з концептуальних засад моделювання процесів у “живих” системах. Темпи мають однакову розмірність, що надає можливість для кількісного порівняння розрахунків, оцінок, рішень, висновків тощо.

Загальні інтеграли системи

Система (1)–(3) має загальні інтеграли

$$\frac{dx}{d\tau} + \frac{dy}{d\tau} + \frac{dz}{d\tau} = 0, \quad (10)$$

$$\frac{x_* dx}{x d\tau} + \frac{y_* dy}{y d\tau} + \frac{z_* dz}{z d\tau} = 0. \quad (11)$$

Вони відповідають співвідношенням

$$x + y + z = 1, \quad (12)$$

$$x^{x_*} y^{y_*} z^{z_*} = C[x(0), y(0), z(0)] = \text{const}, \quad (13)$$

де $x(0)$, $y(0)$, $z(0)$ – початкові умови.

Співвідношення (10), (12) є умовою внутрішньої конкуренції (агресивної взаємодії) в системі “за обмежені ресурси до існування”, яка, за М. Ейгеном, має назву “константа загальної організації”. А співвідношення (11), (13) є інтегралом руху, що обмежує загальний темп системи. Обидва інтеграли з певним припущенням можна інтерпретувати як “закони збереження” маси та енергії в “живій” системі.

Зауважимо, що наявність загального інтеграла в будь-якій системі є ознакою конкурентності процесів у системі, тобто наявності предмета конкуренції (на зразок загальної суми бюджету, загального обсягу заробітної плати, загальної суми пенсійного фонду, загального обсягу споживання газу тощо).

Стационарні стани

В області існування система (1)–(3) має стаціонарний стан:

$$x = x_*, y = y_*, z = z_*. \quad (14)$$

На границях системи існують такі стаціонарні стани:

$$x = 1, y = 0, z = 0, \quad (15)$$

$$x = 0, y = 1, z = 0, \quad (16)$$

$$x = 0, y = 0, z = 1. \quad (17)$$

Очевидно, що на границях системи відбувається дезінтеграція її структури, тобто зникають два елементи.

Здатність системи до опору зовнішнім збуренням

Здатність системи до опору зовнішнім збуренням характеризується властивостями стійкості або характеристичними числами. Аналіз цієї здатності – перший обов’язковий етап і наріжний камінь системного аналізу процесів. Адже нестійких процесів у природі не існує.

Із врахуванням (12) систему (1)–(3) можна записати у вигляді

$$\frac{dx}{d\tau} = xy_*(1 - x - y) - xy(1 - x_* - y_*), \quad (18)$$

$$\frac{dy}{d\tau} = xy(1 - x_* - y_*) - x_*y(1 - x - y); \quad (19)$$

характеристична матриця системи має вигляд

$$\begin{vmatrix} -x_*y_* & -x_*(1 - x_*) \\ y_*(1 - y_*) & x_*y_* \end{vmatrix}; \quad (20)$$

слід (дивергенція) матриці –

$$S = 0; \quad (21)$$

детермінант –

$$\Delta = x_*y_*z_*; \quad (22)$$

характеристичні корені –

$$\lambda_{1,2} = \pm\sqrt{-\Delta}. \quad (23)$$

Очевидно, що стаціонарний стан (14) є “центром”, коливальний рух навколо якого у фазовій площині системи відбувається по замкнених траєкторіях (орбітах) (рис. 1). Період коливань в околі стаціонарної точки (14) має вигляд

$$\frac{T}{T_s} = \frac{2\pi}{\sqrt{\Delta}}. \quad (24)$$

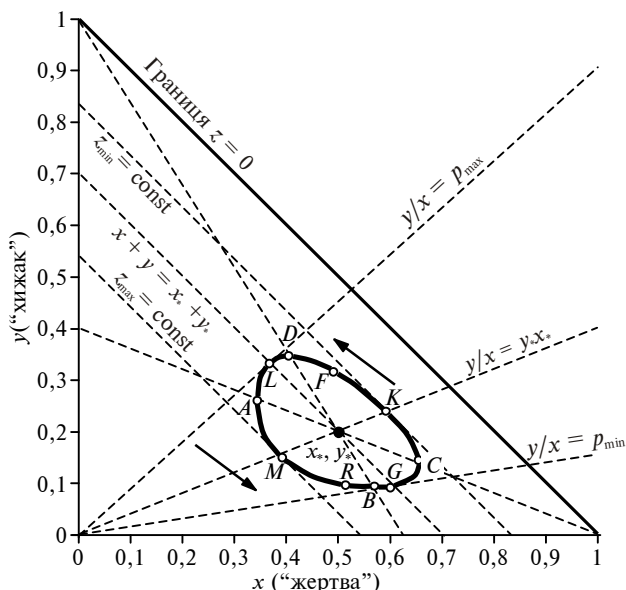


Рис. 1. Фазовий портрет системи співіснування видів (система “хижак”–“жертва”–“ресурс для жертви” (стрілки вказують напрямок руху))

Очевидно, зростання обсягу ресурсів зменшує період коливань і, навпаки, за малих обсягів ресурсів період зростає. Періодичний процес у системі показано на рис. 2.

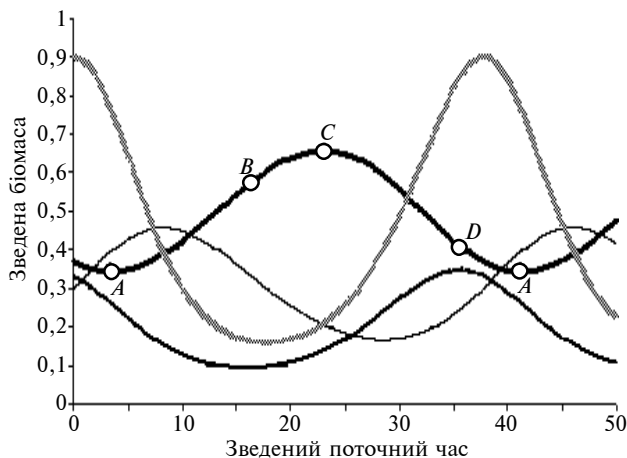


Рис. 2. Періодичний процес у системі співіснування видів; коливання в системі “хижак”–“жертва”–“ресурс для жертви”: ———— x (“жертва”); ———— y (“хижак”); ———— z (“ресурс для жертви”); y/x (“хижак”/“жертва”)

Наведені динамічні характеристики визначають здатність системи до опору зовнішнім збуренням. Аналіз показує, що стаціонарний стан (14) є нейтрально стійким і за будь-яких збурень у системі починаються орбітальні коливання, тобто система не має механізму компенсації збурень. Зауважимо, що “будь-які збурення” в системі (18), (19) — це збурення початкових умов або стаціонарного стану.

Граничні випадки процесу співіснування

За початкової гіпотетичної умови відсутності “жертв”

$$x = x(0) = 0 \quad (25)$$

рівняння (19) набуває вигляду логістичного рівняння Фергюльста [2]

$$\frac{dy}{d\tau} = -x_* y [1 - y], \quad (26)$$

згідно з яким “хижаки” зникають:

$$y \rightarrow 0. \quad (27)$$

Система дезінтегрується і перетворюється на ресурс для “жертв”:

$$z \rightarrow 1. \quad (28)$$

Отже, початок координат $x = y = 0, z = 1$ практично означає відсутність системи як такої.

За початкової умови відсутності “хижаків”

$$y = y(0) = 0 \quad (29)$$

рівняння (18) набуває вигляду логістичного рівняння

$$\frac{dx}{d\tau} = y_* x [1 - x], \quad (30)$$

згідно з яким біомаса “жертв” зростає до максимального рівня:

$$x \rightarrow 1. \quad (31)$$

Це призводить до голоду:

$$z \rightarrow 0. \quad (32)$$

Виходить, що “хижаки” необхідні для попередження голоду серед “жертв”.

За граничної умови

$$x + y = 1, z = 0 \quad (33)$$

система (18), (19) набуває вигляду

$$\frac{dx}{d\tau} = -x(1-x)(1-x_*-y_*), \quad (34)$$

$$\frac{dy}{d\tau} = y(1-y)(1-x_*-y_*). \quad (35)$$

Це означає, що за відсутності ресурсів до існування для “жертв” (33) їх знищують “хижаки”, які потім самі зникають згідно з (26). І граничний цикл повторюється.

Граничні параметри процесу співіснування

Мінімум і максимум біомаси “жертви” x_{\min} , x_{\max} визначаються з рівняння

$$\frac{dx}{d\tau} = x(y_*z - yz_*) = 0, \quad (36)$$

тобто як точки перетину A , C (див. рис. 1) прямої

$$y = \frac{y_*}{1-x_*}(1-x) \quad (37)$$

з фазовою траєкторією процесу (13)

$$f_x = x^{x_*} \left[\frac{y_*}{1-x_*}(1-x) \right]^{y_*} \left[\frac{z_*}{1-x_*}(1-x) \right]^{z_*} - C(x_0, y_0) = 0. \quad (38)$$

Мінімум і максимум біомаси “хижака” y_{\min} , y_{\max} визначаються з рівняння

$$\frac{dy}{d\tau} = y(xz_* - x_*z) = 0, \quad (39)$$

тобто як точки перетину B , D (див. рис. 1) прямої

$$y = 1 - \frac{1-y_*}{x_*}x \quad (40)$$

з фазовою траєкторією процесу (13)

$$f_y = x^{x_*} \left(1 - \frac{1-y_*}{x_*}x \right)^{y_*} \left(\frac{z_*}{x_*}x \right)^{z_*} - C(x_0, y_0) = 0. \quad (41)$$

Мінімум і максимум біомаси “ресурсів для жертви” z_{\min} , z_{\max} визначаються з рівняння

$$\frac{dz}{d\tau} = (x_*y - xy_*)z = 0, \quad (42)$$

тобто як точки перетину K , M (див. рис. 1) прямої

$$y = \frac{y_*}{x_*}x \quad (43)$$

з фазовою траєкторією процесу (13)

$$f_z = x^{x_*} \left(\frac{y_*}{x_*}x \right)^{y_*} \left(1 - \frac{1-z_*}{x_*}x \right)^{z_*} - C(x_0, y_0) = 0. \quad (44)$$

Мінімум і максимум співвідношення біомаса “хижака”/біомаса “жертви” $(y/x)_{\min}$, $(y/x)_{\max}$ визначаються з умов

$$\frac{\text{temp}_y}{\text{temp}_x} = 1 \quad (45)$$

або з рівняння

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y(xz_* - x_*z)}{x(y_*z - yz_*)} = \frac{y}{x}, \quad (46)$$

звідки отримуємо геометричне місце однакових темпів і точок дотику

$$x + y = x_* + y_* \quad (47)$$

прямої

$$\frac{y}{x} = p \quad (48)$$

до фазової траєкторії процесу (13). Тут p – задане співвідношення біомаса “хижака”/біомаса “жертви”. Звідси маємо координати точки дотику G (див. рис. 1)

$$x = \frac{x_* + y_*}{p_{\min} + 1}, \quad (49)$$

$$y = p_{\min} \frac{x_* + y_*}{p_{\min} + 1} \quad (50)$$

та точки L (див. рис. 1)

$$x = \frac{x_* + y_*}{p_{\max} + 1}, \quad (51)$$

$$y = p_{\max} \frac{x_* + y_*}{p_{\max} + 1} \quad (52)$$

Таким чином, задання величини p автоматично задає початкові умови (та інтеграл руху) процесу в точці дотику:

при

$$p = p_{\max} > \frac{y_*}{x_*} = p_* \quad (53)$$

маємо обмеження максимального значення співвідношення біомаса “хижака”/біомаса “жертви”;

при

$$p = p_{\min} < \frac{y_*}{x_*} = p_* \quad (54)$$

отримуємо обмеження мінімального значення співвідношення біомаса “хижака”/біомаса “жертви”. Тут p_* – співвідношення, що забезпечує нейтральну стійкість системи – будь-яке порушення цього співвідношення призводить до коливального руху.

Якщо початкові умови задані, то значення p_{\min} і p_{\max} можна визначити як корені рівняння

$$f_{y/x} = \left(\frac{x_* + y_*}{p+1} \right)^{x_*} \left(\frac{p x_* + y_*}{p+1} \right)^{y_*} z_*^{z_*} - C(x_0, y_0). \quad (55)$$

Отже, співвідношення біомаса “хижака”/біомаса “жертви” входить у математичну модель через початкові умови процесу. Якщо взаємодія популяцій характеризується як “хижацтво”, то це співвідношення зазвичай менше одиниці, а якщо як “паразитизм”, то більше одиниці [3, 4].

У термінах мінімальних і максимальних значень еволюція процесу є динамічним ланцюгом причинно-наслідкових подій: мінімум біомаси “жертв” → максимум біомаси “ресурсів для жертв” → мінімум біомаси “хижаків” → мінімум співвідношення “хижак”/“жертва” → максимум біомаси “жертв” → мінімум біомаси “ресурсів для жертв” → максимум біомаси “хижаків” → максимум співвідношення “хижак”/“жертва” → мінімум біомаси “жертв”...

Часові і динамічні характеристики

Граничні параметри системи і напрямки руху, показані на рис. 1, природним чином поділяють процес еволюції кожної популяції на стадії розвитку, зростання, спаду та занепаду. Розглянемо їх на прикладі процесу еволюції популяції “жертви” (рис. 3).

Для початку розвитку процесу взагалі необхідна рушійна сила: початковий капітал, ідея, винахід, освіта або просто запуск двигуна автомобіля. Даний процес розвитку популяції “жертв” починається з максимального прискорення (що свідчить про наявність рушійної сили), нульових швидкості, ривка та темпу.

Стадія розвитку AR згідно з рис. 3 характеризується додатною швидкістю, додатним прискоренням, від’ємним ривком та додатним темпом. Розвиток популяції “жертв” за часом збігається із зниженням рівня популяції “хижаків”, яка в цей час знаходиться на стадії занепаду. До того ж, популяція “жертв” має на цій стадії обсяг ресурсів до існування значно більший за стаціонарний рівень: $z > z_*$. Тому можна сказати, що розвиток популяції “жертв” збігається із сприятливим станом оточення. Про це свідчать досягнення максимального темпу процесу та додатне прискорення як індикатор наявності позитивних рушійних сил процесу на даній стадії еволюції. В той же час від’ємний ривок нагадує, що не буває безмежного розвит-

ку, і ця стадія врешті-решт переходить у стадію зростання з максимальною швидкістю, мінімальним ривком, нульовим прискоренням та додатним темпом.

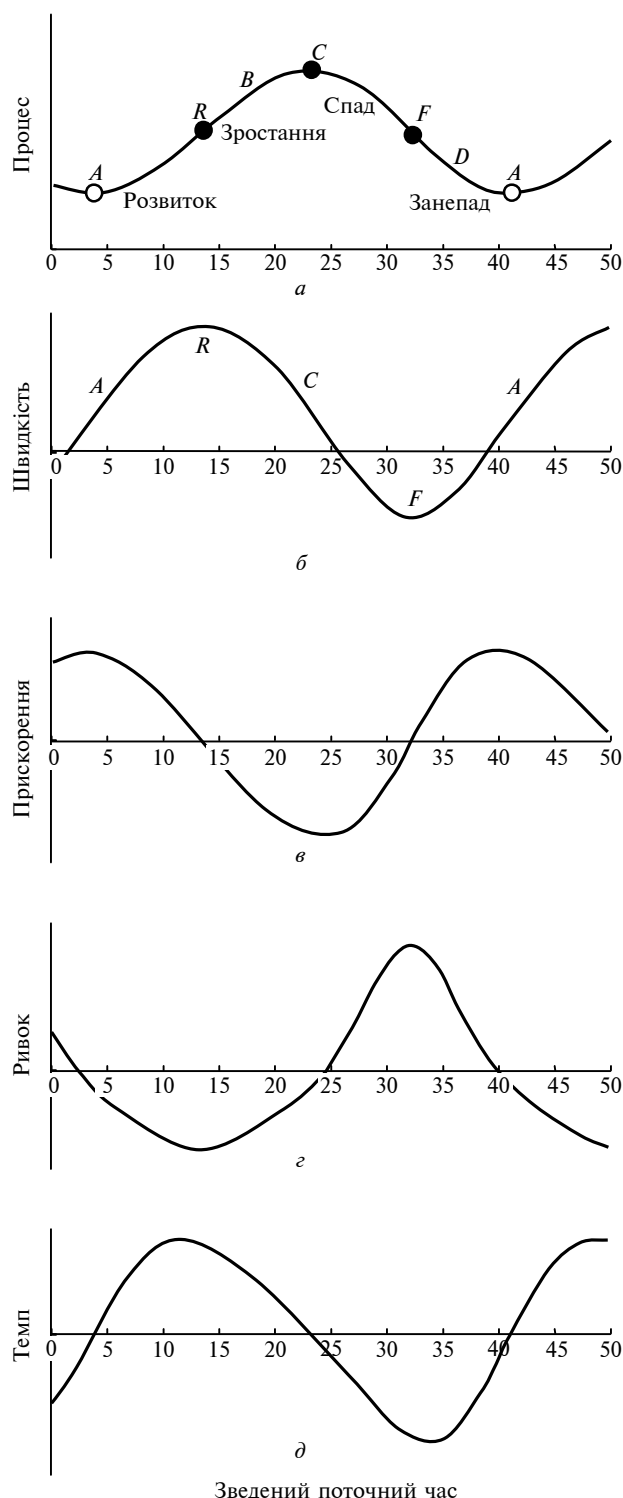


Рис. 3. Процес $X(a)$ та його динамічні характеристики: б – швидкість; в – прискорення; г – ривок; д – темп

Стадія зростання RC характеризується додатною швидкістю, додатним темпом, від'ємними прискоренням та ривком. Це означає, що рушійна сила процесу перетворюється на гальмуючу, тобто оточення починає протидіяти зростанню еволюції "жертв": збільшується популяція "хижаків", зменшується обсяг ресурсів до існування. Зростання закінчується, коли процес досягає максимального рівня (точка C). В цей момент швидкість, ривок і темп – нульові, прискорення – мінімальне. Складається враження, що на стадії зростання процес рухається наче за інерцією, яку він набрав під час свого інтенсивного розгону на попередній стадії розвитку.

На стадії спаду CF швидкість, прискорення і темп від'ємні, ривок – додатний. Рушійна сила, як і на попередній стадії зростання, виконує гальмуючу роль (зростає чисельність "хижаків"), але наприкінці стадії це гальмування припиняється; інерція системи, що її було набрано під час розгону на стадії розвитку, згасає, однак починається мобілізація сил системи, що протидіють спаду. В кінці спаду швидкість мінімальна, ривок – максимальний, прискорення – нульове, а темп – від'ємний.

На стадії занепаду FA зниження чисельності "жертв" продовжується, швидкість і темп лишаються від'ємними, але прискорення і ривок – додатні. Це означає, що відбувається наростання рушійної сили – мобілізація сил, яка почалася на стадії спаду, тобто спроба сил опору зупинити процес занепаду. Результатом цього спалаху сил опору є гальмування процесу занепаду і переведення його на новий виток еволюції (завдяки зростанню ресурсів для "жертви").

Цікаво зауважити, що змістовна специфіка характерних стадій еволюційного процесу і певний порядок їх чергування в часі досить типові не тільки для досліджуваного нами процесу, а й взагалі, мабуть, для будь-якої "живої" системи, тобто для еволюції будь-якого "організму" – політичного, економічного, соціального, культурного тощо. Ці властивості "живих" систем зумовлені їх головною ознакою: протидією (боротьбою) внутрішнього позитивного зворотного зв'язку і опору зовнішнього середовища.

Наведені суто математичні факти на змістовному рівні нашого прикладу означають, що перший з них (позитивний зворотний зв'язок) як основа феномену життя переважає на стадіях розвиток–зростання, другий (опір зовнішнього середовища) як прояв конкуренції переважає на стадіях спад–занепад.

Аналіз конкретної якісної специфіки характерних стадій процесу надає можливість виявити змістовний зв'язок, що існує між його часовими та динамічними характеристиками (таблиця).

Таблиця. Зв'язок між динамічними та часовими характеристиками процесу

Часові характеристики	Динамічні характеристики			
	Швидкість	Прискорення	Ривок	Темп
Початок розвитку A	0	max	0	0
Стадія розвитку AR	> 0	> 0	< 0	> 0
Момент максимального розвитку	> 0	> 0	< 0	max
Кінець розвитку R	max	0	min	> 0
Стадія зростання RC	> 0	< 0	< 0	> 0
Момент максимуму процесу C	0	min	0	0
Стадія спаду CF	< 0	< 0	> 0	< 0
Кінець спаду F	min	0	max	< 0
Стадія занепаду FA	< 0	> 0	> 0	< 0
Момент максимального занепаду	< 0	> 0	> 0	min
Кінець занепаду A	0	max	0	0

Отже, основними часовими характеристиками і характерними моментами еволюції ("життя") процесу є: початок стадії розвитку (максимум прискорення); момент максимального розвитку (максимум темпу); кінець розвитку – початок зростання (максимум швидкості); кінець зростання – початок спаду (максимальний рівень); кінець спаду – початок занепаду (максимум ривка); характерний час процесу (часовий масштаб); частота відтворення ресурсів (вичерпність, відновлюваність); період індукції (співвідношення між гальмуванням і розгоном); період коливань; момент паритету процесів (момент, коли $y = x$).

Основними динамічними характеристиками процесу можна вважати: швидкість, прискорення, ривок, темп, рушійні сили (градієнти або різниці параметрів), здатність до опору (характеристичні числа), несучу здатність системи (функцію обмеження), умову конкуренції (константа загальної організації).

Аналогічно можна аналізувати інші два процеси даної системи. Визначення наведених та інших характеристик можна вважати прикладом створення системної інформації про процес. Підвищення ж доданої вартості інформації (як товару) сприяє перетворенню системного аналізу на продуктивну силу суспільства.

Приклад

Міжнародна громадськість і відомі міжнародні організації започаткували загальну стратегію сталого розвитку (sustainable development) як нову концепцію подолання глобальних проблем [5]. Деякі результати досліджень Інституту прикладного системного аналізу НТУУ "КПІ" з цієї проблеми наведено на рис. 4. Очевидно, що за абсолютними економічними, соціальними та екологічними вимірами Україна значно поступається першим десяти країнам світу. Але пропорції між цими складовими стратегії сталого розвитку першої десятки та України, наведені на рис. 4 і 5, практично збігаються. І це надзвичайно важливий суспільний фактор України. Тут

$$x = \frac{I_{ек.в}}{I_{ек.в} + I_{с.в} + I_{е.в}}, \quad (56)$$

$$y = \frac{I_{с.в}}{I_{ек.в} + I_{с.в} + I_{е.в}}, \quad (57)$$

$$z = \frac{I_{е.в}}{I_{ек.в} + I_{с.в} + I_{е.в}}, \quad (58)$$

де $I_{ек.в}$, $I_{с.в}$, $I_{е.в}$ – індекси економічного, соціального та екологічного вимірів.

В рамках наведеної моделі елементами структури системи є зведені індекси економічного, соціального та екологічного вимірів x , y , z . Керування можна здійснювати зміною пропорцій між їх стаціонарними рівнями (x_* , y_* , z_*), що в Україні вже майже реалізовано, а також зміною початкових умов, які обмежують темпи процесів згідно з (11), (13).

Загальний індекс сталого розвитку можна визначати в такий спосіб:

$$I_{с.р} = I_{ек.в}^\alpha I_{с.в}^\beta I_{е.в}^\gamma, \quad (59)$$

$$\alpha + \beta + \gamma = 1, \quad (60)$$

де α , β , γ – вагові коефіцієнти, що забезпечують однакову вагу економічного, соціального та екологічного вимірів в індексі сталого розвитку. За даними Інституту прикладного системного аналізу, $\alpha = 0,381$, $\beta = 0,327$, $\gamma = 0,292$ [5].

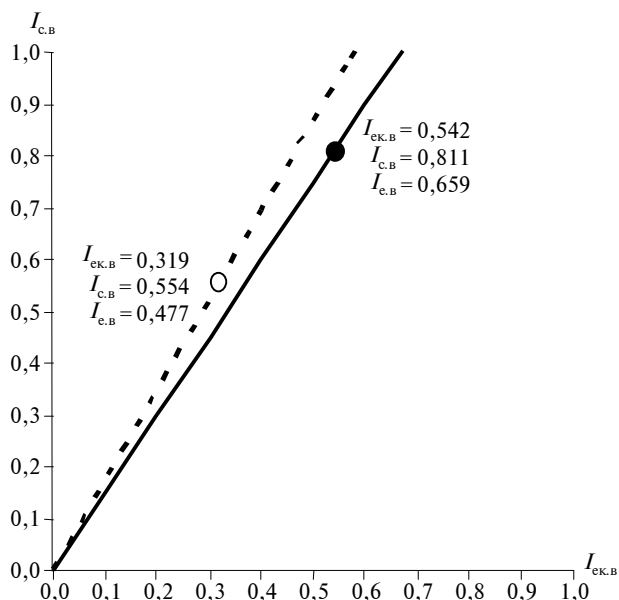


Рис. 4. Індекси економічного, соціального і екологічного вимірів 10 кращих країн світу та України (абсолютні значення); ● – 10 кращих країн (середнє); ○ – Україна; — — — 10 кращих країн; - - - - Україна

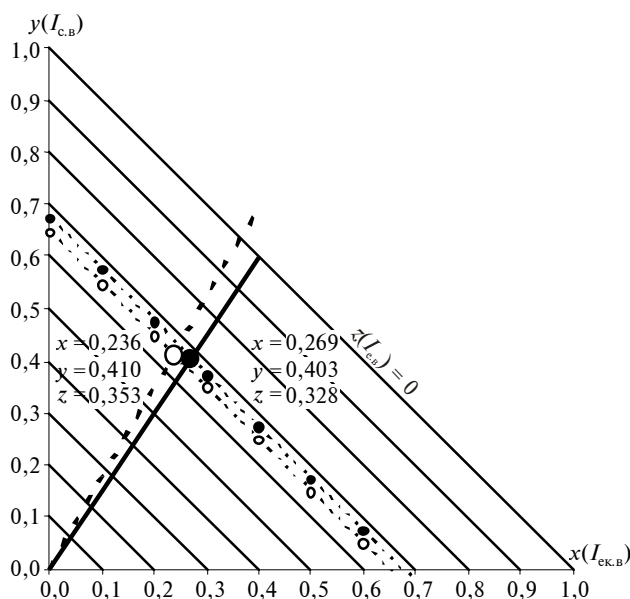


Рис. 5. Індекси економічного, соціального і екологічного вимірів 10 кращих країн світу та України (зведені значення); ● – 10 кращих країн (середнє); ○ – Україна; — — — 10 кращих країн; - - - - Україна; - $z = 0,328$ (10 країн);○..... - $z = 0,353$ (Україна)

Стратегію сталого розвитку можна формалізувати у вигляді

$$\alpha \text{temp}_x + \beta \text{temp}_y + \gamma \text{temp}_z = 0, \quad (61)$$

що означає узгоджену зміну відповідних індексів. В такому разі рух системи відбувається за траєкторією

$$i_{c.p} = \frac{I_{c.p}}{I_{ек.в} + I_{с.в} + I_{е.в}} = x^\alpha y^\beta z^\gamma = \text{const}. \quad (62)$$

Першим наближенням такої стратегії можуть бути *S*-технології, основою яких є підвищення несучої здатності системи (рис. 6). Одним із механізмів реалізації стратегії сталого роз-

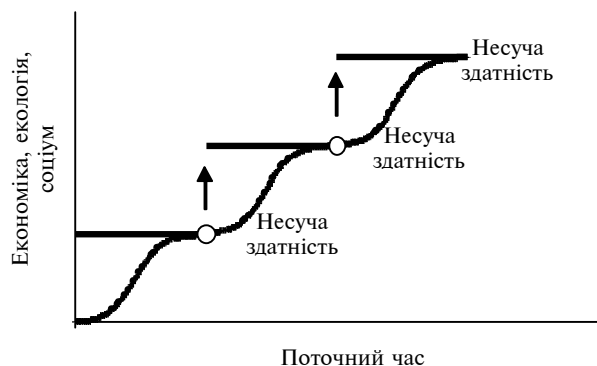


Рис. 6. Процес сталого розвитку в режимі розвиток-зростання

витку є коливальний рух навколо заданого стаціонарного стану, параметри якого й відображають бажану пропорційність. Така технологія забезпечується ергодичністю процесів у даній системі, тобто масштабом часу має бути період коливань, характерний для кожної країни. Відомо, що періодичний рух знижує ентропію системи і є ознакою впорядкованості. Крім того, оскільки область коливань має бути обмеженою, а рух системи повинен бути в напрямку зростання індексу сталого розвитку, то в модель необхідно вводити відповідні параметри керування.

Висновки

Врахування загальної біомаси системи співіснування видів моделює умову внутрішньої конкуренції за обмежені ресурси до існування. Обмеження співвідношення біомаса "хижака" ("паразита")/біомаса "жертви" поділяє область існування популяцій на простір "хижацтво", коли це співвідношення менше одиниці, та простір "паразитизм", коли співвідношення більше одиниці.

Перспектива розвитку моделі полягає у виділенні типів взаємодії (міжвидова конкуренція, "хижак"-"жертва", "паразит"-"господар", симбіоз), а також в її застосуванні до системного аналізу суспільних процесів, зокрема, для створення системної інформації типу "як співіснувати".

Г.П. Повещенко

ДИНАМИЧЕСКИЕ И ВРЕМЕННЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПРОЦЕССА СОСУЩЕСТВОВАНИЯ

В наше время существует насущная общецивилизационная проблема создания системной информации типа "как сосуществовать". Приведенные динамические и временные характеристики рассматриваются как некоторая попытка создания такой системной информации о процессе сосуществования видов.

G.P. Poveshchenko

THE DYNAMIC AND TEMPORAL DESCRIPTIONS OF THE COEXISTENCE PROCESS

At present there is a global problem of coexistence, sparking a vital necessity to create system information on "how to coexist". The key assumption behind this work is that dynamic and temporal descriptions obtained can be an attempt to create the system information of the kinds coexistence in the world.

1. Повещенко Г.П. Динаміка спілкування та регуляції // Системні дослідження та інформаційні технології. — 2007. — № 4. — С.125–139.
2. Марри Дж. Нелинейные дифференциальные уравнения в биологии. — М.: Мир, 1983. — 398 с.
3. Ризниченко Г.Ю., Рубин А.Б. Биофизическая динамика про-

- дукционных процессов. — М.: АНО "ИКС", 2004. — 464 с.
4. Ризниченко Г.Ю. Математические модели в биофизике и экологии. — М.: АНО "ИКС", 2003. — 184 с.
5. Згуровський М.З. Сталій розвиток у глобальному і регіональному вимірах. — К.: Політехніка, НТУУ "КПІ", 2006. — 84 с.

МАТЕРІАЛОЗНАВСТВО ТА МАШИНОБУДУВАННЯ

УДК 661.74:669.14.046.554

А.А. Кулініч

МЕХАНІЧНІ ВЛАСТИВОСТІ СПЛАВУ ВАЛ11 ПРИ РІЗНИХ РЕЖИМАХ ТЕМПЕРАТУРНО-ЧАСОВОЇ ОБРОБКИ

Вступ

Сплав ВАЛ11 належить до ливарних сплавів системи Al–Mg–Zn [1–3]. Він характеризується високою корозійною стійкістю, добрим поєднанням характеристик як міцності, так і пластичності [2]. Сплави даної системи мікролегується комплексом добавок, що може змінювати оптимальні технологічні параметри їх обробки. Зокрема, структура і рівень механічних властивостей ливарних сплавів системи Al–Mg–Zn істотно залежить від температурно-часових параметрів обробки в рідкому стані, попередньої обробки шихтових матеріалів та швидкості охолодження при кристалізації [2, 3].

Постановка задачі

Мета статті – дослідження впливу температурно-часових параметрів обробки в рідкому стані, впливу кількості переплавів і швидкості охолодження при кристалізації на структуру (розмір зерна) та механічних властивостей ливарного сплаву ВАЛ11.

Методика досліджень

Об'єкт дослідження – ливарний сплав ВАЛ11, який має такий хімічний склад, %: Mg = 6–7, Zn = 2–2,5, Zr = 0,1–0,35, Ti = 0,1–0,3, Mn = 0,1–0,2, Cr = 0,005–0,15, Be = 0,07–0,15. Середній хімічний склад сплаву ВАЛ11 брався як Mg = 6,2%, Zn = 2,3%, Zr = 0,15%, Ti = 0,15%, Mn = 0,15%, Cr = 0,1%, Be = 0,1%.

Відомо, що добавки цирконію, титану, марганцю і хрому істотно підвищують рівень механічних і технологічних властивостей досліджуваного сплаву [1–3]. Добавки берилію вводились з метою протидії окисненню сплаву ВАЛ11 при його виробництві та для модифікування небажаних залізомістких фаз [2, 4, 5]. Сплави для досліджень виготовлялись сплавленням таких шихтових матеріалів, як алюміній марки А99, магній марки Mg90, цинк марки ЦО, лігатур Al–Be, Al–Ti, Al–Zr, Al–Cr, Al–Mn. Проводились плавки в лабораторній печі опору в графітошамотному тиглі.

Після різної температурно-часової обробки в рідкому стані розплав охолоджувався з швидкістю охолодження від 30 до 270 °C/хв. Отримані стандартні зразки діаметром 10 мм піддавались термічній обробці (відпалу, гартуванню і штучному старінню) за стандартним режимом, після чого визначались їх механічні властивості (міцність на розрив, межа текучості та відносне подовження). Вимірювався також розмір зерна досліджуваного сплаву в литому стані при різних технологічних режимах обробки. Випробування механічних властивостей проводились на розривній машині TIRA-TEST за стандартними методиками. Середньоквадратичні відхилення значень механічних властивостей становили σ_b – $\pm 20,0$ МПа; $\sigma_{0,2}$ – $\pm 10,0$ МПа; δ – $\pm 15,0\%$. Хімічний аналіз зразків досліджуваних сплавів проводився при використанні методу оптичної спектроскопії випарним розрядом.

Якісний і кількісний металографічний аналіз виконано на мікроскопі NEOFOT-31.

Експериментальна частина

Вплив температури витримки розплаву (при постійному часі витримки 0,5 год) на рівень механічних властивостей сплаву ВАЛ11 показано в табл. 1, з якої видно, що максимальний рівень механічних властивостей досліджуваного сплаву відповідає температурному інтервалу (700–720) °C, а мінімальний рівень – температурним інтервалам недогріву розплаву (680–700) °C або його перегріву (740–760) °C. Було встановлено оптимальні температурно-часові параметри обробки розплаву сплаву ВАЛ11: температурний інтервал – (700–720) °C та часовий – (0,3–0,7) год.

Таблиця 1. Вплив температури витримки розплаву на механічні властивості сплаву ВАЛ11

$T_{\text{втр}}, ^\circ\text{C}$	$\sigma_b, \text{МПа}$	$\sigma_{0,2}, \text{МПа}$	$\delta, \%$
680	326	226	4
700	345	270	6
720	360	285	7
740	337	248	5
760	304	214	3

Примітка. Час витримки розплаву $\tau_{\text{втр}} = 0,5$ год, швидкість охолодження розплаву – 150 °C/хв. Температура витримки розплаву збігається з температурою його розливи.

Пояснити отримані експериментальні дані можна таким чином.

1. При невеликому перегріві розплаву вище температури плавлення зберігаються активовані підкладинки, які можуть бути центрами кристалізації при охолодженні розплаву. Якщо температура перегріву збільшується, то кількість активованих підкладинок зменшується.

2. Значне підвищення температури і часу витримки розплаву викликає зростання швидкості окиснення сплавів системи Al–Mg–Zn, за значного перегріву розплаву вище температури плавлення спостерігається значний угар магнію та цинку і відповідно – істотне зниження рівня механічних властивостей.

Було досліджено вплив кількості переплавів на структуру і механічні властивості сплаву ВАЛ11. На рис. 1 і 2 показано залежність механічних властивостей досліджуваного сплаву від кількості переплавів. З наведених експериментальних даних можна зробити висновок, що при першому переплаві зростає як міцність, так і відносне подовження сплаву ВАЛ11. Під час другого і третього переплаву механічні властивості досліджуваного сплаву зменшуються.

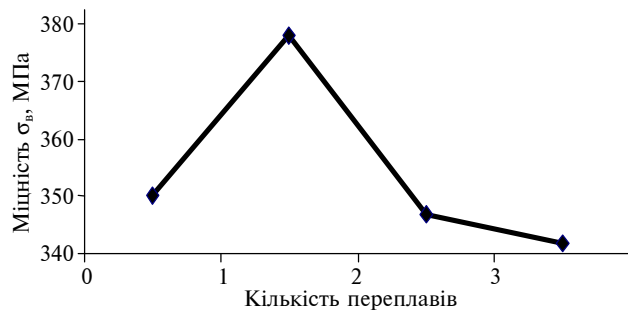


Рис. 1. Вплив кількості переплавів на міцність сплаву ВАЛ11

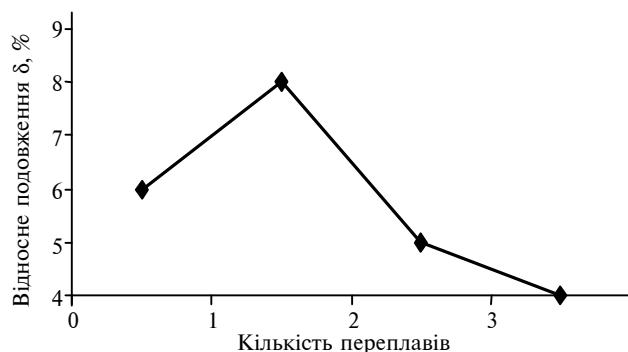


Рис. 2. Вплив кількості переплавів на відносне подовження сплаву ВАЛ11

Було встановлено, що при другому і третьому переплаві сильно вигоряють магній і цинк, що підтверджується результатами хімічного спектрального та мікрозондового аналізів зразків (табл. 2). Це, в свою чергу, призводить до зменшення кількості зміцнювальної інтерметалідної Т-фази ($\text{Al}_2\text{Mg}_3\text{Zn}_3$), яка відповідає за підвищення характеристик міцності сплаву під час штучного старіння. Підвищення кількості переплавів сприяє також додатковому окисненню сплавів.

Таблиця 2. Вплив кількості переплавів на вміст магнію і цинку у сплаві ВАЛ11

Кількість переплавів	Масовий вміст магнію, %	Масовий вміст цинку, %
0	6,43	2,32
1	6,39	2,31
2	6,12	2,11
3	5,96	1,94

Примітка. Температура лиття – 710 °С, час витримки розплаву при даній температурі – 0,4 год.

Підвищення рівня механічних властивостей сплаву ВАЛ11 після першого переплаву можна пояснити таким чином.

1. Відбувається більш рівномірний перерозподіл головних легуючих компонентів (магнію і цинку) в алюмінієвому розчині. Це підтверджується даними металографічного аналізу. Наявні до першого переплаву в структурі сплаву ВАЛ11 світлі зерна (рис. 3, а) свідчать про низький вміст у них магнію та цинку. Цей факт підтверджується і даними рентгеноспектрального аналізу. На рентгенівському мікроаналізаторі JXA-8900 RL було встановлено хімічний склад алюмінієвого твердого розчину досліджуваних сплавів. Вимірювання проводилось на поверхні зразків у 250 точках. Відстань між двома точками рентгенівського променя становила 40 мкм. Встановлено, що в окремих світлих зернах алюмінієвого твердого розчину вміст магнію знижувався до 4,37%, а вміст цинку – до 1,95% (див. рис. 3, а).

2. За рахунок першого переплаву усувається спадковий зв'язок між структурою вихідної шихти і структурою сплаву ВАЛ11 після кристалізації. На рис. 3, б наведено структуру досліджуваного сплаву після першого переплаву. З даного рисунка видно, що структура сплаву ВАЛ11 після першого переплаву характеризується більш дрібним зерном алюмінієвого твердого розчину порівняно з вихідною структурою. Це зумовлює зростання рівня механічних властивостей сплаву після першого переплаву.

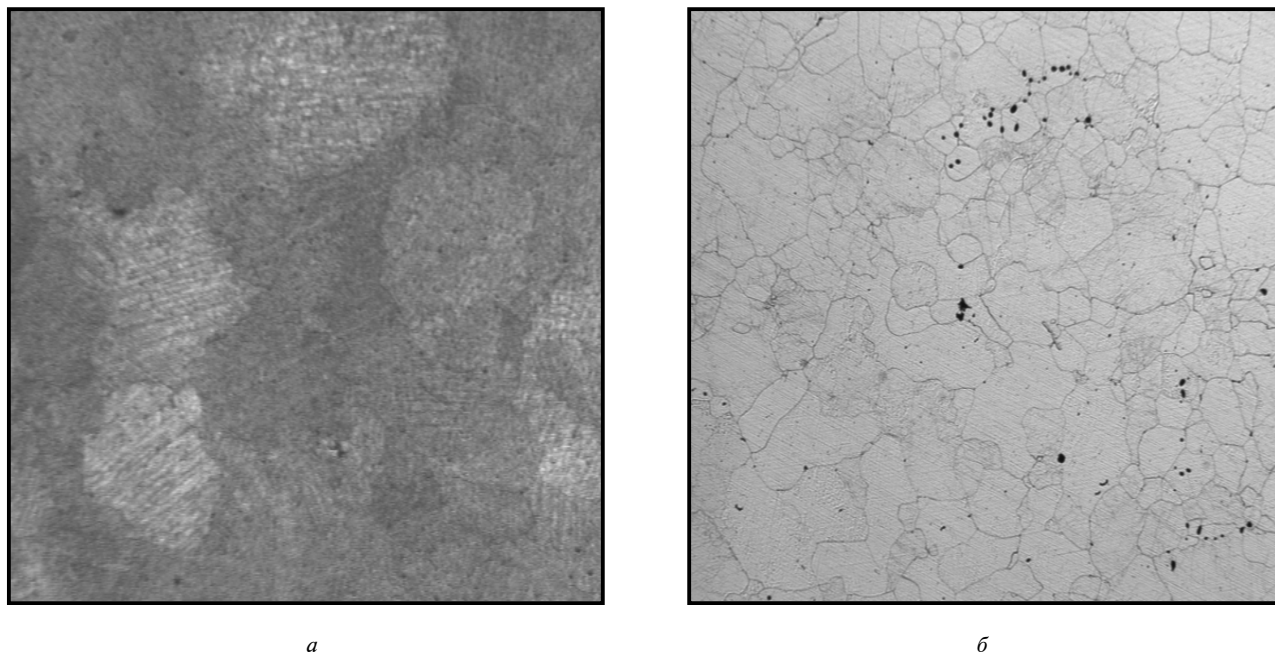


Рис. 3. Вплив переплаву на структуру сплаву ВАЛ11: *a* – сплав до переплаву; *б* – сплав після першого переплаву; *a*, *б* – $\times 100$

Вплив швидкості охолодження при кристалізації на структуру і механічні властивості досліджуваного сплаву показано в табл. 3. З цих даних видно, що при збільшенні швидкості охолодження зменшується розмір зерна сплаву ВАЛ11 та істотно підвищується рівень його механічних властивостей.

Таблиця 3. Вплив швидкості охолодження при кристалізації на розмір зерна і механічні властивості сплаву ВАЛ11

$V_{\text{ох.}}$, °C/хв	d , мкм	$\sigma_{\text{в}}$, МПа	$\sigma_{0,2}$, МПа	δ , %
30	50	305	253	3
90	45	332	262	5,5
150	40	360	285	7
210	38	369	292	7,5
270	35	378	298	9

Примітка. $T_{\text{витр}} = 720$ °C; $\tau_{\text{витр}} = 0,5$ год.

Висновки

1. З проведених досліджень випливає, що додатковим резервом для керування структурою і рівнем механічних властивостей сплаву ВАЛ11 є застосування оптимальних температурно-часових параметрів обробки в рідкому стані, переплаву шихтових матеріалів та швидкості охолодження при кристалізації.

2. При одночасному застосуванні оптимальних параметрів обробки в рідкому стані і збільшенні швидкості охолодження при кристалізації можна підвищити рівень характеристик міцності сплаву ВАЛ11 до 20%, а пластичність – у три рази.

3. Перспективність подальших досліджень у даному напрямку полягає в можливості встановлення оптимальних технологічних параметрів обробки ливарних сплавів системи Al–Mg–Zn з різним хімічним складом, що є додатковим резервом підвищення рівня їх механічних властивостей.

А.А. Кулинич

МЕХАНИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА СПЛАВА ВАЛ11 ПРИ РАЗНЫХ РЕЖИМАХ ТЕМПЕРАТУРНО-ВРЕМЕННОЙ ОБРАБОТКИ

Исследовано влияние температурно-временных параметров обработки расплава и скорости охлаж-

A.A. Kylinich

THE MECHANICAL PROPERTIES OF ALLOY VAL-11 AT VARIOUS TREATMENT MODES

The paper reports on the influence of temperature-time treatment parameters of fusion and cooling rate at crystallization on a structure and level of the

дения при кристаллизации на структуру и уровень механических свойств сплава ВАЛ11. Установлены оптимальные технологические параметры обработки исследуемого сплава, которые позволяют повысить уровень его характеристик прочности на 20%, а пластичность – в три раза.

mechanical properties of the alloy VAL-11. The experimental results obtained demonstrate the optimum technological treatment parameters of the alloy under study, which allow increasing the level of its durability characteristics by 20% and plasticity by three times.

1. *Мондольфо Л.Ф.* Структура и свойства алюминиевых сплавов. – М.: Металлургия, 1979. – 640 с.
2. *Постников Н.С.* Упрочнение алюминиевых сплавов и отливок. – М.: Металлургия, 1963. – 120 с.
3. *Альтман М.Б., Амбарцумян С.М.* Промышленные деформируемые, спеченные и литейные алюминиевые сплавы. – М.: Металлургия, 1972. – 552 с.
4. *Гаврилюк В.П., Рябініна О.О., Кулініч А.А., Доній О.М.* Вплив берилію на фазово-структурний склад і меха-

- нічні властивості сплаву Al–6%Mg–2%Zn з підвищеним вмістом заліза // Наукові вісті НТУУ “КПІ”. – 2006. – № 3. – С. 45–48.
5. *Кулініч А.А., Гаврилюк В.П., Рябініна О.О., Доній О.М.* Фазово-структурний склад і механічні властивості сплаву Al–6%Mg–2%Zn–0,5%Fe–0,5%Si з добавками берилію після різних режимів відпалу // Там же. – 2007. – № 3. – С. 101–104.

Рекомендована Радою інженерно-фізичного факультету НТУУ “КПІ”

Надійшла до редакції
1 липня 2008 року

УДК 531+534

В.П. Легеза

УЗАГАЛЬНЕННЯ ВАРІАЦІЙНОЇ ЗАДАЧІ ПРО БРАХІСТОХРОНУ У ВИПАДКУ КОЧЕННЯ ОДНОРІДНОГО ЦИЛІНДРА

Вступ

Для значної кількості віброзахисних пристроїв (гасників, амортизаторів, демпферів тощо) головним критерієм ефективності їх функціонування є мінімум переміщень деяких точок несучого тіла або мінімум зусиль (моментів) у найбільш небезпечних перерізах, які виникають у процесі його вимушених коливань [1–5]. Проте існує ряд віброзахисних пристроїв, для яких таким головним критерієм є мінімум часу, протягом якого вдається знизити рівень амплітуд вимушених коливань несучих конструкцій до унормованого [6–9].

У даній статті цей критерій використовується для віброзахисних пристроїв коткового типу [10–13]. Тому виникла проблема визначення форми напрямної кривої циліндричної поверхні, по якій важкий циліндр здійснює найшвидший спуск. При цьому в статті припускається, що рух циліндра вздовж напрямної кривої являє собою кочення без ковзання, а сам циліндр вважається однорідним.

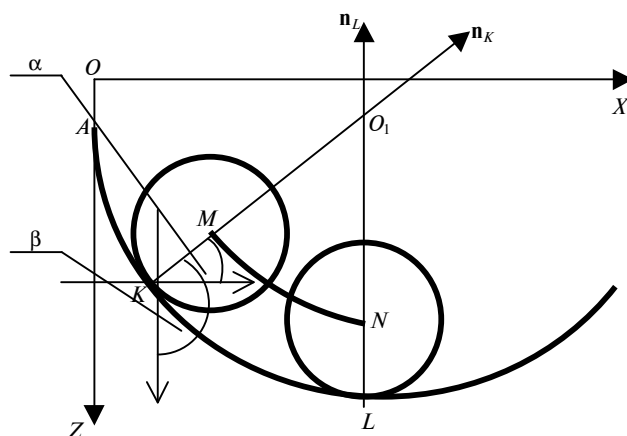
Постановка задачі

Розглядається нова варіаційна задача про кочення важкого однорідного циліндра по циліндричній виїмці, напрямна крива якої забезпечує його найшвидше перекочування без проковзування. Наші дослідження є узагальненням досліджень І. Бернуллі про брахістохрону, за допомогою яких було знайдено рівняння кривої, що забезпечує найшвидший спуск по ній матеріальної точки. Як відомо, ця крива являє собою циклоїду [14, 15].

Мета статті – методами варіаційного числення визначити диференціальне і алгебричні рівняння напрямної лінії найшвидшого спуску важкого однорідного циліндра, що котиться по ній без ковзання.

Побудова цільового функціонала

Нехай однорідний циліндр з масою m і радіусом r перекочується без ковзання по деякій циліндричній виїмці з напрямною кривою AKL (рис. 1), яка лежить у вертикальній площині, та починає свій рух з точки A без початкової швидкості. На рис. 1 позначено: крива AKL – траєкторія точки дотику важкого циліндра при його найшвидшому перекочуванні по ній без проковзування; дуга MN – траєкторія центра мас циліндра; гравітація діє вертикально вниз.



Загальний вигляд напрямної кривої

Знайдемо час, який витрачається при переміщенні циліндра з точки A в точку K . Виберемо початок координат у точці O , вісь OZ направимо вертикально вниз, вісь OX – горизонтально вправо (точка A лежить на осі OZ).

Запишемо вираз для вектора одиничної внутрішньої нормалі, проведеної до шуканої кривої в довільній її точці K . Він має такий вигляд:

$$\mathbf{n}_K = (\cos\alpha; 0; \cos\beta) = \left(\frac{z'}{\sqrt{1+(z')^2}}; 0; -\frac{1}{\sqrt{1+(z')^2}} \right)^T, \quad (1)$$

де $z = z(x)$ – рівняння шуканої кривої AKL ; $z' = \frac{dz}{dx}$; α – кут між вектором \mathbf{n}_K та додатним напрямком осі OX ; β – кут між вектором \mathbf{n}_K та додатним напрямком осі OZ .

Тоді вираз для потенціальної енергії циліндра матиме такий вигляд:

$$\Pi = -mg(z + r\cos\beta) + C_0 =$$

$$= -mg \left(z - \frac{r}{\sqrt{1+(z')^2}} \right) + C_0, \quad (2)$$

де $r = KM = LN$ – радіус циліндра.

Запишемо вираз для інтеграла енергії в цій задачі

$$\frac{mv^2}{2} + \frac{J\dot{\phi}^2}{2} = mg \left(z - \frac{r}{\sqrt{1+(z')^2}} \right) - C_0, \quad (3)$$

де $J = \frac{mr^2}{2}$ – момент інерції однорідного циліндра

відносно його центра мас; $v = r\dot{\phi}$ – швидкість центра мас циліндра, записана через його кутову швидкість $\dot{\phi}$ при відсутності ковзання.

Оскільки відповідно до прийнятих початкових умов руху при $z(0) = z_0$, $\dot{z}(0) = \dot{z}_0$ швидкість центра мас циліндра буде нульовою ($v = 0$), а стала становитиме $C_0 = mg \left(z_0 - \frac{r}{\sqrt{1+(z'_0)^2}} \right)$, то дістанемо

$$\frac{3m(r\dot{\phi})^2}{4} = mg \left(z - \frac{r}{\sqrt{1+(z')^2}} + \bar{C} \right),$$

де

$$\bar{C} = \frac{r}{\sqrt{1+(z'_0)^2}} - z_0. \quad (4)$$

Для диференціала дуги ds кривої KL маємо

$$ds = \sqrt{(dx)^2 + (dz)^2} = \sqrt{1+(z')^2} dx. \quad (5)$$

Використовуючи співвідношення (5) для ds , знаходимо вираз для диференціала дуги MN . Спочатку запишемо вираз для радіуса кривини $\rho = KO_1$ у точці K кривої:

$$\rho = \frac{[1+(z')^2]^{3/2}}{|z''|}. \quad (6)$$

Вважаючи дуги MN і KL малими ($KO_1 = LO_1 = \rho$), для трикутників O_1MN і O_1KL запишемо співвідношення їх подібності:

$$\begin{aligned} \frac{MN}{MO_1} &= \frac{KL}{KO_1} \Rightarrow \\ MN &= \frac{KL \cdot MO_1}{\rho} = \frac{ds(\rho - r)}{\rho} = \\ &= \frac{[1+(z')^2]^{3/2} - r|z''|}{1+(z')^2} dx. \quad (7) \end{aligned}$$

Позначимо $\tilde{ds} = MN$. Оскільки $\tilde{ds} = vdt$, то з цього рівняння можна знайти диференціал

часу $dt \left(\dot{\phi} = \frac{v}{r} \right)$. Вважаємо, що знак у другій похідній z'' від'ємний, тобто шукана крива опукла на досліджуваному інтервалі (нагадаємо, що вісь OZ спрямована вертикально вниз). Запишемо вираз для диференціала часу dt :

$$\begin{aligned} dt &= \frac{\tilde{ds}}{v} = \frac{\tilde{ds}}{r\dot{\phi}} = \\ &= \frac{\sqrt{1+(z')^2}^3 + rz''}{[1+(z')^2] \sqrt{\frac{4g}{3} \left(z - \frac{r}{\sqrt{1+(z')^2}} + \bar{C} \right)}} dx. \quad (8) \end{aligned}$$

Вираз для проміжку часу, протягом якого циліндр перекоотиться по кривій з точки A в точку K , дістанемо інтегруванням співвідношення (8):

$$T = \int_0^{x_K} \frac{\sqrt{1+(z')^2}^3 + rz''}{[1+(z')^2] \sqrt{\frac{4g}{3} \left(z - \frac{r}{\sqrt{1+(z')^2}} + \bar{C} \right)}} dx. \quad (9)$$

Отже, вираз (9) для часу T є функціоналом такого загального вигляду:

$$T[z(x)] = \int_0^x F(z, z', z'') dx. \quad (10)$$

Особливістю і відмінністю цієї задачі від задачі I. Бернуллі є те, що знайдена підінтегральна функція у формулі (9) містить як другу похідну z'' шуканої кривої, так і радіус r циліндра, який перекочується по ній.

Відомо [16], що умови стаціонарності для функціоналів вигляду (10) приводять до такого диференціального рівняння екстремалей (рівняння Ейлера–Пуассона):

$$\frac{\partial F}{\partial z} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial z'} \right) + \frac{d^2}{dx^2} \left(\frac{\partial F}{\partial z''} \right) = 0. \quad (11)$$

Це рівняння є узагальненням рівняння Ейлера–Лагранжа на випадок $F = F(x, z, z', z'')$. Покажемо, що у випадку $F = F(z, z', z'')$ для рівняння (11) можна дістати перший інтеграл.

Редукція рівняння Ейлера–Пуассона для випадку $F = F(z, z', z'')$

Розглянемо варіаційну задачу, для якої підінтегральна функція (9) не залежить від x :

$F = F(z, z', z'')$. Доведемо, що для такого випадку рівняння (11) дає змогу знайти перший інтеграл. Домножимо рівняння (11) на z' :

$$\frac{\partial F}{\partial z} z' - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial z'} \right) z' + \frac{d^2}{dx^2} \left(\frac{\partial F}{\partial z''} \right) z' = 0. \quad (12)$$

Перетворимо другий доданок у виразі (12) в такий спосіб:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial z'} z' \right) &= \left[\frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial z'} \right) \right] z' + \frac{\partial F}{\partial z'} z'' \Rightarrow \\ \Rightarrow \left[\frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial z'} \right) \right] z' &= \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial z'} z' \right) - \frac{\partial F}{\partial z'} z''. \end{aligned} \quad (13)$$

Виконаємо аналогічні перетворення над третім доданком у виразі (12):

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dx^2} \left(\frac{\partial F}{\partial z''} z' \right) &= \frac{d}{dx} \left\{ \left[\frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial z''} \right) \right] z' + \frac{\partial F}{\partial z''} z'' \right\} = \\ = \left[\frac{d^2}{dx^2} \left(\frac{\partial F}{\partial z''} \right) \right] z' &+ 2 \left[\frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial z''} \right) \right] z'' + \frac{\partial F}{\partial z''} z'''. \end{aligned} \quad (14)$$

Запишемо подвоєний доданок у (14) в іншому вигляді:

$$\begin{aligned} 2 \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial z''} z'' \right) &= 2 \left[\frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial z''} \right) \right] z'' + 2 \frac{\partial F}{\partial z''} z''' \Rightarrow \\ \Rightarrow 2 \left[\frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial z''} \right) \right] z'' &= 2 \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial z''} z'' \right) - 2 \frac{\partial F}{\partial z''} z'''. \end{aligned} \quad (15)$$

Із співвідношень (14) і (15) знайдемо вираз для третього доданку в рівнянні (12):

$$\begin{aligned} \left[\frac{d^2}{dx^2} \left(\frac{\partial F}{\partial z''} \right) \right] z' &= \frac{d^2}{dx^2} \left(\frac{\partial F}{\partial z''} z' \right) + \\ + \frac{\partial F}{\partial z''} z''' &- 2 \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial z''} z'' \right). \end{aligned} \quad (16)$$

Підставимо вирази (13) і (16) у рівняння (12). В результаті дістанемо

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial z} z' + \frac{\partial F}{\partial z'} z'' - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial z'} z' \right) &+ \frac{d^2}{dx^2} \left(\frac{\partial F}{\partial z''} z' \right) + \\ + \frac{\partial F}{\partial z''} z''' - 2 \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial z''} z'' \right) &= 0. \end{aligned} \quad (17)$$

Крім того, якщо $F = F(z, z', z'')$, то маємо

$$\frac{dF}{dx} = \frac{\partial F}{\partial z} z' + \frac{\partial F}{\partial z'} z'' + \frac{\partial F}{\partial z''} z'''. \quad (18)$$

Перепишемо рівняння (17) із врахуванням співвідношення (18):

$$\frac{dF}{dx} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial z'} z' \right) - 2 \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial z''} z'' \right) + \frac{d^2}{dx^2} \left(\frac{\partial F}{\partial z''} z' \right) = 0,$$

або

$$\frac{d}{dx} \left[F - \frac{\partial F}{\partial z'} z' - 2 \frac{\partial F}{\partial z''} z'' + \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial z''} z' \right) \right] = 0. \quad (19)$$

Проінтегруємо вираз (19):

$$F - \frac{\partial F}{\partial z'} z' - 2 \frac{\partial F}{\partial z''} z'' + \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial z''} z' \right) = C, \quad (20)$$

де C – довільна стала.

Спростимо рівняння (20) і запишемо остаточний вираз для першого інтеграла рівняння Ейлера–Пуассона (11):

$$F - \frac{\partial F}{\partial z'} z' - \frac{\partial F}{\partial z''} z'' + \left[\frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial z''} \right) \right] z' = C. \quad (21)$$

Визначення диференціального рівняння прямої кривої

Запишемо підінтегральну функцію $F = F(z, z', z'')$ для функціонала (9):

$$F(z, z', z'') = \sqrt{\frac{3}{4g}} \frac{[1 + (z')^2]^{3/2} + rz''}{[1 + (z')^2] \sqrt{z - \frac{r}{\sqrt{1 + (z')^2}} + \bar{C}}}. \quad (22)$$

Підставимо функцію (22) у рівняння (21). Спочатку визначимо вираз для частинної похідної $\frac{\partial F}{\partial z'}$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial z'} &= \sqrt{\frac{3}{4g}} \left\{ \frac{[1 + (z')^2]^{3/2} \left[z + \bar{C} - \frac{3}{2} \frac{r}{\sqrt{1 + (z')^2}} \right]}{[1 + (z')^2]^2 \left[z - \frac{r}{\sqrt{1 + (z')^2}} + \bar{C} \right]^{3/2}} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{[1 + rz''] \left[2(z + \bar{C}) - \frac{3}{2} \frac{r}{\sqrt{1 + (z')^2}} \right]}{[1 + (z')^2]^2 \left[z - \frac{r}{\sqrt{1 + (z')^2}} + \bar{C} \right]^{3/2}} \right\} z'. \end{aligned} \quad (23)$$

Тепер дістанемо вираз для $\frac{\partial F}{\partial z''}$:

$$\frac{\partial F}{\partial z''} = \sqrt{\frac{3}{4g}} \frac{r}{[1+(z')^2] \sqrt{z - \frac{r}{\sqrt{1+(z')^2}} + \bar{C}}}. \quad (24)$$

Після цього продиференціюємо вираз (24) по x . В результаті знайдемо

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial z''} \right) &= -\sqrt{\frac{3}{4g}} r z' \times \\ &\times \left\{ \frac{2z'' \left[z + \bar{C} - \frac{r}{\sqrt{1+(z')^2}} \right]}{[1+(z')^2]^2 \left[z - \frac{r}{\sqrt{1+(z')^2}} + \bar{C} \right]^2} + \right. \\ &+ \left. \frac{\frac{1}{2}[1+(z')^2] \left[1 + \frac{r z''}{[1+(z')^2]^{3/2}} \right]}{[1+(z')^2]^2 \left[z - \frac{r}{\sqrt{1+(z')^2}} + \bar{C} \right]^2} \right\}. \quad (25) \end{aligned}$$

Підставимо вирази (22)–(25) у рівняння (21) і після деяких громіздких перетворень дістанемо диференціальне рівняння шуканої кривої $z(x)$:

$$\begin{aligned} (z + \bar{C})[1+(z')^2] - \\ - r\sqrt{1+(z')^2} = C_1, \quad z(0) = z_0, \quad z'(0) = z'_0, \quad (26) \end{aligned}$$

де $C_1 = \left[C\sqrt{\frac{4g}{3}} \right]^{-2}$; g – прискорення вільного падіння; r – радіус циліндра.

Важливим, цікавим і очікуваним фактом у рівнянні (26) є те, що в окремому випадку при $r = 0$ (тобто якщо розглядається рух матеріальної точки) воно перетворюється на відоме рівняння циклоїди, а саме $(z + \bar{C})[1+(z')^2] = C_1$ [14, 15].

Інтегрування диференціального рівняння напрямної кривої

Інтегрування рівняння (26) проводитимемо з використанням параметризації кривої $z = z(x)$. Параметризацію введемо в такий спосіб:

$$z' = \operatorname{tg} \varphi \Rightarrow dx = \operatorname{ctg} \varphi dz, \quad (27)$$

$$\begin{aligned} z &= C_1 \cos^2 \varphi + r \cos \varphi - \bar{C} \Rightarrow \\ \Rightarrow dz &= -(2C_1 \cos \varphi \sin \varphi + r \sin \varphi) d\varphi. \quad (28) \end{aligned}$$

Підставимо праву частину співвідношення (28) у вираз (27):

$$\begin{aligned} dx &= -(2C_1 \cos \varphi \sin \varphi + r \sin \varphi) \operatorname{ctg} \varphi d\varphi \Rightarrow \\ \Rightarrow dx &= -(2C_1 \cos^2 \varphi + r \cos \varphi) d\varphi. \quad (29) \end{aligned}$$

Після інтегрування співвідношення (29) дістанемо вираз для x як функцію параметра φ :

$$x(\varphi) = -C_1 \left(\varphi + \frac{1}{2} \sin 2\varphi \right) - r \sin \varphi + C_2, \quad (30)$$

$$z(\varphi) = C_1 \cos^2 \varphi + r \cos \varphi - \bar{C}. \quad (31)$$

Система параметричних рівнянь (30), (31) і визначає шукану напрямну криву зазначеної вище циліндричної поверхні.

Для прикладу визначимо систему параметричних рівнянь кривої для такого окремого варіанта крайових умов: $\varphi_0 = \frac{\pi}{2}$; $x\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$; $z\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$;

$z'\left(\frac{\pi}{2}\right) \rightarrow \infty$. Знайдемо константу C_2 із співвідношення

$$x\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \Rightarrow -C_1 \frac{\pi}{2} - r + C_2 = 0 \Rightarrow C_2 = r + C_1 \frac{\pi}{2}. \quad (32)$$

Підставимо праву частину виразу (32) для C_2 у (30). В результаті дістанемо таку систему параметричних рівнянь:

$$x(\varphi) = r(1 - \sin \varphi) + C_1 \left(\frac{\pi}{2} - \varphi - \frac{1}{2} \sin 2\varphi \right), \quad (33)$$

$$z(\varphi) = C_1 \cos^2 \varphi + r \cos \varphi. \quad (34)$$

Висновки

Отримані результати у вигляді диференціального рівняння (26) і алгебричних параметричних рівнянь кривої (30), (31) є новим узагальненням класичних досліджень І. Бернуллі в рамках варіаційної задачі про брахістохрону.

Узагальнення полягає в тому, що в новій варіаційній задачі розглядається найшвидше кочення важкого однорідного циліндра (а не рух матеріальної точки) без ковзання по циліндричній виїмці з шуканою напрямною кривою $z(x)$. Диференціальне рівняння (26) дає можливість здійснити його квадратуру і дістати алгебричне рівняння шуканої напрямної кривої в параметричному вигляді (30), (31).

В окремому випадку, якщо радіус r циліндра дорівнює нулю ($r = 0$), то знайдене рівняння (26) перетворюється на відоме рівняння циклоїди.

У наступних дослідженнях форма кривої, визначена в даній статті, буде використана для розробки нових віброзахисних пристроїв, для яких головним критерієм ефективності їх функціонування є мінімум часу, протягом якого вдається знижити рівень амплітуд вимушених коливань несучих конструкцій до унормованого.

Результати даного дослідження становлять як теоретичний, так і практичний інтерес для науковців – у галузі теоретичної механіки, динаміки та міцності машин і механізмів, опору матеріалів, а також для інженерів-розробників коткових гасників і амортизаторів.

В.П. Легеца

ОБОБЩЕНИЕ ВАРИАЦИОННОЙ ЗАДАЧИ О БРАХИСТОХРОНЕ В СЛУЧАЕ КАЧЕНИЯ ОДНОРОДНОГО ЦИЛИНДРА

Движение тяжелого однородного цилиндра рассматривается как качение вдоль искомой кривой без скольжения. Получен функционал в виде суммарного времени качения цилиндра и решена соответствующая вариационная задача по минимизации этого функционала. В параметрическом виде определено алгебраическое уравнение направляющей линии наибыстрейшего спуска цилиндра.

V.P. Legeza

THE GENERALIZATION OF VARIATION PROBLEM ON BRAHISTOCHROME IN THE CASE OF ROLLING HOMOGENEOUS CYLINDER

The paper under scrutiny considers the motion of a heavy homogeneous cylinder as a rolling along a required curve without sliding. Through experiments conducted, the functional was obtained as a total time of the cylinder motion. Furthermore, the variation problem of this functional minimization was solved. Finally, the algebraic equation of a directive line of the fastest descent of the cylinder was defined in the parametrical form.

1. Fisher O. Same experience with the use of vibration absorbers on aerial masts // ACTA Technica CSAV. – 1974. – Roc. 19, N2. – S. 32–38.
2. Simure E., Scanlan R. Wind Effects on Structures. An Introduction to Wind Engineering. – New York, 1978. – 348 p.
3. Фролов К.В., Фурман А.Ф. Прикладная теория виброзащитных систем. – М.: Машиностроение, 1980. – 320 с.
4. Snowdon J.C. Vibration and shock in damped mechanical systems. – New York: John Willey and Sons, 1968. – 324 p.
5. Hashish M.G., Abu-Sitta S.H. Free Vibrations of Hyperbolic Cooling Towers // J. Eng. Mech. Div. ASCE. – 1971. – April. – P. 32–38.
6. Guckenheimer J., Holmes Ph. Nonlinear Oscillations, Dynamical System and Bifurcations of Vector Fields. – New York: Springer, 1993. – 460 p.
7. Balandin D.V., Bolotnik N.N., Pilkey W.D. Optimal Protection from Impact, Shock and Vibration. – Amsterdam: Gordon and Breach, 2001. – 436 p.
8. Постнов В.А., Калинин В.О., Ростовцев Д.М. Вибрации корабля. – Л.: Судостроение, 1983. – 248 с.
9. Шмырев А.Н., Мореншильдт В.А., Ильина С.Г. Успокоители качки судов. – Л.: Судпромгиз, 1961. – 516 с.
10. Legeza V.P. Rolling of a heavy ball in a spherical recess of a translationally moving body // Int. Appl. Mechanics. – 2002. – 38, N6. – P. 758–764.
11. Легеца В.П. Динамика виброзащитных систем с роликовым гасителем низкочастотных колебаний // Пробл. прочности. – 2004. – № 2. – С. 106–118.
12. Borisov A.V., Mamaev J.S., Kilin A.A. Rolling of a Ball on a Surface. New Integrals and Hierarchy of Dynamics // Reg. and Chaot. Dyn. – 2001. – 7, N2. – P. 201–220.
13. Легеца В.П. Исследование динамического поведения нового гасителя вынужденных колебаний высотных сооружений // Изв. РАН. Механика твердого тела. – 2003. – № 5. – С. 31–38.
14. Бухгольц Н.Н. Основной курс теоретической механики. Ч. I. – М.: Наука, 1969. – 468 с.
15. Фарлоу С. Уравнения с частными производными. – М.: Мир, 1985. – 384 с.
16. Эльсгольц Л.Э. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. – М.: Наука, 1965. – 424 с.

УДК [678.027+678.029]002.8.001.53

П.М. Магазій, І.О. Мікульонок,
Л.І. Ружинська

МОДЕЛЬНІ ДОСЛІДЖЕННЯ ПРОЦЕСІВ ПЕРЕРОБКИ ТЕРМОПЛАСТИЧНИХ МАТЕРІАЛІВ ІЗ ЗАСТОСУВАННЯМ ВТОРИННОЇ СИРОВИНИ

Вступ

Рада Євросоюзу затвердила директиву, що змінює основи управління відходами і заохочує до їх повторного використання та утилізації і передбачає п'ятиступеневу ієрархію варіантів управління ними: попередження виникнення відходів; повторне використання; фізичну переробку; енергетичну та хімічну переробку; безпечне розміщення або захоронення їх [1]. Незважаючи на очевидну необхідність реалізації перших трьох варіантів, значну частку відходів ще піддають захороненню. Тільки в Україні щороку накопичується 35 млн м³ лише твердих побутових відходів, які захороняють на 770 полігонах загальною площею майже 3000 га і частково спалюють на сміттєспалювальних заводах [2].

Одним із важкоутилізовуваних видів відходів є полімерні. У зв'язку з постійним зростанням масштабів виробництва та асортименту полімерів і матеріалів на їх основі, а також необхідністю утилізації полімерних відходів набувають поширення нові термопластичні матеріали (ТпМ), в тому числі й термопластичні композиційні матеріали (ТпКМ). При цьому майже кожний полімер або композиція потребує певної конструкції робочих органів обладнання і режимів переробки, при яких досягається раціональне використання енергетичних і матеріальних ресурсів, а також необхідна якість продукції [3].

На кафедрі машин та апаратів хімічних і нафтопереробних виробництв НТУУ "КПІ" було здійснено теоретичні дослідження основного полімерпереробного обладнання для переробки ТпКМ [4–8], зокрема комплексної переробки вторинних полімерів у листові матеріали.

Постановка задачі

Мета модельних досліджень – експериментальна перевірка адекватності розроблених математичних моделей процесів переробки термопластичних композиційних матеріалів із за-

стосуванням вторинної сировини реальним процесам одержання, формування і термообробки названих матеріалів.

Модельні дослідження процесів виробництва листових ТпКМ із застосуванням вторинної сировини було здійснено на базі екструзійного і валкового обладнання кафедри МАХНВ і ВАТ «НВП "Більшовик"».

Опис модельної технологічної лінії і її основного обладнання

Модельна технологічна лінія призначена для дослідження процесу одержання листових матеріалів із застосуванням поліолефінів і різних наповнювачів, насамперед целюлозовмісних (деревної стружки, борошна, подрібненої макулатури тощо).

Виготовлення листового матеріалу на лінії залежно від методу одержання листової заготовки може бути реалізовано в такі способи (рис. 1):

- змішуванням наповнювача і одержуваного в дисковому екструдері розплаву полімеру, а також подальшим формуванням ТпКМ за допомогою одночерв'ячного екструдера та екструзійної головки;
- змішуванням наповнювача і одержуваного в дисковому екструдері розплаву полімеру, а також подальшим формуванням ТпКМ за допомогою змішувальних вальців;
- змішуванням наповнювача і полімеру, а також подальшим формуванням ТпКМ за допомогою змішувальних вальців.

За умови реалізації першого чи другого методів одержання листової заготовки гранули або отримані після подрібнення вторинної полімерної сировини частинки полімеру дозуються в дисковий екструдер. Далі одержаний розплав за допомогою розплавопроводу подається до одночерв'ячного екструдера після ділянки дозування в нього наповнювача (перший метод) або в міжвалковий проміжок змішувальних вальців (другий метод). У першому випадку розплав полімеру під тиском надходить в об'єм наповнювача, омиваючи його частинки, і ефективно розподіляється в міжвитковому просторі одночерв'ячного екструдера, що сприяє одержанню високогомогенізованого ТпКМ, який у в'язкоплинному стані за допомогою екструзійної головки формується в листову заготовку. У другому випадку розплав полімеру потрапляє в міжвалковий проміжок вальців, куди також дозується і наповнювач; листова заготовка при цьому одержується після вальцювання отриманого ТпКМ.

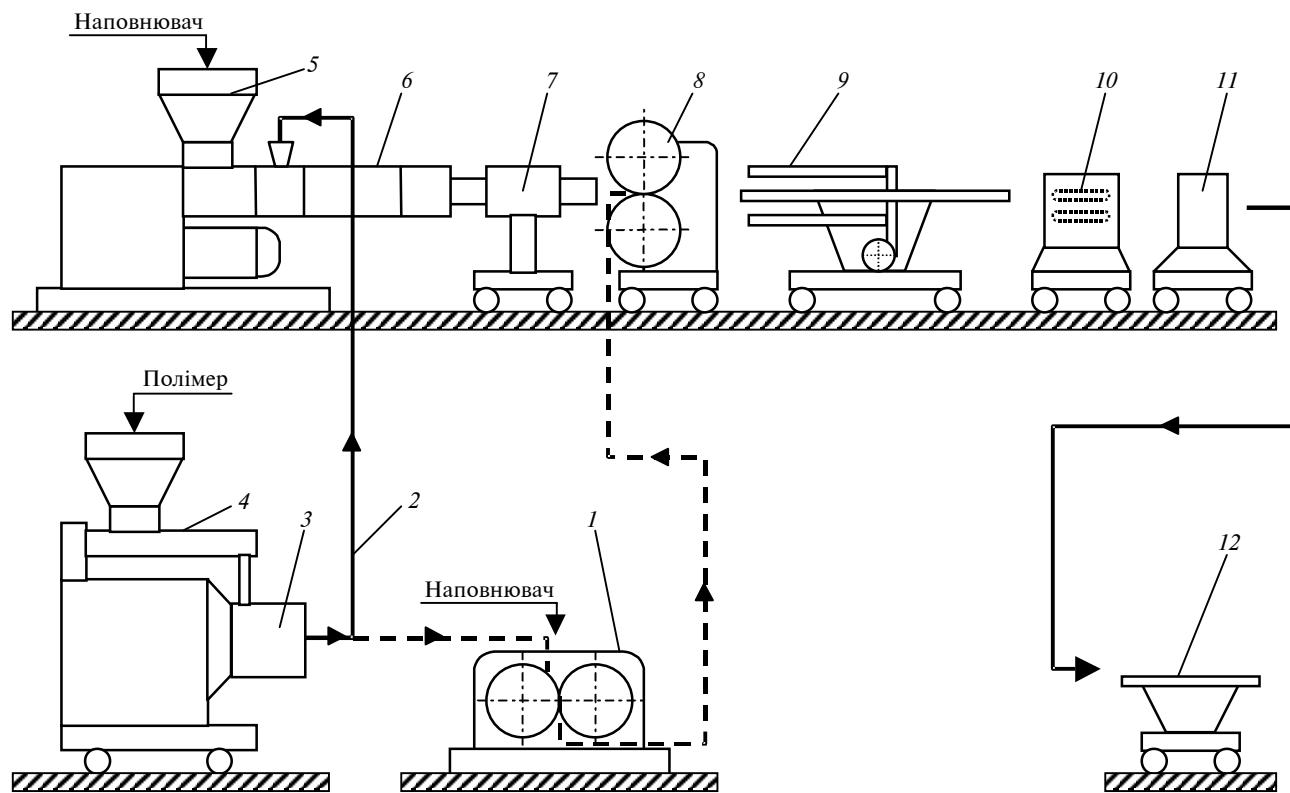


Рис. 1. Схема модельної технологічної лінії: 1 – змішувальні вальці; 2 – розплавопровід; 3 – дисковий екструдер; 4 – живильник полімеру; 5 – дозатор наповнювача; 6 – одночерв'ячний екструдер; 7 – екструзійна головка; 8 – гладильний каландр; 9 – охолоджувальний пристрій; 10 – тяговий пристрій; 11 – пристрій поперечного різання; 12 – нагромаджувальний пристрій

За умови реалізації третього методу одержання листової заготовки гранули або частинки полімеру і наповнювач одночасно дозуються в міжвалковий проміжок вальців. За рахунок теплообміну з валками і енергії дисипації полімер плавиться і поступово зміщується з наповнювачем. Після досягнення необхідної однорідності ТпКМ листова заготовка одержується зрізанням і відокремленням її від поверхні відповідного валка.

Листова заготовка, незалежно від методу її одержання, надходила на двовалковий гладильний каландр, потім на охолоджувальний і тяговий пристрій. Після цього охолоджена безперервна заготовка на пристрої поперечного різання розрізалась на мірні листи, які потім потрапляли в нагромаджувальний пристрій.

Каскадна екструзійна установка складалась з дискового екструдера з двошліпним обертовим диском діаметром 200 мм і шнековим живильником полімеру, а також одночерв'ячного екструдера (діаметр черв'яка 90 мм, довжина – 450 мм) із шнековим дозатором наповнювача і плоскошліпною екструзійною головкою.

Експериментальні дослідження калібрування і охолодження листової заготовки (за умови ре-

алізації першого або другого методів одержання листової заготовки), а також одержання листової заготовки і подальшого її калібрування та охолодження (за умови реалізації третього методу) проводилось на двовалковій машині типу вальців з діаметром і довжиною бочки 0,2 м і 0,25 м, відповідно [9].

Після валкової установки відформована листова заготовка потрапляла на охолоджувальний пристрій, який являє собою набір паралельних сталевих роликів, змонтованих на зварній основі з можливістю вільного обертання. Пристрій споряджено знімним кожухом, сполученим із нагнітальною магістраллю повітряного вентилятора.

Контрольовані параметри

Для каскадної екструзійної установки було визначено: кутову швидкість робочих органів екструдерів; кутову швидкість шнеків живильників; масову продуктивність установки; споживану потужність приводних електродвигунів; температуру корпусу дискового екструдера і циліндра одночерв'ячного екструдера; температуру розплаву на виході з дискового екструдера і темпера-

туру композиції на виході з одночерв'ячного екструдера; тиск на вході в екструзійну головку одночерв'ячного екструдера.

Для валкової установки визначались колова швидкість валків, споживана потужність електродвигуна, температура валків, температура матеріалу на вході в міжвалковий проміжок, величина міжвалкового проміжку, величина розпірних зусиль і крутних моментів, а для охолоджувального пристрою – товщина листового матеріалу і температура листового матеріалу по його товщині.

Дослідження процесу одержання ТпКМ на екструзійній установці

Експериментальні дослідження здійснювались для поліолефінів: поліетилен низької густини (ПЕНГ) марки 15803–020 ГОСТ 16337, поліетилен високої густини (ПЕВГ) марки 277–73 ГОСТ 16338 і поліпропілен марки 21030 ГОСТ 26996. За наповнювач було взято фракціоновану на ситах деревну тирсу з розміром частинок до 1 мм, а також папір поверхневої густини 75 г/м^2 з розміром частинок до 5 мм. Вміст наповнювача в перероблюваному ТпКМ змінювався від 21 до 60% (за масою). Було встановлено, що температурний режим переробки залежить від виду полімеру і ступеня його наповнення. Із збільшенням масової частки наповнювача від 30 до 60% необхідно збільшувати температуру розплаву на 10–30°C (кутову швидкість диска на 20–30 об/хв) для забезпечення зростання температури ТпКМ над температурою плавлення полімеру на 10–20°C. Результати визначення температурного режиму переробки різних ТпКМ за масової продуктивності 15 кг/год наведено в табл. 1.

Дослідження процесу одержання ТпКМ на валковій установці

Дослідження проводилось для таких композицій (за масою):

- 1) вторинний ПЕНГ – 60% і дубова тирса – 40%;
- 2) вторинний ПЕВГ – 60% і дубова тирса – 40%;
- 3) вторинний ПЕНГ – 30%, вторинний ПЕВГ – 30% і дубова тирса – 40%.

Реологічні властивості полімерів досліджуваних композицій, які проводились методом капілярної віскозиметрії на приладі типу ИИРТ-3, такі:

- 1) вторинний ПЕНГ:

$$T = 160^\circ\text{C}; K = 1,15 \cdot 10^4 \text{ Па}\cdot\text{с}^n; n = 0,38;$$

$$T = 180^\circ\text{C}; K = 3,38 \cdot 10^3 \text{ Па}\cdot\text{с}^n; n = 0,72;$$

- 2) вторинний ПЕВГ:

$$T = 160^\circ\text{C}; K = 2,69 \cdot 10^4 \text{ Па}\cdot\text{с}^n; n = 0,23;$$

$$T = 180^\circ\text{C}; K = 6,96 \cdot 10^3 \text{ Па}\cdot\text{с}^n; n = 0,96,$$

де K – коефіцієнт консистенції, визначений за температури T ; n – індекс течії.

Що стосується реологічних властивостей одержуваних ТпКМ, які можуть суттєво відрізнятися від властивостей полімерів, що утворюють матрицю ТпКМ, то на практиці доцільно застосовувати результати дослідів, проведених безпосередньо на відповідному переробному обладнанні. Враховуючи сказане, реологічні властивості одержуваних ТпКМ були визначені в результаті обробки експериментальних даних процесу вальцювання.

У результаті обробки експериментальних даних було отримано такі реологічні властивості досліджених ТпКМ (за масою):

- 1) вторинний ПЕНГ – 60% і дубова тирса – 40%:

$$T = 117^\circ\text{C}; K = 1,34 \cdot 10^5 \text{ Па}\cdot\text{с}^n; n = 0,245;$$

$$T = 137^\circ\text{C}; K = 6,35 \cdot 10^4 \text{ Па}\cdot\text{с}^n; n = 0,345;$$

Таблиця 1. Температурний режим переробки ТпКМ за продуктивності 15 кг/год

Композиційний матеріал			Температура, °C					
Полімер	Наповнювач	Масова частка наповнювача	Дисковий екструдер			Черв'ячний екструдер		
			корпус	диск	розплав	корпус	головка	розплав
ПЕНГ	Тирса	0,5	160	180	185	170	180	185
ПЕВГ	Тирса	0,4	170	190	190	180	190	195
ПП	Тирса	0,3	180	190	195	180	195	195
ПЕНГ	Папір	0,5	160	180	185	175	185	185
ПЕНГ	Папір	0,5	160	180	185	170	180	185

2) вторинний ПЕВГ – 60% і дубова тирса – 40%:

$$T = 131^{\circ}\text{C}; K = 1,11 \cdot 10^5 \text{ Па}\cdot\text{с}^n; n = 0,305;$$

$$T = 147^{\circ}\text{C}; K = 2,74 \cdot 10^5 \text{ Па}\cdot\text{с}^n; n = 0,103;$$

3) вторинний ПЕНГ – 30%, вторинний ПЕВГ – 30% і дубова тирса – 40%:

$$T = 143^{\circ}\text{C}; K = 5,54 \cdot 10^5 \text{ Па}\cdot\text{с}^n; n = 0,027;$$

$$T = 157^{\circ}\text{C}; K = 4,86 \cdot 10^4 \text{ Па}\cdot\text{с}^n; n = 0,484.$$

Як видно, реологічні характеристики наповнених ТпКМ із застосуванням вторинної си-

ровини істотно відрізняються від характеристик первинних полімерів.

Досліджені матеріали належать до наповнених ТпМ, тому їх теплофізичні властивості визначались залежно від властивостей компонентів, складу і структури матеріалу [10].

З табл. 2 видно, що основні енергосилові параметри процесу вальцювання ТпКМ – питомі (на одиницю довжини бочки валків) розпірні зусилля і потужність – зростають із збільшенням

Таблиця 2. Енергосилові параметри процесу вальцювання ТпКМ

Колова швидкість валків, м/с	Ширина ТпКМ, мм	Міжвалковий проміжок, мм	Температура заднього валка, °С	Температура переднього валка, °С	Температура ТпКМ в вхіді в проміжок, °С	Величина обертового запасу ТпКМ, мм	Питомі розпірні зусилля, кН/м	Питома потужність, Вт/м
Вторинний ПЕНГ – 60% (за масою) і дубова тирса – 40% (за масою)								
0,03	210	0,43				25	37,2	571
0,04	200	0,41				25	35,7	675
0,05	210	0,40	116	118	117	28	43,9	857
0,06	210	0,35				24	47,8	881
0,07	230	0,34				28	60,3	935
0,03	245	0,46				25	22,1	286
0,04	240	0,44				25	27,1	396
0,05	240	0,42	136	138	137	27	35,5	667
0,06	235	0,39				25	43,7	702
0,07	240	0,39				28	44,6	729
Вторинний ПЕВГ – 60% (за масою) і дубова тирса – 40% (за масою)								
0,03	185	0,41				25	46,8	595
0,04	190	0,41				24	45,6	605
0,05	190	0,40	130	132	131	23	47,9	737
0,06	200	0,40				21	48,7	775
0,07	165	0,38				26	57,8	939
0,03	155	0,45				21	40,7	129
0,04	160	0,44				23	41,5	156
0,05	160	0,44	146	148	147	22	41,4	375
0,06	170	0,43				20	45,2	441
0,07	170	0,43				19	46,4	559

Кінець табл. 2

Колова швидкість валків, м/с	Ширина ТпКМ, мм	Міжвалковий проміжок, мм	Температура заднього валка, °С	Температура переднього валка, °С	Температура ТпКМ + вході в проміжок, °С	Величина обертового запасу ТпКМ, мм	Питомі розпірні зусилля, кН/м	Питома потужність, Вт/м
Вторинний ПЕНГ – 30% (за масою), вторинний ПЕВГ – 30% (за масою) і дубова тирса – 40% (за масою)								
0,03	155	0,51				22	44,1	516
0,04	165	0,50				20	41,4	606
0,05	165	0,50	144	142	143	21	43,5	697
0,06	170	0,49				22	44,0	735
0,07	160	0,49				20	48,2	969
0,03	170	0,50				22	38,3	235
0,04	170	0,49				24	38,3	441
0,05	185	0,50	156	158	157	19	37,0	541
0,06	180	0,49				18	39,9	750
0,07	175	0,51				19	41,0	771

колових швидкостей валків і із зменшенням середньої температури ТпКМ у міжвалковому проміжку незалежно від виду перероблюваного матеріалу.

Дослідження процесу калібрування листового ТпКМ на валковій установці

Для визначення температури в центрі (по товщині) листового ТпКМ у нього закладався термоелектричний перетворювач. Листова заготовка, одержана або формуванням крізь екструзійну головку, або на валковій установці, нагрівалась у термошафі до температури закінчення її формування, а потім пропускала крізь міжвалковий проміжок. При цьому замірялась температура в центрі досліджуваного зразка, розпірні зусилля, а також крутні моменти, що діють на валки.

Досліджуваним матеріалом були вторинний ПЕНГ – 60% (за масою) і дубова тирса – 40% (за масою).

Під час калібрування листової заготовки в міжвалковому проміжку завдяки відповідній температурі валків здійснювалось охолодження ТпКМ у міжвалковому проміжку з одночасним твердненням її поверхневих шарів.

З табл. 3 видно, що питомі розпірні зусилля зростали із збільшенням колових швидкостей валків і зменшенням товщини вихідної заготовки (величини міжвалкового проміжку). При цьому питома потужність, що витрачається в міжвалковому проміжку, також зростала із збільшенням колових швидкостей валків і майже не змінювалась у діапазоні досліджених величин товщини вихідної заготовки. Останній факт можна пояснити тим, що за умови зменшення мінімальної товщини оброблюваного листа зменшується зона деформування ТпКМ у міжвалковому проміжку (як по ширині, так і по довжині). При цьому збільшення товщини листа приводить, з одного боку, до збільшення споживаної потужності (за рахунок збільшення довжини зони деформування), а з другого – до її зменшення (за рахунок зменшення швидкості зсуву по ширині проміжку). Також під час калібрування порівняно з процесом вальцювання (див. табл. 2) не було обертового запасу на вході в міжвалковий проміжок. Крім того, із зменшенням товщини листа зростала відносна частка товщини затверділого матеріалу.

Таблиця 3. Енергосилові параметри процесу калібрування ТпКМ на гладильному каландрі (вторинний ПЕНГ – 60% (за масою) і дубова тирса – 40% (за масою))

Міжвалковий проміжок, мм	Колова швидкість валків, м/с	Ширина ТпКМ, мм	Товщина ТпКМ, мм	Температура заднього валка, °С	Температура переднього валка, °С	Температура ТпКМ $t_{\text{вході}}$ в проміжок, °С	Питомі розпірні зусилля, кН/м	Питома потужність, Вт/м
3	0,01	160	3,30	40,0	45,0	180,0	26,7	31,0
	0,02		3,25	40,5	44,7	179,9	27,9	49,1
	0,04		3,30	41,0	44,5	180,0	30,5	74,7
	0,06		3,20	41,2	45,1	180,1	31,6	113,5
	0,08		3,15	40,7	44,8	180,1	33,5	147,0
26	0,01	170	7,20	39,9	44,5	180,0	20,2	29,8
	0,02		7,20	40,5	44,7	179,9	21,5	49,4
	0,04		7,15	40,0	44,9	180,0	23,0	73,1
	0,06		7,10	40,2	45,2	180,1	23,1	104,4
	0,08		7,10	39,7	44,8	180,1	25,7	144,5
10,1	0,01	150	11,90	40,4	45,1	179,5	10,4	31,7
	0,02		11,90	40,2	44,9	179,7	10,9	54,0
	0,04		11,85	41,1	44,5	180,1	12,6	78,1
	0,06		11,80	41,2	45,3	180,0	14,7	107,9
	0,08		11,85	40,3	44,7	179,5	15,5	150,5

Порівняння експериментальних і теоретичних даних визначення величин розпірних зусиль і потужностей, які витрачаються на процеси вальцювання і калібрування, підтверджує їх достатню збіжність (похибка не перевищує 10–15%).

Дослідження процесу охолодження відкаліброваного листового ТпКМ в охолоджувальному пристрої

Було досліджено листові зразки, одержані на валковій установці після їх калібрування, співвідношення ширини і довжини яких до їх товщини перевищувало 10, що давало можливість нехтувати перенесенням теплоти по ширині і довжині зразків та розглядати процес охолодження як одновимірний.

Експериментальні значення температури листа (склад матеріалу листа: 60% (за масою) вторинний ПЕНГ і 40% (за масою) тирси) визначались за допомогою термоелектричних пе-

ретворювачів, розміщених на глибині 0,5 мм від поверхні листа (температура T_1), а також по його центру (температура T_2).

Після виходу зразків завтовшки 6 і 10 мм з міжвалкового проміжку гладильного каландра і подальшого охолодження на відкритому повітрі температура поверхневих шарів листа спочатку збільшувалась завдяки перенесенню теплоти з його внутрішніх шарів, після чого охолодження поверхневих і внутрішніх шарів відбувалося синхронно (рис. 2, 3).

На графіках зміни температури ТпКМ в часі (див. рис. 2 і 3) є майже горизонтальна ділянка, що відповідає процесу кристалізації полімеру ТпКМ, після якої характер процесу охолодження зберігається, як і до неї.

Для інтенсифікації охолодження листових матеріалів завтовшки понад 6 мм процес можна здійснювати в умовах вимушеної конвекції, наприклад, обдуванням повітрям у пристрої тунельного типу.

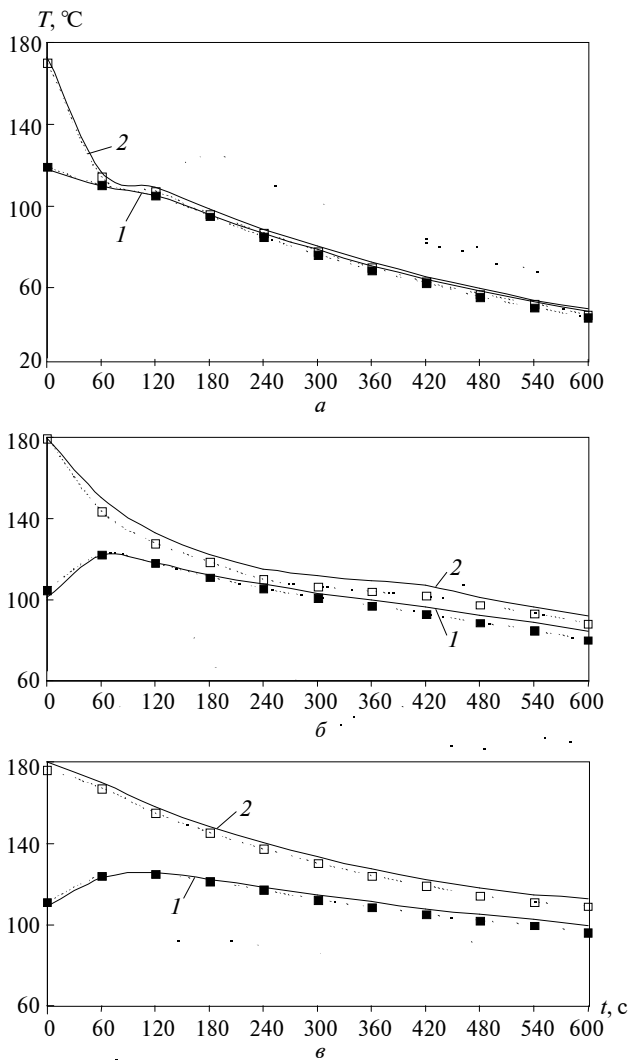


Рис. 2. Зміна температури листового ТпКМ завтовшки 3 мм (а), 6 мм (б) і 10,1 мм (е) по його товщині в часі на відкритому повітрі в умовах вільної конвекції: 1 – поверхневий шар (розрахунок); 2 – центр зразка (розрахунок); ■ – поверхневий шар (експеримент); □ – центр зразка (експеримент)

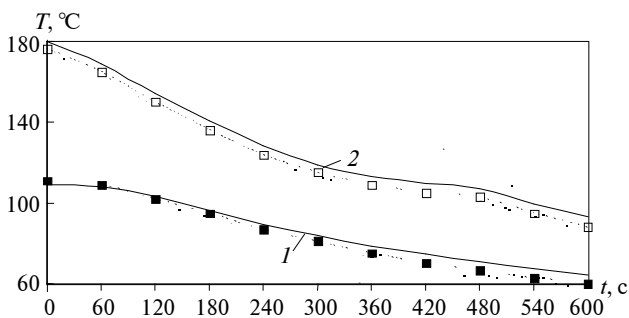


Рис. 3. Зміна температури листового ТпКМ завтовшки 10,1 мм по його товщині в часі на відкритому повітрі в умовах вимушеної конвекції: 1 – поверхневий шар (розрахунок); 2 – центр зразка (розрахунок); ■ – поверхневий шар (експеримент); □ – центр зразка (експеримент)

З рис. 2 і 3 також видно, що під час охолодження відносно товстих листів (зазвичай, більше 8–10 мм) перепад температури між внутрішніми і поверхневими шарами може перевищувати 30–40°C. Це може призвести до різних умов структуроутворення листового ТпКМ у різних його шарах і, як наслідок, до нерівномірності властивостей готового листа, зокрема до виникнення надмірних залишкових деформацій, що негативно впливає на експлуатаційні показники виробу.

Таким чином, інтенсифікація процесу охолодження товстостінних листів сприяє зменшенню часу охолодження, але може негативно вплинути на якісні показники готової продукції і бути недоцільною.

Висновки

1. Експериментальними дослідженнями процесу переробки композицій на основі поліолефінів з деревними і паперовими наповнювачами доведено можливість переробки таких композицій у листові матеріали на технологічних лініях на основі екструзійно-валкового обладнання.

2. Для визначення реологічних характеристик наповнених ТпКМ із застосуванням вторинної полімерної сировини, які істотно відрізняються від характеристик первинних полімерів, на практиці доцільно застосовувати результати дослідів, проведених безпосередньо на відповідному переробному обладнанні. Це підтверджує доцільність переробки вторинної полімерної сировини безпосередньо в місцях її утворення, коли є необхідна кількість сировини з визначеними властивостями. Можливість же ефективної переробки вторинної полімерної сировини невизначеного складу і властивостей є досить проблематичною, тому зазначену сировину можна застосовувати як добавку до полімерної сировини з певними властивостями в кількості, що істотно на них не впливає.

3. Температурний режим екструзії досліджених ТпКМ залежить від виду полімеру і ступеня його наповнення. Із збільшенням масової частки наповнювача від 30 до 60% слід збільшувати температуру розплаву на 10–30°C.

4. Під час охолодження відносно товстих листів перепад температури між внутрішніми і поверхневими шарами може перевищувати 30–40°C, що призводить до різних умов структуроутворення листового ТпКМ у різних його шарах і, як наслідок, – до нерівномірності властивостей готового листа, зокрема до виникнення

надмірних залишкових деформацій. Таким чином, інтенсифікація процесу охолодження товстих листів, з одного боку, сприяє зменшенню часу охолодження, але в той же час може негативно впливати на якісні показники готової продукції і виявитися недоцільною.

5. Порівняння експериментальних і теоретичних даних окремих процесів одержання листових матеріалів із композицій на основі поліолефінів з деревними і паперовими наповнювачами

підтверджує адекватність розроблених математичних моделей черв'ячної екструзії, вальцювання, калібрування на гладильному каландрі, а також термообробки ТпКМ із застосуванням вторинної сировини реальним процесам.

Беручи до уваги перспективність застосування виробів з композиційних матеріалів із застосуванням вторинної сировини, доцільно провести дослідження процесів одержання і переробки більш широкого спектра цих матеріалів.

П.Н. Магазий, И.О. Микулёнок, Л.И. Ружинская

МОДЕЛЬНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ ПРОЦЕССОВ ПЕРЕРАБОТКИ ТЕРМОПЛАСТИЧНЫХ МАТЕРИАЛОВ С ПРИМЕНЕНИЕМ ВТОРИЧНОГО СЫРЬЯ

Рассмотрены экспериментальные исследования процесса переработки вторичных наполненных термопластов в листовые материалы на экструзионно-валковом оборудовании. Приведены результаты измерений энергосиловых параметров процессов получения, калибрования и охлаждения листовых материалов, которые удовлетворительно согласовываются с результатами теоретических исследований. Сделаны рекомендации относительно проведения технологического процесса получения целлюлозосодержащих вторичных полиолефинов.

P.M. Magazyi, I.O. Mikulionok, L.I. Ruzhinska

THE MODELING RESEARCH OF THERMOPLASTIC MATERIALS PROCESSING USING SECONDARY RAW MATERIAL

This study provides important insights into the processing of secondary filled thermoplastic materials into sheet materials on the extrusion-roll equipment. The experimental results of the measurements of power and power force parameters of production, calibration and cooling of the sheet materials conform to the theoretical data gained. In this paper, we also give some recommendations on how to carry out the process of production of cellulose secondary polyolefines.

1. *Запропоновано нові пріоритети управління відходами // Євробюлетень : Інформ. видання Представництва Європейської Комісії в Україні. – 2008. – № 11. – С. 21.*
2. *Програма поводження з твердими побутовими відходами. Затверджена Постановою Кабінету Міністрів України від 04.03.2004 р., № 265 // Урядовий кур'єр. – 2004. – 24 берез. (№ 55). – С. 8–9.*
3. *Мікульонок І.О., Радченко Л.Б. Переробка вторинної сировини екструзією. – К.: ІВЦ «Видавництво “Політехніка”», 2006. – 184 с.*
4. *Мікульонок І.О. Енергосилові параметри процесу формування термопластичних композиційних матеріалів у валкових машинах // Наукові вісті НТУУ “КПІ”. – 2003. – № 5. – С. 70–76.*
5. *Мікульонок І.О., Лукач Ю.Ю., Ружинська Л.І. Енергосилові параметри процесу калібрування листів з полімерних композиційних матеріалів у гладильному каландрі // Там же. – 2003. – № 6. – С. 86–92.*
6. *Мікульонок І.О., Радченко Л.Б., Ружинська Л.І. Моделювання термообробки погонних композитних матеріалів // Там же. – 2005. – № 2. – С. 66–71.*
7. *Лукашова В.В., Мікульонок І.О., Радченко Л.Б. Черв'ячна екструзія. Узагальнена математична модель // Хімічна промисловість України. – 2007. – № 1. – С. 32–35.*
8. *Мікульонок І.О. Неперервні вироби з термопластичних композитних матеріалів. Основні принципи моделювання процесів одержання // Там же. – 2007. – № 2. – С. 36–39.*
9. *Доброногова С.И., Демчук В.А., Трохин М.И. Исследование энергосиловых параметров валковых машин тензометрическим методом // Химическое машиностроение. – К.: Техніка, 1974. – Вып. 18. – С. 52–56.*
10. *Мікульонок І.О. Полімерні композиційні матеріали. Визначення теплофізичних властивостей // Хімічна промисловість України. – 2003. – № 5. – С. 25–28.*

Рекомендована Радою інженерно-хімічного факультету НТУУ “КПІ”

Надійшла до редакції
11 листопада 2008 року

УДК 539.4: 620.17

М.П. Малезик

ЧИСЛОВИЙ ПЕРЕРАХУНОК ДИНАМІЧНИХ НАПРУЖЕНЬ З ФОТОПРУЖНИХ ОРТОТРОПНИХ МОДЕЛЕЙ НА НАТУРНЕ ТІЛО

Вступ

Метод динамічної фотопружності анізотропних тіл дає можливість визначити динамічний напружено-деформований стан у плоских моделях з оптично-чутливого анізотропного матеріалу [1]. Зокрема, метод застосовується при визначенні динамічних коефіцієнтів концентрації поблизу отворів в анізотропних пластинах [2], вивченні розподілу хвильового поля напружень поблизу вільних і зв'язаних границь в анізотропних шаруватих середовищах [3], визначенні динамічних коефіцієнтів інтенсивності напружень у вершині тріщини, що знаходиться в ортотропній пластині [4, 5]. Проте актуальним є питання про ефективність і доцільність застосування цього методу для розв'язування динамічних задач із наступним переходом від напружень у моделі до напружень у деталі чи конструкції з натурального анізотропного матеріалу. Слід зазначити, що через ускладнений характер напруженого стану анізотропного пружного середовища, який виникає при його динамічному навантаженні, такі питання до цього часу не розглядалися.

Для подібності процесів у натурному тілі і моделі необхідно та достатньо виконання таких умов: модель має бути геометрично подібна до натурального тіла; процеси в моделі і натурному тілі повинні належати до одного класу, а їх опис має здійснюватися однаковими рівняннями; початкові і граничні умови в моделі необхідно реалізовувати таким чином, щоб безрозмірні початкові і граничні умови моделі тотожно збіглися з такими ж умовами в натурному тілі; однойменні безрозмірні параметри, що входять у рівняння процесів, а також початкові і граничні умови в моделі і натурному тілі мають бути відповідно однаковими. Отже, визначення умов подібності із загальних фізичних законів, під які підпадає досліджуване явище, дає змогу при моделюванні окремих задач не складати рівняння, які описують окреме явище, а будувати моделі за правилами теорії подібності.

Постановка задачі

У даній статті на основі загальних принципів моделювання напруженого стану методом фотопружності та загальної теорії подібності розроблено спосіб перерахунку динамічних напружень із фотопружної моделі на натурне тіло в плоских задачах механіки ортотропних тіл.

Деякі співвідношення теорії подібності напруженого стану

Розглянемо загальні принципи моделювання в методі динамічної фотопружності. При моделюванні натурального середовища та побудові моделі насамперед необхідно вибрати матеріал для моделі. В цьому випадку задаються три масштаби: $\rho_0 = \sigma_0 / \alpha_0^2$, $\alpha_0 = l_0 / t_0$, $\gamma_0 = \alpha_0^2 / l_0$.

Геометричний масштаб l_0 і масштаб часу t_0 визначаються однозначно, що призводить до ускладнення при створенні потрібного динамічного навантаження і необхідного для методу фотопружності розміру моделі. Щоб уникнути цього, потрібно довільно задавати геометричний масштаб l_0 , тобто мати його фіксованим, або, використовуючи принцип суперпозиції, дослідити окремо напружений стан середовища від дії динамічного навантаження і від дії власної ваги.

Розглянемо деякі критерії подібності. Якщо $(C_p/a_0)_H = (C_p/a_0)_M$ поділити на $(C_s/a_0)_H = (C_s/a_0)_M$, то отримаємо рівність відношень швидкостей поздовжніх хвиль до швидкостей поперечних хвиль у натурному тілі і моделі

$$\left(\frac{C_p}{C_s}\right)_H = \left(\frac{C_p}{C_s}\right)_M. \quad (1)$$

Критерій подібності (1) передбачає рівність коефіцієнтів Пуассона ν для натурального і модельного середовища

$$\nu_H = \nu_M. \quad (2)$$

Залежність (2) справедлива для випадку, коли натурне і модельне середовища знаходяться в однакових умовах напруженого стану. Врахуємо, що фотопружне моделювання динамічних напружень проводиться на плоских моделях, тобто в умовах плоского напруженого стану. Тоді виконання рівності (1) приведе до умови

$$\nu_H = \frac{\nu_M}{1 + \nu_M}. \quad (3)$$

Модулі пружності матеріалів натурального тіла і моделі повинні бути зв'язані співвідношеннями

$$E_H = \frac{E_M(1 + 2\nu_M)}{(1 + \nu_M)^2}. \quad (4)$$

Згідно із загальним критерієм при моделюванні деформацій [6, 7], відповідні зміщення в усіх точках змінюються пропорційно зміні відповідних геометричних розмірів. Внаслідок цього деформації в моделі мають дорівнювати деформаціям у натурному тілі:

$$\varepsilon_H = \varepsilon_M. \quad (5)$$

Практично при моделюванні виконати умову (5) в більшості випадків не вдається і тоді доводиться масштаб швидкостей точок вибирати на основі виразу

$$V_0 = \frac{l_0}{t_0} \varepsilon_0, \quad (6)$$

де V_0 – масштаб швидкості частинок.

Виразимо масштаб швидкостей частинок V_0 у вигляді $V_0 = u_0/t_0$, де u_0 – масштаб зміщень, підставимо його у вираз (6) і отримаємо

$$\frac{u_0}{t_0} = \frac{l_0 \varepsilon_0}{t_0} \quad \text{або} \quad u_0 = l_0 \varepsilon_0. \quad (7)$$

Отже, при розширеній подібності масштаб зміщень визначається не тільки геометричним масштабом, але і масштабом деформацій.

Складність задачі моделювання напруженого стану анізотропних тіл значною мірою пояснюється залежністю напруженого стану від пружних сталей [8].

Отримання співвідношень для перерахунку напружень із моделі на натурне тіло

Припустимо, що є два однорідні тіла, виготовлені з різних матеріалів, і знаходяться вони в узагальненому плоскому напруженому стані. Будемо вважати, що тіла мають однакову форму, розміри й навантаження.

Виділимо два випадки задачі.

1. Область пластини однозв'язна і багатозв'язна, але навантаження таке, що на будь-якому внутрішньому контурі $X_k = Y_k = 0$. Тут X_k і Y_k – проекції головного вектора заданого навантаження на k -му контурі, віднесені до одиниці довжини твірної L :

$$X_k = - \int_{L_k} (\sigma_x d_y - \sigma_{xy} d_x), \quad (8)$$

$$Y_k = \int_{L_k} (\sigma_y d_x - \sigma_{xy} d_y).$$

2. Область багатозв'язна, але навантаження таке, що відзначені вище умови не виконуються.

Отримаємо умови, якими повинні бути зв'язані пружні сталі S_{ij} двох тіл, щоб напруження σ_x , σ_y , σ_{xy} в обох тілах були однакові. Відомо [9], що функція напружень Ері Φ в плоскій задачі теорії пружності ортотропного тіла задовольняє рівняння сумісності деформацій

$$S_{22} \frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^4} - 2S_{26} \frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^3 \partial y} + (2S_{12} + S_{66}) \frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^2 \partial y^2} - 2S_{16} \frac{\partial^4 \Phi}{\partial x \partial y} + S_{11} \frac{\partial^4 \Phi}{\partial y^4} = 0 \quad (9)$$

та граничні умови в напруженнях

$$\frac{d}{dS} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} \right) = \mp \tilde{X}, \quad \frac{d}{dS} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right) = \pm \tilde{Y}. \quad (10)$$

Для багатозв'язної області мають виконуватись умови однозначності переміщень, які через деформації виражаються у вигляді

$$\int_{L_k} \left(\frac{\partial \varepsilon_x}{\partial y} - \frac{\partial \gamma_{xy}}{2 \partial x} \right) dx - \left(\frac{\partial \varepsilon_y}{\partial x} - \frac{\partial \gamma_{xy}}{2 \partial y} \right) dy = 0, \quad (11)$$

$$\int_{L_k} \left\{ \varepsilon_x dx + \frac{1}{2} \gamma_{xy} dy - y \left[\left(\frac{\partial \varepsilon_x}{\partial y} - \frac{\partial \gamma_{xy}}{2 \partial x} \right) dx - \left(\frac{\partial \varepsilon_y}{\partial x} - \frac{\partial \gamma_{xy}}{2 \partial y} \right) dy \right] \right\} = 0, \quad (12)$$

$$\int_{L_k} \left\{ \varepsilon_y dy + \frac{1}{2} \gamma_{xy} dx + x \left[\left(\frac{\partial \varepsilon_x}{\partial y} - \frac{\partial \gamma_{xy}}{2 \partial x} \right) dx - \left(\frac{\partial \varepsilon_y}{\partial x} - \frac{\partial \gamma_{xy}}{2 \partial y} \right) dy \right] \right\} = 0. \quad (13)$$

Виразимо в (11), (12), (13) деформації через напруження за законом Гука, додамо і віднімемо з лівих частин (12), (13) інтеграли

$$\int_{L_k} \frac{S_{66}}{2} \sigma_y dx \quad \text{і} \quad \int_{L_k} \frac{S_{66}}{2} \sigma_x dy.$$

Відповідно, із врахуванням (9) отримаємо

$$\int_{L_k} d\omega_z = 0; \quad (14)$$

$$\int_{L_k} \left\{ \left[S_{11}\sigma_x + \left(S_{12} + \frac{S_{66}}{2} \right) \sigma_y + S_{16}\sigma_{xy} \right] dx + \left(\frac{S_{16}\sigma_x}{2} + \frac{S_{26}\sigma_y}{2} \right) dy - y d\omega_z \right\} = Y_k \frac{1}{2} S_{66}, \quad (15)$$

$$\int_{L_k} \left\{ \left[S_{22}\sigma_y + \left(S_{12} + \frac{S_{66}}{2} \right) \sigma_x + S_{26}\sigma_{xy} \right] dy + \left(\frac{S_{16}\sigma_x}{2} + \frac{S_{26}\sigma_y}{2} \right) dx + x d\omega_z \right\} = -X_k \frac{1}{2} S_{66}, \quad (16)$$

де

$$d\omega_z = \int_{L_k} \left\{ \left[S_{11} \frac{\partial \sigma_x}{\partial y} + \left(S_{12} + \frac{S_{66}}{2} \right) \frac{\partial \sigma_y}{y} - \frac{1}{2} S_{16} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} - \frac{1}{2} S_{26} \frac{\partial \sigma_y}{\partial x} \right] dx - \left[S_{22} \frac{\partial \sigma_y}{\partial x} + \left(S_{12} + \frac{S_{66}}{2} \right) \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} - \frac{1}{2} S_{26} \frac{\partial \sigma_y}{x} - \frac{1}{2} S_{16} \frac{\partial \sigma_x}{\partial y} \right] dy \right\} = 0.$$

При виведенні рівнянь (14)–(16) на основі рівнянь рівноваги плоскої задачі здійснювалася заміна $\frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x}$ на $-\frac{\partial \sigma_y}{\partial y}$, $\frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y}$ на $-\frac{\partial \sigma_x}{\partial x}$.

Поділимо ліві і праві частини рівнянь (10), (14)–(16) на одну із сталей, наприклад S_{11} , отримаємо, що при $X_k = Y_k = 0$ напруження σ_x , σ_y , σ_{xy} залежать від чотирьох безрозмірних сталей S_{22}/S_{11} , S_{26}/S_{11} , S_{16}/S_{11} , $(2S_{16} + S_{66})/S_{11}$, а при $X_k \neq Y_k \neq 0$ додається ще одна безрозмірна стала S_{66}/S_{11} .

У системі координат, суміщеній з головними напрямками ортотропії ($S_{16} = S_{26} = 0$) для збігу σ_x , σ_y , σ_{xy} , у випадку $X_k = Y_k = 0$ необхідно і достатньо, щоб збіглися головні напрямки обох тіл і дві безрозмірні сталі E_1/E_2 і $E_1/G_{12} - 2\nu_1$ одного тіла дорівнювали відповідним безрозмірним сталим другого тіла. У випадку $X_k \neq 0$, $Y_k \neq 0$ має ще додатково збігатися безрозмірна стала E_1/G_{12} . Як бачимо, підібрати матеріал для моделі за відомими значеннями пружних сталей натурального матеріалу так, щоб збіглися наведені ви-

ще сталі, надзвичайно важко. При виборі модельних оптично-чутливих матеріалів це ще більше ускладнюється, оскільки вимоги до прозорості матеріалу обмежуються кількістю і властивостями армуючого елемента, що обмежує варіювання пружними константами.

Розглянемо спосіб перерахунку напружень з моделі на натурне тіло, що не вимагає жорстких обмежень на властивості модельних матеріалів. Використаємо комплексні параметри Г.С. Лехницького [9] μ_1 , μ_2 , які характеризують анізотропію тіла і є основними величинами, від яких залежить розподіл напружень у плоских задачах ортотропної теорії пружності. Припустимо, що область моделі S_m подібна до області натурального тіла S_n , тобто всі лінійні розміри l в області S_m змінені порівняно з тими ж розмірами в області S_n в a раз (геометрична подібність):

$$l_n = a l_m. \quad (17)$$

Нехай також зусилля, прикладені до контурів моделі, подібні до зусиль, прикладених до контурів натурального тіла (силова подібність):

$$\frac{P_n}{P_m} = \frac{Q_n}{Q_m} = \frac{R_n}{R_m} = \dots = \beta. \quad (18)$$

Загальний вираз для напружень у плоскому ортотропному тілі подамо у вигляді [9]

$$T \frac{1}{h} \left[\frac{P}{\lambda} \varphi(\mu) f_1 \left(\frac{x}{l_1}, \frac{y}{l_2} \right) + \frac{Q}{\lambda_2} \psi(\mu) f_2 \left(\frac{x}{l_3}, \frac{y}{l_4} \right) + \frac{R}{\lambda_3} f_3 \left(\frac{x}{l_5}, \frac{y}{l_6} \right) \right], \quad (19)$$

де P , Q , R – множники, що мають розмірність сили; f_1 , f_2 , f_3 – безрозмірні функції; l_i , λ_i – величини, що мають розмірність довжини; $\varphi(\mu)$, $\psi(\mu)$ – дійсні функції комплексних параметрів; h – товщина.

Виразимо напруження в моделях, що задовольняють умови силової і геометричної подібності відносно натурального тіла у вигляді

$$T_i = \frac{1}{h_i} \left[\frac{P_i}{\lambda_{1i}} \varphi_i(\mu) f_1 \left(\frac{x_i}{l_{1i}}, \frac{y_i}{l_{2i}} \right) + \frac{Q_i}{\lambda_{2i}} \psi_i(\mu) f_2 \left(\frac{x_i}{l_{3i}}, \frac{y_i}{l_{4i}} \right) + \frac{R_i}{\lambda_{3i}} f_3 \left(\frac{x_i}{l_{5i}}, \frac{y_i}{l_{6i}} \right) \right], \quad (20)$$

де T_i , $\varphi_i(\mu)$, $\psi_i(\mu)$ – відомі величини, а функції мають такий самий вигляд, як і в (19).

Враховуючи умови геометричної (17) і силової (18) подібностей, співвідношення (20) подамо у вигляді

$$T_i = \frac{a_i}{h_i \beta_i} \left[\varphi_i(\mu) \frac{P}{\lambda_1} f_1 \left(\frac{x}{l_1}, \frac{x}{l_2} \right) + \psi_i(\mu) \frac{Q}{\lambda_2} \left(\frac{x}{l_3}, \frac{x}{l_4} \right) + \frac{R}{\lambda_3} f_3 \left(\frac{x}{l_5}, \frac{x}{l_6} \right) \right]. \quad (21)$$

У (21) входять невідомі величини $\frac{P}{\lambda_1} f_1$, $\frac{Q}{\lambda_2} f_2$, $\frac{R}{\lambda_3} f_3$, які є і у виразах для напружень у натурному тілі (19).

Якщо з експерименту відомі напруження T_i в трьох геометрично подібних і подібно навантажених моделях, які виготовлені з конструктивно-ортотропних матеріалів і мають різні пружні сталі, то з (21) отримаємо три рівняння для визначення трьох невідомих величин: $\frac{P}{\lambda_1} f_1$,

$$\frac{Q}{\lambda_2} f_2 \text{ і } \frac{R}{\lambda_3} f_3.$$

Запишемо рівняння (21) для трьох моделей і розв'яжемо їх відносно невідомих. Отримаємо

$$\frac{P f_1}{\lambda_1} = \frac{1}{(\varphi_1 - \varphi_2)(\varphi_1 - \varphi_3) - (\varphi_1 - \varphi_3)(\varphi_1 - \varphi_2)} \times \\ \times [(T_1 k_1 - T_2 k_2)(\psi_1 - \psi_2) - \\ - (T_1 k_1 - T_3 k_3)(\psi_1 - \psi_2)], \quad (22)$$

$$\frac{Q f_2}{\lambda_2} = \frac{1}{(\varphi_1 - \varphi_2)(\varphi_1 - \varphi_3) - (\varphi_1 - \varphi_3)(\varphi_1 - \varphi_2)} \times \\ \times [(T_1 k_1 - T_2 k_2)(\psi_1 - \psi_3) - \\ - (T_1 k_1 - T_3 k_3)(\psi_1 - \psi_2)], \quad (23)$$

$$\frac{R f_3}{\lambda_3} = T_1 k_1 - \varphi_1 \frac{P f_1}{\lambda_1} - \psi_1 \frac{Q f_2}{\lambda_2}. \quad (24)$$

У формулах (22)–(24) коефіцієнти $k_i = \beta_i h_i / a_i$ визначаються за відомими значеннями силової β_i і геометричної a_i подібності, напруження T_i у моделях знаходяться експериментально методом динамічної фотопружності, а функції комплексних параметрів φ_i , ψ_i – за відомими значеннями пружних констант для моделей. Точний вираз функцій φ_i , ψ_i для даного класу за-

дач або конкретної задачі невідомий. Тому вигляд цих функцій будемо задавати наближено. Аналіз відомих теоретичних розв'язків деяких задач [9] показує, що у виразах для напружень входять комбінації комплексних параметрів $(\mu_1 + \mu_2)$, $\mu_1 \mu_2$, $\mu_1^2 + \mu_2^2$, їх добутки, а також коефіцієнти Пуассона.

Тоді подамо функції $\varphi_i(\mu)$, $\psi_i(\mu)$ у вигляді

$$\varphi_i(\mu) = 1 + i(\mu_1 + \mu_2) + i^2(\mu_1^2 + \mu_2^2) + \\ + i^2 \mu_1 \mu_2 + \nu_2 i^2 \mu_1 \mu_2 (1 - i\mu_1 - i\mu_2), \quad (25)$$

$$\psi_i(\mu) = 1 + \frac{1}{i(\mu_1 + \mu_2)} + \frac{1}{i^2(\mu_1^2 + \mu_2^2)} + \\ + \frac{1}{i^2 \mu_1 \mu_2} + \frac{\nu_2 i^2 \mu_1 \mu_2}{\nu_1}.$$

Слід зауважити, що вирази (23), (24), (25) для функцій φ_i і ψ_i не є єдині. Можна побудувати інші вирази, наприклад так, як це зроблено в [10].

Проведемо перерахунок динамічних напружень з моделей на натурне тіло в задачі, що має теоретичний розв'язок для випадку статичного навантаження. Пластина з центральним коловим отвором навантажена з двох країв імпульсом розтягу. Для перерахунку напружень на натурне тіло досліджувалися три моделі, виготовлені з оптично-чутливих анізотропних матеріалів з різними механічними та оптичними властивостями.

Модель 1. Механічні параметри: $E_1 = 4,30 \times 10^3$ МПа; $E_2 = 6,08 \cdot 10^3$ МПа; $\nu_{12} = 0,33$; $\nu_{21} = 0,47$; $G = 1,79 \cdot 10^3$ МПа. Оптичні сталі: $\sigma_{a1} = 25 \times 10^{-1}$ МПа·см/смуга; $\sigma_{a2} = 41 \cdot 10^{-1}$ МПа·см/смуга; $\varepsilon_d = 4,95 \cdot 10^{-4}$ см/смуга; $\mu_1 = 1,91$; $\mu_2 = 0,67$.

Модель 2. Механічні параметри: $E_1 = 6,70 \times 10^3$ МПа; $E_2 = 8,43 \cdot 10^3$ МПа; $\nu_{12} = 0,31$; $\nu_{21} = 0,39$; $G = 1,56 \cdot 10^3$ МПа. Оптичні сталі: $\sigma_{a1} = 17 \times 10^{-1}$ МПа·см/смуга; $\sigma_{a2} = 32 \cdot 10^{-1}$ МПа·см/смуга; $\varepsilon_d = 3,98 \cdot 10^{-4}$ см/смуга; $\mu_1 = 2,08$; $\mu_2 = 0,54$.

Модель 3. Механічні параметри: $E_1 = 4,38 \times 10^3$ МПа; $E_2 = 6,40 \cdot 10^3$ МПа; $\nu_{12} = 0,26$; $\nu_{21} = 0,37$; $G = 1,4 \cdot 10^3$ МПа. Оптичні сталі: $\sigma_{a1} = 12 \times 10^{-1}$ МПа·см/смуга; $\sigma_{a2} = 21 \cdot 10^{-1}$ МПа·см/смуга; $\varepsilon_d = 4,55 \cdot 10^{-4}$ см/смуга; $\mu_1 = 2,21$; $\mu_2 = 0,57$.

Натурна пластина виготовлена з ортотропно-го матеріалу, який має механічні характеристики: $E_1 = 14 \cdot 10^3$ МПа; $E_2 = 14 \cdot 10^3$ МПа; $\nu_{12} = 0,47$; $\nu_{21} = 0,47$; $G = 1,4 \cdot 10^3$ МПа; $\mu_1 = 3,1$; $\mu_2 = 1,1$.

Підставимо у формулу (25) значення комплексних параметрів і визначимо φ_i і ψ_i для кож-

ної моделі, а також для натурального тіла. Припустимо, що натурне тіло й моделі мають однакові геометричні розміри, а імпульсне навантаження, прикладене до натурної пластинки, вдвічі більше, ніж у кожній з моделей, тобто $k = 2$.

Напруження для деяких точок на контурі отвору, визначені в трьох моделях за формулами (9) і (10), наведені в таблиці. Тут же дано результати перерахунку з моделі на натурне тіло з використанням формул (19) і (22)–(24), а також значення напружень у натурній пластині, визначені за формулою С.Г. Лехницького (11) для статичного розтягу.

Висновки

Експериментальні дані свідчать, що запропонований спосіб перерахунку з моделі на натурне тіло надає можливість із достатньою для інженерних розрахунків точністю визначати динамічні напруження в натурних деталях з ортотропних матеріалів. Для цього необхідно тільки знати напруження в трьох геометрично подібних моделях, а також потрібно, щоб динамічне навантаження моделей було подібним. Щодо останньої умови, існують певні складності у відтворенні подібності імпульсного навантаження, якщо використовувати для цього вибухові засоби. Найбільше ця умова задовольняється при використанні магнітноіндуктивного пристрою [11].

Таблиця. Значення напружень для деяких точок на контурі отвору, визначені в трьох моделях

θ , град	$\sigma_{\theta}/\sigma_{сеп} = T$				
	T_1	T_2	T_3	T_n	
				За формулами (19) і (22)–(24)	Статичні значення [5]
0	-0,92	-0,88	-0,82	-0,35	-0,29
15	-0,65	-0,58	-0,59	-0,21	-0,20
30	0,05	0,04	-0,02	-0,15	-0,15
45	0,57	0,73	0,72	0,16	0,15
60	1,61	1,61	1,69	0,79	0,92
75	3,05	2,82	2,85	2,94	2,99
90	3,75	3,62	3,50	5,20	5,20

М.П. Малезик

ЧИСЛЕННЫЙ ПЕРЕСЧЕТ ДИНАМИЧЕСКИХ НАПРЯЖЕНИЙ С ФОТОУПРУГИХ ОРТОТРОПНЫХ МОДЕЛЕЙ НА НАТУРНОЕ ТЕЛО

Предлагается способ пересчета динамических напряжений с фотоупругой модели на натурное тело в плоских задачах механики ортотропных тел. Для оценки способа проводится пересчет напряжений с модели на натурное тело в задаче, имеющей теоретическое решение.

M.P. Malezhyk

THE NUMERICAL RECALCULATION OF DYNAMIC STRESS WITH PHOTOELASTIC ORTOTROPIC MODELS ON A NATURAL BODY

This paper proposes a method of recalculation of dynamic pressure from a photoelastic model on a natural body in the flat tasks of mechanics of orthotropic bodies. To estimate the proposed method, the pressure recalculation from the model on the natural body in the task with the theoretical decision was conducted.

1. *Малежик М.П.* Визначення динамічних напружень в конструктивно-анізотропних тілах поляризаційно-оптичним методом // Доп. НАН України. – 2002. – № 10. – С. 44–48.
2. *Зирка А.И., Малежик М.П., Чернышенко И.С.* О концентрации напряжений в ортотропной пластине с круговым отверстием при динамическом нагружении // Прикл. механика. – 2004. – **40**, № 2. – С. 128–133.
3. *Зирка А.И., Малежик М.П., Чернышенко И.С., Шеремет Г.П.* Волновое поле напряжений возле свободной и связанной границы в анизотропных пластинах при импульсном нагружении // Там же. – № 7. – С. 123–128.
4. *Малежик М.П.* Моделювання напружено-деформованого стану поблизу тріщин в анізотропних лінійно-в'язкопружних пластинах // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2003. – № 2. – С. 93–95.
5. *Малежик М.П.* Динамічна фотопружність анізотропних тіл. – К.: Ін-т геофізики ім. С.І. Субботіна НАН України, 2001. – 200 с.
6. *Седов Л.И.* Методы подобия размерности в механике. – М.: Наука, 1967. – 280 с.
7. *Вардьян Г.С.* Основы теории подобия и анализа размерности. – М.: Изд-во МИСИ, 1977. – 122 с.
8. *Журба В.Г., Мишин В.В.* Определение оптических постоянных по деформациям-напряжениям при динамическом нагружении // Изв. Днепропетр. горного ин-та. – 1967. – № 48. – С. 147–151.
9. *Лехницкий Г.С.* Анизотропные пластинки. – Л.: Гостехиздат, 1957. – 300 с.
10. *Нетребко В.П., Васильченко И.П.* Поляризационные методы механики композиционных материалов. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1990. – 160 с.
11. *Малежик М.П., Зубов В.І., Шеремет Г.П., Губар І.М.* Динамічне навантаження моделей імпульсами зі змінними амплітудно-часовими параметрами // Наукові вісті НТУУ “КПІ”. – 2003. – № 6. – С. 80–85.

Рекомендована Радою Механіко-машинобудівного інституту НТУУ “КПІ”

Надійшла до редакції
2 жовтня 2007 року

УДК 66.02.011

О.С. Сахаров, В.І. Сівецький,
О.Л. Сокольський

ДИСКРЕТНІ МАТЕМАТИЧНІ МОДЕЛІ ДЛЯ РОЗРАХУНКУ ПРУЖНОВ'ЯЗКОПЛАСТИЧНИХ СЕРЕДОВИЩ ІЗ ЗМІННОЮ СТИСЛИВІСТЮ ПРИ ТЕРМОСИЛОВИХ НАВАНТАЖЕННЯХ

Вступ

Сучасні технології хімічних виробництв супроводжуються використанням високих тисків та температур, які суттєво впливають і на матеріали, що переробляються, і на обладнання [1, 2]. У багатьох випадках врахування взаємодії матеріалів із силовими елементами машин та апаратів є необхідною умовою при розробці технологічних процесів і проектуванні обладнання хімічних виробництв. Відповідні задачі належать до зв'язаних нелінійних задач механіки, які потребують одночасного розрахунку твердих тіл, рідин та газів, що взаємодіють між собою та термосиловими полями з врахуванням реальних змін властивостей матеріалів у досліджуваних процесах.

Для адекватного описання взаємодії тіл різної природи використовуються загальні співвідношення нелінійної механіки суцільних середовищ (МСС), які базуються на фундаментальних законах збереження імпульсу та балансу механічної енергії, збереження енергії та маси [3]. Це вимагає розробки універсальних нелінійних моделей та методів їх дослідження, які можуть бути побудовані тільки на базі методів чисельного аналізу, орієнтованих на потужну обчислювальну техніку. До найбільш ефективних чисельних методів розв'язання складних реологічних і динамічних задач механіки суцільних середовищ належить метод скінченних елементів (МСЕ), який дає можливість на базі комп'ютерної техніки моделювати і досліджувати технологічні процеси разом із визначенням напружено-деформованого стану і міцності обладнання хімічних виробництв.

Можливості МСЕ з точки зору описання реальних термомеханічних процесів визначаються переважно властивостями скінченних елементів (СЕ), відображених матрицями жорсткості, в'язкості, теплопровідності та ін.

Постановка задачі

Метою даної статті є побудова на базі моментної схеми [4–6] універсальних співвідношень МСЕ, що дають можливість моделювати термонапружений стан і процеси переробки та формування таких нелінійних робочих середовищ, як розплави полімерів, сипучі та пластичні маси у виробі із врахуванням процесів тверднення і впливу залишкових напружень на властивості кінцевих виробів.

Вихідні рівняння математичної моделі

Наведемо основні співвідношення МСС у вигляді системи диференціальних рівнянь в ейлерових координатах для стаціонарних процесів:

рівняння руху

$$\nabla \cdot \hat{\sigma} + \mathbf{f} = \rho \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v}; \quad (1)$$

рівняння збереження енергії

$$c_T \mathbf{v} \cdot \nabla T = \nabla \cdot (\lambda_T \nabla T) + \hat{\sigma} : \hat{\zeta} + Q_{(V)}, \quad (2)$$

де для внутрішньої енергії враховано співвідношення

$$\frac{d}{dt} \rho E = c_T \frac{dT}{dt} = c_T \left(\frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla T \right); \quad (3)$$

рівняння збереження маси

$$\nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0, \quad (4)$$

де ρ – маса одиниці об'єму (густина) матеріалу; \mathbf{v} – вектор швидкості точки тіла; \mathbf{f} – вектор зовнішньої сили, що діє на одиницю об'єму тіла; $\hat{\sigma}$ – тензор напружень; $\nabla \mathbf{v}$ – градієнт вектора швидкості; $Q_{(V)}$ – віднесена до одиниці маси швидкість зовнішнього об'ємного притоку тепла разом з іншою немеханічною енергією; E – питома внутрішня енергія (внутрішня енергія одиниці маси тіла).

До системи рівнянь (1)–(4) необхідно також додати геометричні рівняння Коші

$$\hat{\varepsilon} = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T), \quad \hat{\zeta} = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{v} + (\nabla \mathbf{v})^T), \quad (5)$$

які зв'язують тензор деформацій $\hat{\varepsilon}$ з вектором переміщень \mathbf{u} та тензор швидкостей деформацій $\hat{\zeta}$ з вектором швидкостей \mathbf{v} . Для замикання системи рівнянь (1)–(5) до неї треба додати рівняння стану

$$\hat{\phi}(\hat{\sigma}, \hat{\varepsilon}, \hat{\zeta}, T) = 0, \quad (6)$$

які дають змогу описати основні властивості матеріалів реальних тіл.

При формулюванні рівнянь стану (6) середовища приймаються такі загальні допущення:

- режим руху середовища – стаціонарний, достатньо повільний, щоб силами інерції можна було б знехтувати;

- матеріали мають нелінійні в'язкопружно-пластичні властивості, що залежать від напружено-деформованого стану і температури;

- між твердими тілами і рідинами (газами) виконуються умови прилипання – швидкості на стінках дорівнюють швидкостям стінок (положення поверхонь контакту визначається з врахуванням переміщень твердих тіл);

- у процесі переробки і деформування матеріали можуть змінювати властивості стисливості – від стисливих до нестисливих і навпаки.

Будемо вважати, що повні деформації $\hat{\varepsilon}$ та їх швидкості $\hat{\zeta}$ можна подати у вигляді сум:

$$\hat{\varepsilon} = \hat{\varepsilon}^e + \hat{\varepsilon}^p + \hat{\varepsilon}^T, \quad \hat{\zeta} = \hat{\zeta}^e + \hat{\zeta}^p + \hat{\zeta}^T,$$

де $\hat{\varepsilon}^e, \hat{\zeta}^e$ – пружні деформації та їх швидкості, для яких має місце узагальнений закон Гука

$$\hat{\sigma} = \hat{E} \cdot \hat{\varepsilon}^e, \quad \hat{\varepsilon}^e = \hat{\Lambda} \cdot \hat{\sigma}, \quad \hat{\zeta}^e = \hat{\Lambda} \cdot \frac{d\hat{\sigma}}{dt},$$

$\hat{E}, \hat{\Lambda}$ – тензори пружності 4-го рангу, які в загальному випадку можуть залежати від температури; $\hat{\varepsilon}^p, \hat{\zeta}^p$ – пластичні деформації та їх швидкості, зумовлені в'язкопластичністю матеріалів:

$$\hat{\sigma} = \hat{M} \cdot \hat{\zeta}^p - p\hat{g}, \quad \hat{\zeta}^p = \hat{B} \cdot \hat{\sigma},$$

$\hat{M}, \hat{B}, p, \hat{g}$ – тензори в'язкопластичності 4-го рангу, які залежать від температури і $\hat{\varepsilon}^p, \hat{\zeta}^p$, гідростатичний тиск та метричний тензор; $\hat{\varepsilon}^T, \hat{\zeta}^T$ – теплові деформації і їх швидкості:

$$\hat{\varepsilon}^T = \beta^T \hat{g}(T - T_0), \quad \hat{\zeta}^T = \beta^T \hat{g} \frac{dT}{dt},$$

β^T, T_0, T – коефіцієнт лінійного теплового розширення, початкова і кінцева температури.

Із врахуванням прийнятих допущень рівняння стану можна записати через повні деформації або їх швидкості:

$$\hat{\sigma} = \hat{E} \cdot (\hat{\varepsilon} - \hat{\varepsilon}^p) - \hat{\sigma}^T,$$

$$\hat{\sigma} + \hat{\Gamma} \cdot \frac{d\hat{\sigma}}{dt} = \hat{B} \cdot \hat{\zeta} - p\hat{g} - \hat{\sigma}_V^T,$$

$$\hat{\sigma}^T = \hat{A}(T - T_0), \quad \hat{\sigma}_V^T = \hat{h}^T \frac{dT}{dt},$$

де $\hat{\Gamma} = \hat{B} \cdot \hat{\Lambda}$ – тензор в'язкопружності; $\hat{h}^T = \beta^T \hat{B} \cdot \hat{g}$ – тензор об'ємної термов'язкості; $\hat{A} = \beta^T \hat{E} \cdot \hat{g}$ – тензор термопружності; $\hat{\sigma}^T, \hat{\sigma}_V^T$ – тензори теплових напружень. Із врахуванням стаціонарності процесів маємо

$$\hat{\sigma} + \hat{\Gamma} \cdot (\mathbf{v} \cdot \nabla \hat{\sigma}) = \hat{B} \cdot \hat{\zeta} - p\hat{g} - \hat{\sigma}^T,$$

$$\hat{\sigma}_V^T = \hat{h}^T (\mathbf{v} \cdot \nabla T).$$

В іншому варіанті при високому рівні в'язкості, коли стан середовища наближається до твердого, фізичні рівняння доцільно подати через деформації у вигляді

$$\hat{\sigma} = \hat{E} \cdot (\hat{\varepsilon} - \hat{\varepsilon}^p) - \hat{\sigma}^T,$$

$$\hat{\varepsilon}^p = \int_t^p \hat{\zeta}^p dt = \int_t^H \hat{H} \cdot \hat{\sigma} dt.$$

Особливості чисельного моделювання пружнов'язкопластичних середовищ із врахуванням стисливості і термосилових навантажень

Попередні дослідження [4, 6] показали, що при комп'ютерному моделюванні напружено-деформованого стану тонкостінних тіл або слабостисливих середовищ традиційні варіанти МСЕ призводять до значних похибок, які виникають через некоректну апроксимацію об'ємних деформацій і деформацій зсуву. Це явище спостерігається, наприклад, при розрахунках плоскощільних головок, де діють високі перепади тиску і прогнозується неадекватне стиснення розплаву, або при розрахунках згину тонкостінних виробів під дією термосилових навантажень. Тому для дискретизації наведених вище рівнянь використана моментна схема МСЕ, яка дає змогу звільнитись від негативних властивостей традиційних елементів поєднанням варіаційного методу з методом моментів [5]. У статті [7] це виконано для в'язкої ньютонівської рідини, де отримані співвідношення для матриць в'язкості

методом переміщень із врахуванням стисливості, а також співвідношення МСЕ змішаним методом для нестисливої рідини. На численних прикладах встановлено, що при послідовному зменшенні стисливості результати розрахунків наближаються до розв'язків, які відповідають нестисливим матеріалам. Методика виправдала себе при незмінних властивостях об'ємного деформування тіл. Але у випадках, коли характеристики стисливості матеріалу є змінними величинами і наближені до умов нестисливості, то виникає нестабільність обчислень ($\mu/\lambda < 10^{-6}$), яка може викривити результати і вимагає контролю за процесами розв'язання систем рівнянь, що суттєво ускладнює автоматизацію розрахунків.

У даній статті пропонується узагальнення підходу [7] для побудови єдиних співвідношень МСЕ в змішаному варіанті незалежно від стисливості матеріалів при збереженні переваг моментної схеми МСЕ.

При чисельному моделюванні задач механіки суцільних середовищ необхідно розв'язувати системи нелінійних рівнянь високого порядку, для яких не існує прямих методів. Тому використовуються ітераційні методи на базі лінеаризованих рівнянь. Для процесів, що нами розглядаються, лінеаризація повинна виконуватись для фізичних рівнянь (рівнянь стану). Як показали чисельні дослідження МСЕ, це можна зробити на рівні визначення дискретних співвідношень для скінченних елементів, якщо за основу взяти матриці жорсткості та в'язкості, які в комбінації дадуть змогу моделювати властивості широкого класу матеріалів.

Для побудови лінеаризованих рівнянь МСЕ в переміщеннях або швидкостях переміщень звичайно застосовується метод Рітца, який забезпечує симетрію матриць (якщо це можливо) системи рівнянь завдяки застосуванню варіаційних принципів. Так, при отриманні матриці жорсткості для пружного тіла можна використати вираз для роботи внутрішніх сил скінченних елементів на можливих переміщеннях:

$$\delta W_{CE} = \frac{1}{2} \delta \int_{V_{CE}} \{\epsilon\}^T \{\sigma\} dV = \int_{V_{CE}} \delta \{\epsilon\}^T \{\sigma\} dV, \quad (7)$$

де V_{CE} – область навколо початку координат; $\{\sigma\} = [\sigma^{11} \sigma^{22} \sigma^{33} \sigma^{12} \sigma^{13} \sigma^{23}]^T$ – вектор напружень, який визначається через вектор деформацій $\{\epsilon\} = [\epsilon^{11} \epsilon^{22} \epsilon^{33} 2\epsilon^{12} 2\epsilon^{13} 2\epsilon^{23}]^T$ і матрицю $[E]$ параметрів пружності матеріалів:

$$\{\sigma\} = [E]\{\epsilon\}, \quad (8)$$

$$[E] = \begin{bmatrix} C^{1111} & C^{1122} & C^{1133} & C^{1112} & C^{1113} & C^{1123} \\ & C^{2222} & C^{2233} & C^{2212} & C^{2213} & C^{2223} \\ & & C^{3333} & C^{3312} & C^{3313} & C^{3323} \\ & & & C^{1212} & C^{1213} & C^{1223} \\ & & & & C^{1313} & C^{1323} \\ & & & & & C^{2323} \end{bmatrix},$$

симетрично

$$\mu^e = \frac{0,5E}{1+\nu}, \quad \lambda^e = \frac{Ev}{(1+\nu)(1-2\nu)} - \text{коефіцієнти пружності, що залежать від температури і деформацій;}$$

$C_V^{ijkl} = \mu^e (g^{ik} g^{jl} + g^{il} g^{jk}) + \lambda^e g^{ij} g^{kl}$ – компоненти тензора пружності ізотропних пружних матеріалів; g^{ij} – компоненти метричного тензора координатної системи. Беручи до уваги співвідношення з [7, с. 59], що дають змогу записати залежність деформацій від вузлових переміщень у вигляді

$$\{\epsilon\} = [B]\{U\}, \quad (9)$$

можна привести (7) до остаточного варіанта:

$$\begin{aligned} \delta W_{CE} &= \int_{V_{CE}} \delta \{\epsilon\}^T [E] \{\epsilon\} dV = \\ &= \delta \{U\}^T [B]^T [E] [B] \{U\} = \delta \{U\}^T [K^e] \{U\}, \end{aligned}$$

де $[K^e] = [B]^T [E] [B]$ – матриця жорсткості CE; $\delta \{U\}$ – вектор можливих вузлових переміщень.

При розгляді в'язкотекучих матеріалів визначається матриця в'язкості CE. Для цього використовується потужність роботи внутрішніх сил:

$$\delta \dot{W}_{CE} = \frac{1}{2} \delta \int_{V_{CE}} \{\zeta\}^T \{\sigma\} dV = \int_{V_{CE}} \delta \{\zeta\}^T \{\sigma\} dV, \quad (10)$$

де $\{\sigma\}$ – вектор напружень, зв'язаний з вектором швидкостей деформацій $\{\zeta\} = [\zeta^{11} \zeta^{22} \zeta^{33} 2\zeta^{12} 2\zeta^{13} 2\zeta^{23}]^T$ матричним співвідношенням $\{\sigma\} = [M]\{\zeta\}$; $[M]$ – матриця в'язкості, яка формується з компонент тензора в'язкості C_V^{ijkl} аналогічно (8); $C_V^{ijkl} = \mu^V (g^{ik} g^{jl} + g^{il} g^{jk}) + \lambda^V g^{ij} g^{kl}$; μ^V , λ^V – коефіцієнти в'язкості першого та другого роду, що є функціями температури та швидкостей деформацій. Із врахуванням залежності між векторами швидкостей переміщень $\{V\}$ і деформацій $\{\zeta\} = [B]\{V\}$ потужність роботи (9) можна записати у вигляді

$$\delta \dot{W}_{CE} = \int_{V_{CE}} \delta \{\zeta\}^T [M] \{\zeta\} dV =$$

$$\begin{aligned}
&= \delta\{V\}^T [B]^T [M] [B] \{V\} = \\
&= \delta\{V\}^T [K^V] \{V\}, \quad (11)
\end{aligned}$$

де $[K^V] = [B]^T [M] [B]$ – матриця в'язкості СЕ.

У випадку формування системи рівнянь МСЕ змішаного типу, коли невідомими, крім переміщень, є напруження, використовуються узагальнені варіаційні принципи, які можна сформулювати з допомогою множників Лагранжа. Так, при розгляді слабостисливих ізотропних тіл до складу невідомих доцільно приєднати середнє напруження σ_s . Для цього рівняння стану для пружного тіла необхідно записати у вигляді

$$\{\sigma\} = \{s\} + \sigma_s \{g\} = [\tilde{E}]\{\varepsilon\} + \sigma_s \{g\}, \quad (12)$$

де $\{s\}$ – вектор девіатора напружень; $\{g\} = [g^{11} g^{22} g^{33} g^{12} g^{13} g^{23}]^T$ – вектор, елементами якого є контраваріантні компоненти метричного тензора, а матриця пружності $[\tilde{E}]$ відрізняється від $[E]$ тим, що при обчисленні C^{ijkl} замість λ^e підставляється коефіцієнт $\tilde{\lambda}^e$ ($\tilde{\lambda}^e = -2\mu^e/3$) для виділення девіатора напружень. Об'ємна деформація ізотропного матеріалу залежить тільки від середнього напруження:

$$\theta - \frac{\sigma_s}{k^e} = \theta - \eta^e \sigma_s = 0,$$

де $\eta^e = \frac{1}{k^e} = \frac{3(1-2\nu^e)}{E^e}$ – коефіцієнт об'ємної стисливості, який прямує до нуля ($\nu^e \rightarrow 0,5$; $\eta^e \rightarrow 0$; $k^e \rightarrow \infty$), коли матеріал стає нестисливим; E^e – модуль Юнга; ν^e – коефіцієнт Пуассона. Помноживши ліву частину (12) на варіацію середнього напруження $\delta\sigma_s$ як множник Лагранжа, додамо цей добуток до підінтегрального виразу (7) і з врахуванням (11) отримаємо варіант відображення варіації δW_{CE} скінченного елемента змішаного типу:

$$\begin{aligned}
&\delta \dot{W}_{CE} = \\
&= \int_{V_{CE}} (\delta\{\varepsilon\}^T [\tilde{E}]\{\varepsilon\} + \sigma_s \delta\theta + (\theta - \eta^e \sigma_s) \delta\sigma_s) dV. \quad (13)
\end{aligned}$$

Як показали чисельні експерименти, для обчислення зміни об'єму СЕ в цілому Θ_{CE} достатньо обмежитись однією точкою інтегрування в центрах граней. При розгляді полілінійного СЕ з позицій моментної схеми МСЕ об'ємна деформація θ та середні напруження σ_s в межах СЕ вважаються сталою величиною, що дає можли-

вість обчислити другий і третій члени інтеграла (13):

$$\begin{aligned}
&\int_{V_{CE}} (\sigma_s \delta\theta + (\theta - \eta^e \sigma_s) \delta\sigma_s) dV = \\
&= (\sigma_s \delta\theta + (\theta - \eta^e \sigma_s) \delta\sigma_s) V_{CE} = \\
&= \sigma_s \delta\Theta_{CE} + (\Theta_{CE} - \eta^e \sigma_s V_{CE}) \delta\sigma_s. \quad (14)
\end{aligned}$$

Беручи до уваги (10), (12) і (14), запишемо (13) у вигляді

$$\begin{aligned}
\delta \tilde{W}_{CE} &= \int_{V_{CE}} \delta\{\varepsilon\}^T [\tilde{E}]\{\varepsilon\} dV + \\
&+ \sigma_s \delta\Theta_{CE} + (\Theta_{CE} - \eta^e \sigma_s V_{CE}) \delta\sigma_s = \\
&= \delta\{U\}^T [\tilde{K}^e]\{U\} + \delta\{U\}^T \{N\} \sigma_s + \\
&+ \delta\sigma_s \{N\}^T \{U\} - \delta\sigma_s \eta^e \sigma_s V_{CE} = \delta\{\Phi\}^T [\tilde{H}^e]\{\Phi\},
\end{aligned}$$

де $[\tilde{H}^e]$ – змішана матриця для пружного СЕ:

$$[\tilde{H}^e] = \begin{bmatrix} [\tilde{K}^e] & \{N\} \\ \{N\}^T & -(\eta^e V_{CE}) \end{bmatrix}.$$

Тут $[\tilde{K}^e]$ – матриця жорсткості СЕ відносно зміни його форми; $\{N\}$ – вектор впливу вузлових переміщень на об'ємну деформацію СЕ; $\{\Phi\} = \begin{Bmatrix} \{U\} \\ \sigma_s \end{Bmatrix}$ – змішаний вектор невідомих СЕ, який складається з вектора вузлових переміщень та середнього напруження, яке вважається віднесеним до центра СЕ.

Аналогічно знаходиться матриця змішаного типу для в'язкого стисливого СЕ, коли за невідомі величини береться вектор вузлових швидкостей $\{v\}$ разом із середнім напруженням σ_s . Для врахування стисливості скористаємось рівнянням збереження маси (4) у вигляді

$$\begin{aligned}
\nabla \cdot (\rho v) \frac{1}{\rho} &= \nabla \cdot v + \frac{1}{\rho} v \cdot \nabla \rho = \\
&= \nabla \cdot v - \eta^e v \cdot \nabla \sigma_s = 0, \quad (15)
\end{aligned}$$

де вважається, що зміна початкової густини ρ_0 матеріалу залежить від напруження σ_s ; $\rho = \rho_0 \times (1 - \eta^e \sigma_s)$. За допомогою множника Лагранжа $\delta\sigma$ та рівняння (15) враховується стисливість для в'язкого середовища в змішаній матриці $[\tilde{H}^V]$ для в'язкого СЕ:

$$[\tilde{H}^V] = \begin{bmatrix} [\tilde{K}^V] & \{N\} \\ \{N\}^T & -(\eta^V V_{CE}) \end{bmatrix}, \quad (16)$$

де $[\tilde{K}^V]$ – матриця в'язкості СЕ; $\{N\}$ – вектор впливу вузлових швидкостей на швидкість об'ємної деформації СЕ; $\{\Psi\} = \begin{Bmatrix} \{V\} \\ \sigma_s \end{Bmatrix}$ – змішаний вектор невідомих для в'язкого стисливого СЕ, який складається з вектора вузлових швидкостей і середнього напруження. Коефіцієнт стисливості η^V в (16) є змінною величиною $\eta^V = \frac{\mathbf{v} \cdot \nabla \sigma_s}{\sigma_s}$, яка на початку при $\sigma_s = 0$ покладається рівною нулю ($\eta^V = 0$) – умова нестисливості. Градієнт $\nabla \sigma_s$ обчислюється через вузлові значення σ_s , які дорівнюють середньоарифметичним значенням тих напружень СЕ, що входять у “зірку” скінчених елементів відповідного вузла.

Важливим застосуванням матриць СЕ змішаного методу є дослідження слабостисливих та нестисливих середовищ незалежно від їх стану і особливо тоді, коли в процесі переробки матеріалів або будь-якої взаємодії тіл різної природи властивості їх змінюються в широкому діапазоні, куди включається, зокрема, і перехід від стисливого до повністю нестисливого стану, і навпаки. Це характерно для процесів екструзії та лиття полімерів, пресування пористих матеріалів тощо. Але слід зазначити, що дослідження тільки стисливих матеріалів на основі використання зазначених матриць і запропонованого змішаного підходу до розв'язання задач механіки не завжди є раціональним, оскільки результати, отримані змішаним методом, повністю збігаються з результатами прямого методу переміщень СЕ (на базі матриць жорсткості $[K^e]$ або в'язкості $[K^V]$).

Багато процесів хімічних виробництв є неізотермічними і супроводжуються явищами тепло- і масопереносу. Математичне моделювання їх здійснюється за допомогою спільного розв'язання рівнянь руху (1) та збереження енергії (2), яке з точки зору застосування МСЕ доцільно записати у вигляді варіаційного рівняння:

$$\int_V \lambda_T \nabla T \cdot \nabla (\delta T) dV + \int_V c_T \mathbf{v} \cdot \nabla T \delta T dV - \int_V D_T \delta T dV + \int_S \alpha_T (T - T_c) \delta T dV = 0, \quad (17)$$

де $D_T = \hat{\sigma} \cdot \hat{\zeta} + Q_{(v)}$ – швидкість надходження тепла до одиниці об'єму тіла за рахунок дисипації енергії руху та зовнішнього джерела тепла; α_T –

коефіцієнт тепловіддачі (може залежати від температури) на зовнішній поверхні тіла S ; T_c – температура зовнішнього середовища.

Рівняння МСЕ для теплопередачі будуються на основі матриць СЕ, що характеризують перенесення тепла за рахунок температурної дифузії і руху середовища. Як і при розгляді рівнянь руху, зупинимось на виводі матриці теплопередачі для шестигранного криволінійного елемента. Розподіл температури T в межах СЕ подаємо аналогічно компонентам швидкостей на базі полілінійних функцій форми $N_{(i)}$:

$$T = T^{(1)} N_{(1)} + T^{(2)} N_{(2)} + T^{(3)} N_{(3)} + T^{(4)} N_{(4)} + T^{(5)} N_{(5)} + T^{(6)} N_{(6)} + T^{(7)} N_{(7)} + T^{(8)} N_{(8)}$$

або в матричному вигляді

$$\{T\} = [L]\{T^{(i)}\},$$

$$[L] = [N_{(1)} \ N_{(2)} \ N_{(3)} \ N_{(4)} \ N_{(5)} \ N_{(6)} \ N_{(7)} \ N_{(8)}].$$

Вектор-градієнт температури визначається формулами

$$\{\nabla T\} = [\nabla][L]\{T^{(i)}\} = [G]\{T^{(i)}\},$$

$$[\nabla] = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi^1} & \frac{\partial}{\partial \xi^2} & \frac{\partial}{\partial \xi^3} \end{bmatrix}^T,$$

$$[G] = [\nabla][L].$$

Матриця теплопередачі СЕ $[K_T]$ дорівнює сумі двох матриць: $[K_T] = [\Pi_T] + [\Xi_T]$ – матриці теплопровідності $[\Pi_T]$ та конвекції $[\Xi_T]$, які визначаються з першого та другого членів рівняння (17) і записуються у вигляді матриць:

$$\begin{aligned} [\Pi_T] &= \int_{V_{CE}} [G]^T [g^*] [G] \lambda_T dV = \\ &= \int_{-0,5}^{0,5} [G]^T [g^*] [G] \lambda_T \sqrt{g} d\xi^1 d\xi^2 d\xi^3, \end{aligned} \quad (18)$$

$$\begin{aligned} [\Xi_T] &= \int_{V_{CE}} [L]^T [J^*]^T \{v\} [G] c_T dV = \\ &= \int_{-0,5}^{0,5} [L]^T [J^*]^T \{V\} [N]^T [G] c_T \sqrt{g} d\xi^1 d\xi^2 d\xi^3, \end{aligned} \quad (19)$$

де $[g^*]$ – матриця контраваріантних компонент метричного тензора; $[J^*] = [J]^{-1}$ – обернена мат-

риця Якобі; $\{V\}$ – вектор вузлових швидкостей СЕ. На основі багатьох чисельних експериментів встановлено [3, 4], що завдяки малим розмірам СЕ теплотехнічні (λ_T, c_T) та геометричні параметри ($[J^*], [g^*], \sqrt{g}$) в об'ємі СЕ мало змінюються і можна їх вважати сталими величинами і обчислювати матриці теплопередачі в замкнутому вигляді. В результаті суттєво зменшується обсяг обчислювальної роботи і підвищуються ефективність та можливості процесів чисельного моделювання. Розроблені рівняння МСЕ введені в інтегровану систему VESNA [8] для моделювання технологічних процесів, пов'язаних із процесами тепломасопереносу. При цьому слід підкреслити, що з формул (18), (19) впливає симетрія матриці теплопровідності $[P_T]$ і несиметричність матриці конвекції $[\Xi_T]$. У системі VESNA це враховується шляхом реалізації методу Халецького для розв'язання систем алгебричних рівнянь із несиметричними матрицями.

Аналіз результатів чисельних досліджень

Дослідження взаємного впливу пружної деформації конструктивних елементів формуючого устаткування та параметрів течії полімерного матеріалу в його формуючих каналах проводилося на модельній конструкції плоскощільної головки.

Схему нанесення сіткової області на конструктивні елементи та формуючі канали головки, що моделюється, наведено на рис. 1.

Оскільки конструкція симетрична по двох осях, розрахунки проводилися по чверті формувальної порожнини та конструктивних елементів головки.

На рис. 2 показано відмінність між розподілами швидкостей руху поліетилену високої густини на виході з формуючої щілини плоскощільної головки без врахування і з врахуванням пружної деформації її корпусу.

З отриманих результатів чисельних досліджень (див. рис. 2) випливає, що за наявності пружної деформації конструктивних елементів корпусу картина течії розплаву у формуючих каналах якісно змінилася і різниця швидкостей у центральній зоні і на краях формуючої щілини навіть стала зворотною. Моделювання течії розплаву на виході з головки, в якій формуючі канали спрофільовані без врахування пружної деформації конструктивних елементів, показує майже рівномірний розподіл швидкостей по ширині з невеликим збільшенням по краях. В той

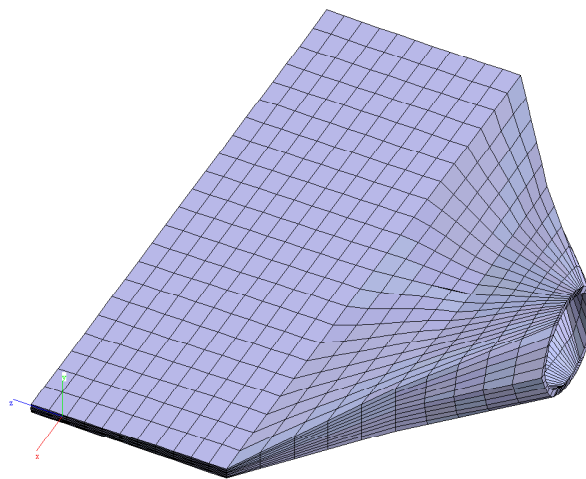


Рис. 1. Сіткова область модельної головки

же час, моделювання процесу формування із врахуванням деформації корпусу головки показує, що висота щілини в центральній зоні збільшується, а внаслідок цього витрата розплаву в цій зоні перевищує витрати по краях формуючої щілини.

Для дослідження впливу жорсткості конструктивних елементів корпусу головки проведено чисельне моделювання залежності розподілу швидкостей руху розплаву полімеру на виході з формувального каналу від циліндричної жорсткості головки, яку визначали за формулою

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)},$$

де E та ν – модуль пружності та коефіцієнт Пуассона матеріалу корпусу, відповідно; h – товщина стінки корпусу.

Графік співвідношення швидкостей розплаву по центру та на краях формуючої щілини головки залежно від величини циліндричної жорсткості стінки корпусу наведено на рис. 3.

Залежність величини найбільшого прогину стінки корпусу від її циліндричної жорсткості показано на рис. 4.

Залежності на рис. 3 і 4 мають нелінійний характер, оскільки із збільшенням деформації стінок корпусу головки відбуваються локальні зміни в'язкості, швидкості, тиску і т. д. Після досягнення значення жорсткості понад 6 Н·м прогин формуючих конструктивних елементів плоскощільної головки незначний і майже не впливає на розподіл швидкостей полімеру в каналах.

Як інший приклад взаємовпливу пружності конструктивних елементів формуючого устат-

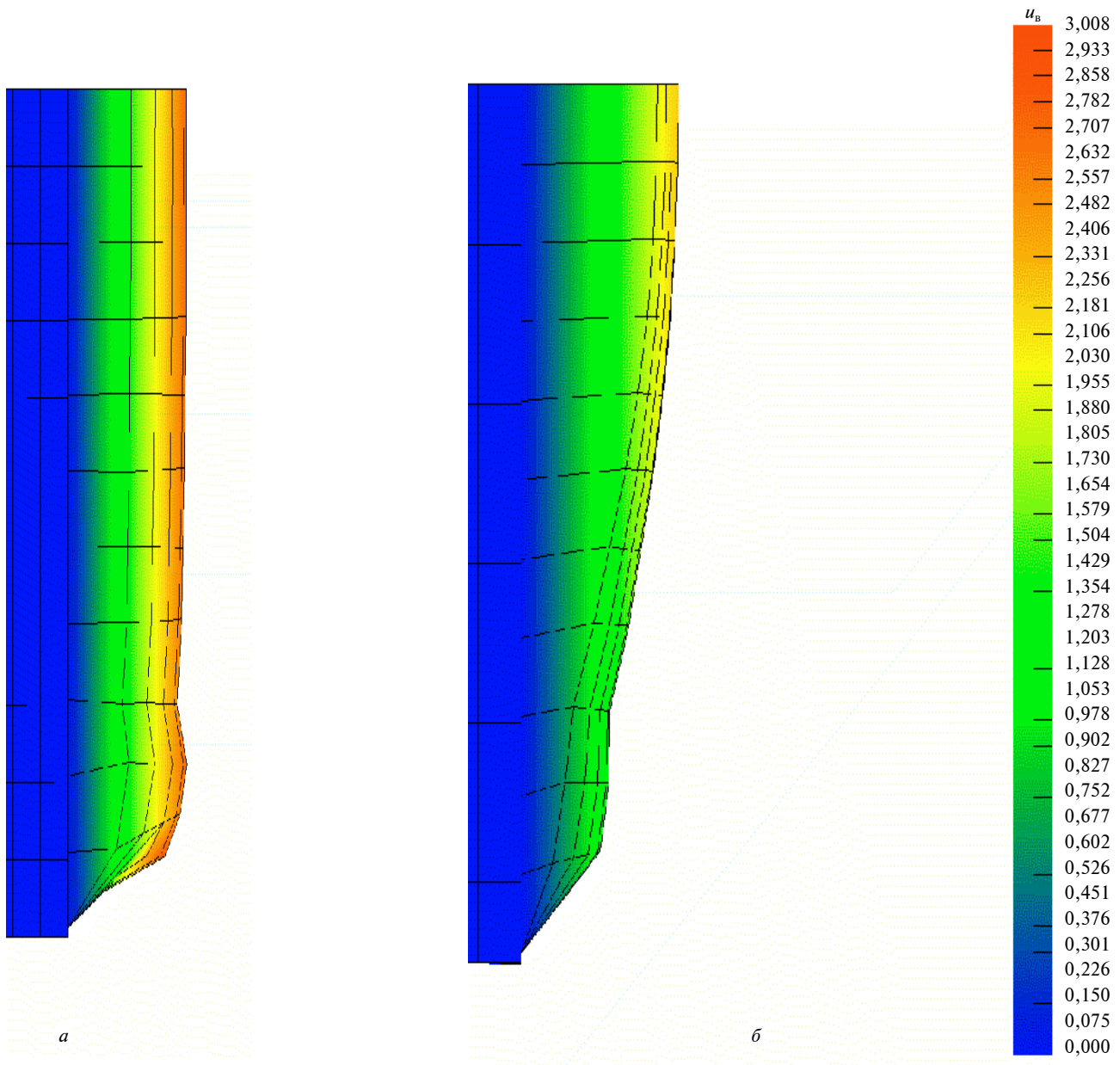


Рис. 2. Розподіл швидкостей розплаву на виході з головки: *a* – без врахування деформації корпусу; *б* – із врахуванням деформації корпусу

кування та параметрів течії перероблюваних матеріалів у його каналі розглядався процес формування листа з гумової суміші в черв'ячно-валковому агрегаті (ЧВА). Просторова модель течії гумової суміші 2Р-581 безпосередньо у формуючій зоні ЧВА являє собою геометрично складний перехід від циліндричного каналу черв'ячної машини до міжвалкового зазору формуючої головки з валками, що обертаються. На рис. 5 показано скінченноелементну розрахункову схему верхньої половини формуючої головки, симетричної відносно горизонтальної площини,

що проходить крізь середину міжвалкового зазору. Діаметр валків – 500 мм, ширина формуючої зони – 600 мм, швидкість обертання валків – 40 м/хв, зазор між валками – 4 мм.

В ході чисельного моделювання досліджувались просторові поля розподілу тиску у формуючій зоні, швидкостей течії перероблюваного матеріалу із врахуванням зміни його реологічних властивостей для різних технологічних режимів у взаємозалежності з прогином валків. Конфігурація перехідної формуючої зони ЧВА відрізняється від інших валкових машин, тому

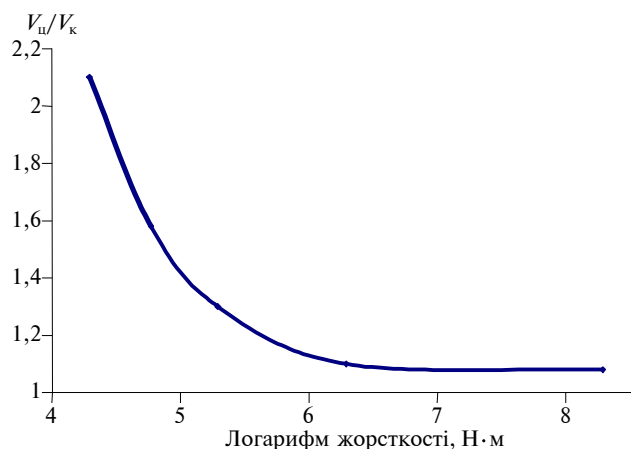


Рис. 3. Залежність співвідношення швидкостей розплаву на виході з головки від циліндричної жорсткості стінки корпусу

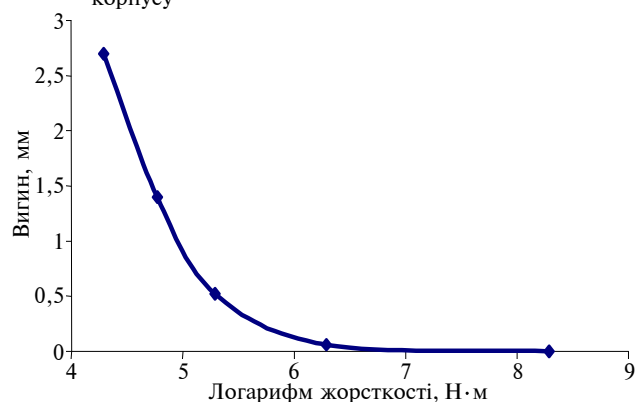


Рис. 4. Залежність найбільшого прогину стінки корпусу від її циліндричної жорсткості

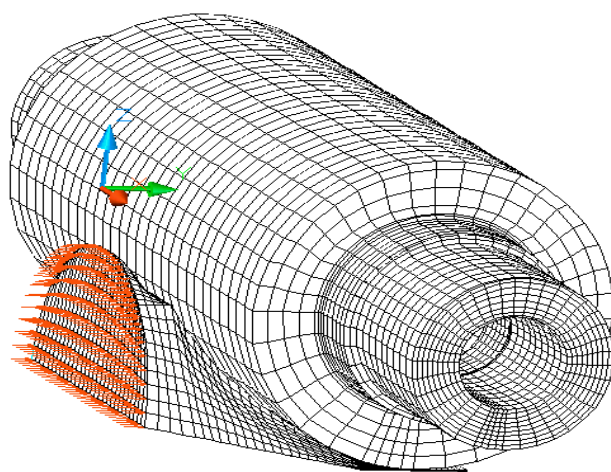


Рис. 5. Скінченноелементна розрахункова схема формуючої головки ЧВА

якісна картина процесу формування та прогину валків у ньому відрізняється від таких для каландрування й вальцювання, що свідчить про обґрунтованість застосування для подібних об'єк-

тів лише тривимірних моделей. Наведений приклад відображає можливість розробленої математичної моделі здійснення зв'язаного розв'язання пружної, теплової та нелінійно-в'язкої задач.

Як приклад, на рис. 6 наведено графіки прогину робочої частини валків для різних температурних режимів формування листових гумових виробів.

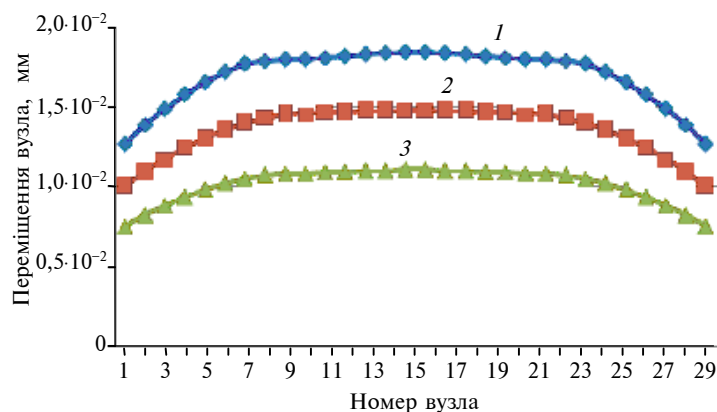


Рис. 6. Прогин робочої частини валка при температурах гумової суміші у формуючій зоні, °С: 1 – 40; 2 – 60; 3 – 80

Прогин валків зростає із зменшенням температури формування і для даних умов досягає 0,02 мм, що в свою чергу впливає на рівнотовщинність вихідного продукту. Для уточненого моделювання пружної деформації конструктивних елементів устаткування та процесу формування виробів необхідно враховувати їх взаємний вплив.

Висновки

Отримані на основі моментної схеми матриці скінченних елементів є універсальними для їх ефективного застосування для розв'язання задач термопружності і тепломасопереносу як твердих тіл, так і рідин та газів. Це дає можливість у рамках системи автоматизованого проектування машин та апаратів хімічних виробництв на сучасному рівні виконувати розрахунки міцності та витривалості конструкцій при термосилових навантаженнях, розробляти нові технологічні процеси переробки матеріалів із врахуванням їх реальних властивостей та особливостей взаємодії з елементами обладнання.

Запропоновані і опробовані алгоритми та методика чисельних розрахунків можуть бути рекомендовані для чисельного моделювання течії полімерних матеріалів із змінними властивостями у формуючих каналах устаткування з рухомими та нерухомими деформівними стінками

і нерівномірними температурними полями. Це дає змогу виключити або значно скоротити проведення коштовних і довготривалих натурних експериментів.

Розроблені математична модель та методика можуть застосовуватись для практичного використання в ході проектування технологічного устаткування і оптимізації його конструктивно-технологічних параметрів.

Напрямами подальших досліджень може бути чисельне моделювання таких процесів та обладнання переробки й формування полімерних матеріалів і виробів, як екструзійне формування погонажних виробів, лиття під тиском, вальцювання та каландрування із врахуванням фазових переходів, залишкових напружень і пружної деформації конструктивних елементів переробного обладнання.

А.С. Сахаров, В.И. Сивецкий, А.Л. Сокольский

ДИСКРЕТНЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ДЛЯ РАСЧЕТА УПРУГОВЯЗКОПЛАСТИЧЕСКИХ СРЕД С ПЕРЕМЕННОЙ СЖИМАЕМОСТЬЮ ПРИ ТЕРМОСИЛОВЫХ НАГРУЗКАХ

На базе моментной схемы конечных элементов построены универсальные соотношения механики сплошных сред, которые дают возможность моделировать термонапряженное состояние и процессы переработки и формирования таких нелинейных рабочих сред, как расплавы полимеров, сыпучие и пластичные массы в изделиях с учетом процессов твердения и влияния остаточных напряжений на свойства конечных изделий.

O.S. Saharov, V.I. Sivetskiy, O.L. Sokolskiy

THE DISCRETE MATHEMATICAL MODELS FOR CALCULATION OF ELASTIC-VISCID-PLASTIC ENVIRONMENTS WITH VARIABLE COMPRESSIBILITY AT THERMOPOWER LOADINGS

In this paper, we construct the universal correlations of mechanics of continuous environments on the base of moment chart of finite elements. They allow designing the thermostress state and the processes of processing and formation of such nonlinear working environments as polymers fusions, friable and plastic masses in the products, given that hardening and the influence of remaining tensions on the properties of the end products are considered.

1. *Сивецкий В.И., Сокольский О.Л., Сидоров Д.Е., Ткаченко С.М.* Моделирование параметров течения неньютоновских жидкостей в формующих каналах экструзийного оборудования // Матер. 23-й ежегодной междунар. конф. и выставки "Композиционные материалы в промышленности" (2–6 июня 2003 г.). – Ялта, 2003. – С. 99–101.
2. *Zhao J., Mascia L., Nassehi V.* Simulation of the rheological behavior of polymer blends by finite element analysis // Adv. Polym. Technol. – 1997. – 16, N 3. – P. 206–226.
3. *Седов Л.И.* Механика сплошной среды. Т. 1, 2. – М.: Наука, 1970. – Т. 1. – 492 с. Т. 2. – 568 с.
4. *Киричевский В.В., Сахаров А.С.* Нелинейные задачи термомеханики конструкций из слабосжимаемых эластомеров. – К.: Будівельник, 1992. – 216 с.
5. *Метод конечных элементов в механике твердых тел /* Под общ. ред. А.С. Сахарова и И. Альтенбаха. – К.: Вища шк., 1982. – 480 с.
6. *Сахаров А.С., Баженов В.А., Цыхановский В.К.* Моментная схема метода конечных элементов в задачах нелинейной механики сплошной среды // Прикл. механика. – 2002. – 38, № 6. – С. 24–63.
7. *Сахаров О.С., Сивецкий В.И., Сокольский О.Л., Щербина В.Ю.* Розробка скінченноелементної математичної моделі руху неньютоновських слабостисливих та нестисливих рідин // Наукові вісті НТУУ "КПІ". – 2004. – № 2. – С. 56–65.
8. *Щербина В.Ю., Гондляр О.В., Сивецкий В.И., Сахаров О.С.* САПР. Интегрирована система моделирования технологических процессов и расчета оборудования химической промышленности: Навч. посібник – К.: НТУУ "КПІ", 2006. – 156 с.

Рекомендована Радою інженерно-хімічного факультету НТУУ "КПІ"

Надійшла до редакції
23 липня 2008 року

УДК 621.785

В.Г. Хижняк, Н.А. Курило, І.В. Летвицька,
О.Т. Сердитов

АЗОТОТИТАНУВАННЯ СТАЛЕЙ І ТВЕРДИХ СПЛАВІВ

Вступ

Підвищення контактних навантажень, швидкостей роботи деталей машин та інструментів як актуальної задачі потребують збереження або навіть зростання терміну їх експлуатації. Руйнування поверхневих шарів виробів, яке відбувається через абразивне, окиснювально-дифузійне, ерозійне зношування, корозію тощо, значно знижується при нанесенні високотвердих покриттів на основі карбідів, нітридів та боридів перехідних металів IV–VI груп періодичної системи [1–3]. Зараз ця задача успішно розв'язується методами фізичного і хімічного осадження покриттів з парової фази, а також методами хіміко-термічної обробки [1, 2, 4–6]. За допомогою методу фізичного осадження отримуються покриття при температурах підкладки не вище 500–560°C. Відносно невисокі температури насичення дозволяють зберегти ефект від попередньої зміцнювальної термічної обробки. Знайшли своє промислове використання методи хімічного осадження з парової фази, які дають можливість отримувати одно- і багатошарові покриття типу TiC, TiC–TiN, TiC–TiN–Al₂O₃. Порівняно з одношаровими покриттями багатошарові показали вищі експлуатаційні характеристики в умовах різання багатогранними твердосплавними пластинами з механічним кріпленням.

Відомі одно- і багатошарові покриття на основі карбідів та інтерметалідів перехідних металів IV–VI груп періодичної системи на сталях і твердих сплавах, які отримуються методами хіміко-термічної обробки [1, 4, 7, 8]. Це покриття типу TiC, VC–V₂C, ZrC, VC–Cr₇C₃, TiC–Ni₃Ti–NiTi. Вони відрізняються від отриманих іншими методами високою твердістю, значною адгезією з вихідним сплавом, практичною непористістю та високими експлуатаційними властивостями.

Постановка задачі

Науково-технічна інформація про формування на сталях і твердих сплавах багатошарових

карбонітридних покриттів методами дифузійної металізації має обмежений характер [9, 10]. Аналіз відомих методів хіміко-термічної обробки показав, що їх безпосереднє використання із зазначеною метою обмежене технологічними труднощами процесів. Цілком зрозуміло, що для створення нових комплексних карбонітридних покриттів на сталях і твердих сплавах доцільно використовувати дві технології. Це азотування, яке дозволить отримати у сплавах певну кількість азоту, та дифузійна металізація, завдяки якій частина азоту буде зв'язана в нітриди.

Таким чином, метою роботи є нанесення на поверхню сталей і твердих сплавів комплексних карбонітридних покриттів при наявності титану, вуглецю і азоту методами хіміко-термічної обробки, дослідження їх фазового складу, структури, товщини, мікротвердості та зносостійкості в умовах тертя ковзання без змащування.

Методика і техніка експерименту

Процес азототитанування реалізовувався у два послідовні етапи: азотування і титанування. За об'єкти дослідження було вибрано технічне залізо, сталь 20, сталь 45, У8А, 9ХС, ХВГ, Х12М, ШХ15 та тверді сплави ВК8 і Т5К10.

Азотування проводилось при температурі 540°C протягом 36 год в атмосфері аміаку при рівні дисоціації 47–55%. Титанування відбувалось при зниженому тиску за температури 1050°C протягом чотирьох годин. Як вихідні реагенти використовувався порошок титану, деревне вугілля та чотирихлористий вуглець [4]. Фазовий склад покриттів визначався на рентгенівському дифрактометрі ДРОН УМ-1 в мідному монохроматизованому випромінюванні. Розшифровка дифрактограм здійснювалась за допомогою програмного забезпечення PowderCell 2.4. Металографічні досліди проводились на мікроскопі Axiovert 40 MAT. Мікротвердість і товщина покриттів вимірювались приладом ПМТ-3.

Випробування зносостійкості проводилось на токарному верстаті 16К20 в умовах тертя ковзання без змащування за схемою вал–вкладка. Як контртіло використовувався циліндр діаметром 30 мм із сталі Р18 з твердістю 62HRC. Знос визначався за площиною лунки, утвореної в результаті контакту поверхні зразка і контртіла. Навантаження задавалось ричажним механізмом і змінювалось від 15 до 45 Н. Швидкість ковзання знаходилась в інтервалі 0,09–0,36 м/с, час випробування становив 120–600 с. Підготовка зразків до випробування на зносостійкість складалась

з кількох етапів. Спочатку обробкою за допомогою миючих засобів видалялись всі мастильні забруднення. Потім дрібнозернистим наждачним папером знімались всі інші забруднення. Наприкінці підготовки зразки знежирювались етиловим спиртом. Величина зносу оцінювалась зміною площини лунки зношування.

Результати роботи

Результати досліджень фазового складу, товщини і мікротвердості покриттів наведено в таблиці.

Рентгеноструктурним аналізом встановлено, що після азототитанування дифузійний шар на більшості досліджених у статті сплавах складається з карбіду титану TiC, розташованого на зовнішньому боці покриття, та нітриду титану TiN, який безпосередньо примикає до основи. Лише на технічному залізі формується одношарове покриття на основі TiN. Періоди кристалічної ґратки TiC і TiN у комплексному покритті становлять відповідно 0,42490–0,43409 і 0,42259–0,43058 нм і залежать від складу вихідного сплаву.

Таблиця. Фазовий склад, товщина і мікротвердість дифузійних покриттів на сплавах після азототитанування*

Матеріал основи	Хіміко-термічна обробка	Фазовий склад поверхні	Товщина, мкм	Мікротвердість, ГПа
Технічне залізо	Азотування	Fe ₂₋₃ N	7,5	4,4
		Fe ₄ N	7,5	5,5
	Титанування Азототитанування	TiC	0,5	30
		TiN	3,0	27,4
		Fe ₂ Ti	1,5	–
		FeTi	1,0	–
Сталь У8А	Азотування	Fe ₂₋₃ N	11,0	5,6
		Fe ₄ N	10,5	7,2
		Fe ₃ O ₄	–	–
	Титанування Азототитанування	TiC	18,4	34,0
		TiC	11,0	38,4
		TiN	3,3	29,0
Сталь Х12М	Азотування	Fe ₂₋₃ N	8,0	6,3
		Fe ₄ N	8,0	13,6
		Fe ₃ O ₄	–	–
		CrN**	–	–
	Титанування Азототитанування	TiC	8,0	32,0
		TiC	6,3	36,4
		TiN	3,0	30,4
ВК8	Азототитанування	TiC	4,0	34,0
		TiN	2,3	27,2
Т5К10	Азототитанування	TiC	5,0	34,0
		TiN	2,0	27,2

* Наведено фазовий склад, товщину і мікротвердість зони сполук.

** CrN утворюється в основній зоні азотованого шару.

З літературних джерел [11] відомо, що період кристалічної ґратки нітриду титану TiN, отриманого методом порошкової металургії, в межах області гомогенності змінюється від 0,42157 до 0,42358 нм. Нітрид TiN, близький до стехіометричного складу, характеризується великою концентрацією вакантних позицій в металевій і неметалевій підґратках. Ймовірно, що нітрид титану TiN, який утворився при хіміко-термічній обробці, має меншу кількість вакансій, що зумовлено розчиненням у нітриді певної кількості вуглецю і металів основи. Внаслідок цих процесів відбувається збільшення періоду ґратки.

Встановлено, що періоди ґраток α -заліза після титанування та у вихідному стані різняться між собою і становлять 0,28691 і 0,28665 нм, відповідно. Відомо, що ефективний розмір титану в твердому розчині α -заліза більший за ефективний розмір заліза [12]. Для α -заліза з вісь-центрованою кристалічною ґраткою ефективний радіус заліза становить 0,124 нм, для титану – 0,136 нм. При утворенні твердого розчину титану в α -залізі концентрація безпосередньо за гра-

ницею розділу $\text{Fe}_2\text{Ti}-\text{Fe}-\alpha$ може досягати 6% за масою [13]. Мікроструктури деяких сплавів після хіміко-термічної обробки наведено на рис. 1.

Шар карбіду титану TiC, розташований з зовнішнього боку, має білий колір і практично непористий, а нітридний шар TiN – характерного жовтувато-червоного кольору. Границі TiC–TiN (TiN–основа) добре виражені. Безпосередньо під зоною сполук TiC і TiN утворюється більш травна перехідна зона.

Структура і склад поверхні, які формуються під час азотування, після наступного титанування істотно змінюються. Зникає зона нітридів Fe_{2-3}N і Fe_4N . Частина азоту дифундує до поверхні з утворенням нітриду титану TiN, частина – в центральні зони основи. При цьому відбувається зміна структури перехідної зони під шаром карбіду і нітриду. Так, у структурі перехідної зони сталі X12M після азототитанування можна розрізнити світлі зерна карбідів і нітридів на темному фоні перліту. Характерна сітка нітридів, яка утворилася після азотування, зникає.

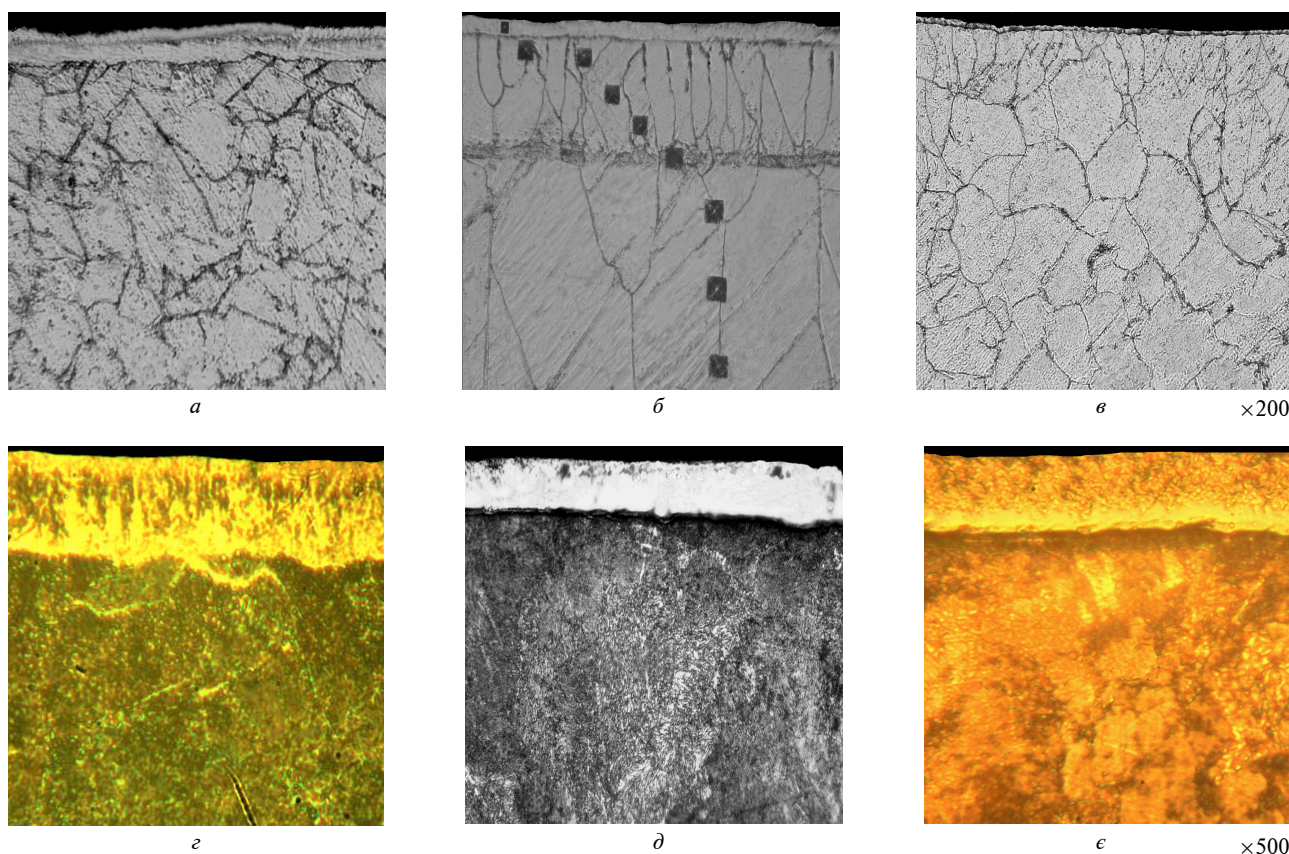


Рис. 1. Структура технічного заліза (а, б, в) і сталі У8А (з, д, е) після: а, з – азотування ($T = 540^\circ\text{C}$, $\tau = 36$ год); б, д – титанування ($T = 1050^\circ\text{C}$, $\tau = 4$ год); в, е – азототитанування (азотування – $T = 540^\circ\text{C}$, $\tau = 36$ год, титанування – $T = 1050^\circ\text{C}$, $\tau = 4$ год), $\times 200$, зменшено в чотири рази

Карбідна складова дифузійної зони формується переважно завдяки вуглецю основи. Це пояснює той факт, що максимальний за товщиною шар TiC утворюється на сталі У8А і становить 11,0 мкм, а мінімальний на твердих сплавах – 4,0–5,0 мкм (рис. 2).

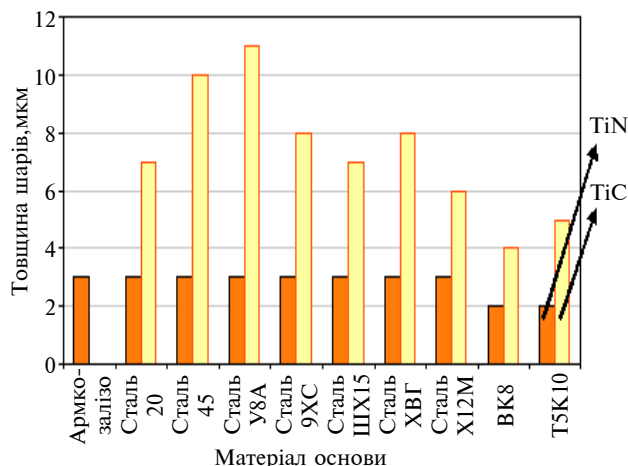
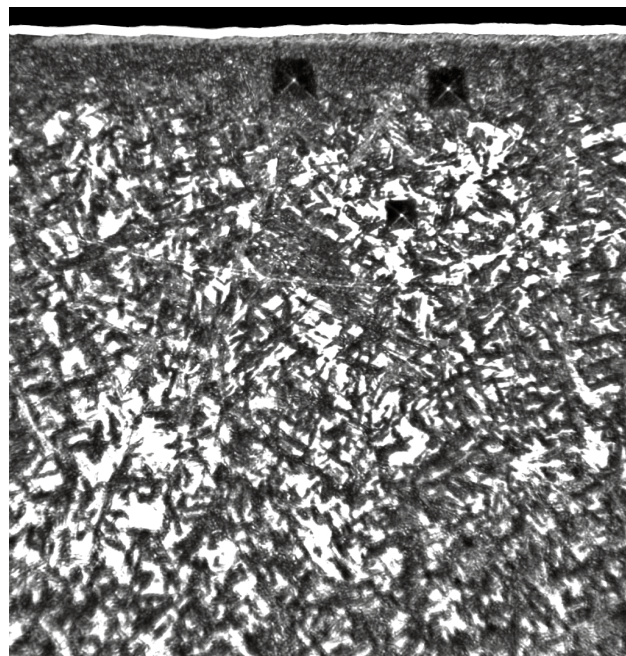


Рис. 2. Залежність товщини шарів TiC і TiN після азототитанування сталей ($T = 1050^\circ C$, $\tau = 4$ год) і твердих сплавів ($T = 1050^\circ C$, $\tau = 2$ год) від вмісту вуглецю

Після охолодження на повітрі в структурі азототитанованої сталі ХВГ безпосередньо в перехідній зоні можна виявити зону відпущеного мартенситу з мікротвердістю 8 ГПа і залишкового аустеніту (рис. 3). Це зумовлено, скоріше, наявністю великої кількості азоту, який зменшує критичну швидкість гартування і сприяє утворенню мартенситної структури.

Товщина зони TiN для вибраних умов титанування незначною мірою залежить від складу основи і становить 2,0–3,5 мкм. Азотований шар на твердих сплавах рентгеноструктурним і металографічними методами не виявляється. В той же час, після азототитанування на поверхні сплавів ВК8 і Т5К10 формується двошарове покриття TiC – TiN , що підтверджує розчинення азоту при азотуванні, скоріше, в кобальтовій зв'язці. Результати вимірювання мікротвердості комплексних покриттів наведено на рис. 4.

Аналіз отриманих даних показав, що шар карбіду титану TiC з максимальною мікротвердістю утворюється на сталі У8А – 38,4 ГПа, мінімальною – на сталі 20 і твердих сплавах – 32,0–34,0 ГПа. Мікротвердість шару нітриду титану TiN незначною мірою залежить від складу основи і становить 27,0–30,0 ГПа. Зміна мікротвердості у двошарових покриттях TiC і TiN від поверхні до основи порівняно з одношаровим TiC більш плавна, що буде позитивно впливати на



×200

Рис. 3. Структура сталі ХВГ після азототитанування (азотування – $T = 540^\circ C$, $\tau = 36$ год, титанування – $T = 1050^\circ C$, $\tau = 4$ год), зменшено в 2,33 раза

стійкість покриттів в умовах контактної взаємодії. Зносостійкість сталі У8А після азототитанування в умовах тертя ковзання без змащування в 1,4 раза більша, ніж після титанування, в 3,4 раза, ніж після азотування, і в 4,4 раза, ніж сталі У8А без обробки (рис. 5).

Підвищення зносостійкості сталі У8А після дифузійної металізації порівняно з необробленою можна пояснити підвищенням поверхневої мікротвердості та низьким коефіцієнтом тертя в зоні контакту. Макроаналіз поверхонь зношування сталей з покриттями показав, що за

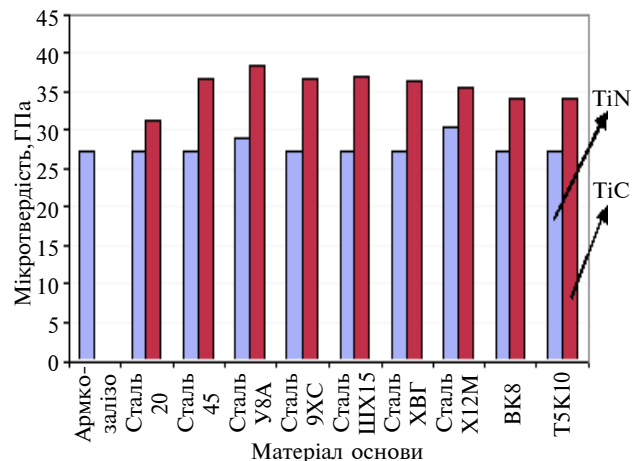


Рис. 4. Мікротвердість шарів TiC і TiN після азототитанування сталей ($T = 1050^\circ C$, $\tau = 4$ год) на сталях і твердих сплавах

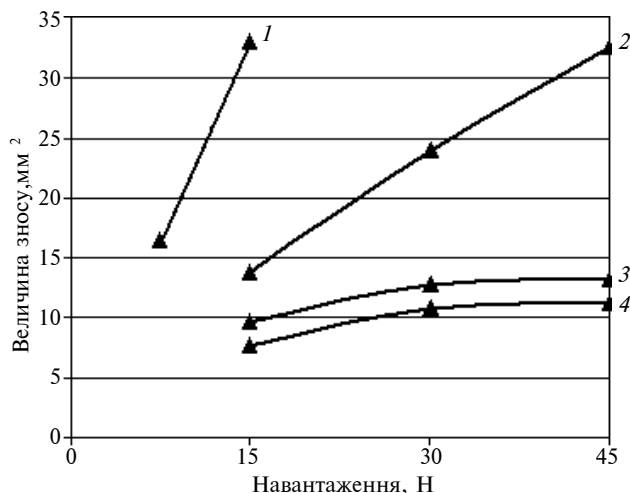


Рис. 5. Залежність величини зносу сталі У8А у вихідному стані (1), після азотування (2), титанування (3), азототитанування (4) від навантаження в умовах тертя ковзання без змащування при $\tau = 600$ с, $V = 0,36$ м/с

умов мінімальних контактних навантажень і швидкостей ковзання, вибраних у статті, спостерігаються лінії, направлені по ходу тертя. Виникнення цих ліній зумовлено дією твердих часток карбиду або нітриду титану, які відокремлюються від покриття і діють як абразивний матеріал.

Незважаючи на те, що мікротвердість шару нітриду титану в композиції TiN–TiC дещо нижча за мікротвердість карбиду титану, порівняльні результати зносу У8А після титанування і азототитанування свідчать про переваги останніх покриттів. Більш високі показники зносостійкості двошарового покриття TiC і TiN зумовлені, ско-

ріше, високими мікротвердістю та адгезією покриття з основою.

Висновки

1. Показано можливість отримання на поверхні сталей і твердих сплавів багатошарових покриттів типу карбід титану–нітрид титану послідовною реалізацією процесів азотування і дифузійного титанування.

2. Рентгеноструктурним аналізом визначено, що параметри кристалічної ґратки покриттів TiC і TiN становлять відповідно 0,42490–0,43409 і 0,42259–0,43058 нм.

3. Встановлено, що шар TiC – суцільний, однорідний за структурою, розташований з зовнішнього боку покриття. Шар TiN – тонкий жовтувато-золотистого кольору, міститься під шаром TiC. Проаналізовано залежність товщини шарів покриття від складу основи. На товщину шару TiC значний вплив має вуглець матриці. Максимальну товщину шару карбиду титану зафіксовано на сталі У8А – 11 мкм, мінімальну – на ВК8 – 4 мкм. Товщина шару TiN – 2–3 мкм.

4. Мікротвердість покриттів TiN становить 27,0–30,5 ГПа, TiC – 32,0–38,5 ГПа.

5. Зносостійкість сталі У8А з покриттям типу TiN і TiC виявилася вищою за зносостійкість сталі У8А у вихідному стані в 4,4 раза.

Для аналізу покриття важливе значення має не лише якісна, але й кількісна оцінка його пористості та адгезії з основою, які й будуть визначатися авторами в наступних дослідженнях.

В.Г. Хижняк, Н.А. Курило, І.В. Летвицкая,
А.Т. Сердитов

АЗОТОТИТАНИРОВАНИЕ СТАЛЕЙ И ТВЕРДЫХ СПЛАВОВ

Изучены фазовый состав, строение, микротвердость, толщина и износостойкость защитных карбонитридных покрытий при участии азота, углерода и титана на сталях и твердых сплавах. Показано, что на поверхности сталей и твердых сплавов образуется двухслойное покрытие нитрид титана–карбид титана. Износостойкость стали У8А с карбонитридными покрытиями выросла по сравнению с исходной в три–четыре раза.

V.G. Khizhniak, N.A. Kurilo, I.V. Letvitska,
O.T. Serditov

NITROGENITANING OF STEELS AND FIRM ALLOYS

The research described in this paper considers the phase structure, structure, microhardness, thickness and wear resistance of protective carbide and nitride coverings, involving carbon and titan on steels and firm alloys. The research results demonstrate that the two-layer covering nitride of the titan–carbide of titan is formed on a surface of steels and firm alloys. Furthermore, our research results indicate that wear resistance of steel U8A with the carbide and nitride coverings has increased in comparison with the initial one by 3–4 times.

1. *Химико-термическая* обработка металлов и сплавов: Справочник / Г.В. Борисенко, Л.А. Васильев, Л.Г. Ворошнин и др. – М.: Металлургия, 1981. – 424 с.
2. *Самсонов Г.В., Эпик А.П.* Тугоплавкие покрытия. – М.: Металлургия, 1973. – 400 с.
3. *Ляхович Л.С., Ворошин А.Г.* Борирование стали. – М.: Металлургия, 1967. – 120 с.
4. *Лоскутов В.Ф., Хижняк В.Г., Куницкий Ю.А., Киндрачук М.В.* Диффузионные карбидные покрытия. – К.: Техника, 1991. – 168 с.
5. *Шпак А.П., Наконечко О.І., Куницкий Ю.А., Соболев О.В.* Механічні властивості покриттів на основі титану. – К.: ІМФ НАН України, 2005. – 80 с.
6. *Dellacorte C., Sliney H.* The effect of atmosphere on the Tribological Properties of a Chromium Carbide Based Coating for use to 760 °C // *Lubrication Eng.* – 1987. – 44. – P. 338–343.
7. *Хижняк В.Г., Помарин Ю.М., Курило Н.А., Медова И.Ю.* Диффузионные покрытия на основе карбидов Ti, V и Cr на стали У8А // *Современная электрометаллургия.* – 2007. – № 4. – С. 30–33.
8. *Хижняк В.Г., Карпець М.В., Долгих В.Ю.* Нанесение защитных покрытий на безвольфрамовые твердые сплавы // *Порошковая металлургия.* – 2003. – № 9/10. – С. 118–123.
9. *Сігова В.І., Хижняк В.Г., Курило Н.А.* Азоттитанування конструкційних та інструментальних сталей // *Вісник Сумського держ. ун-ту.* – 2007. – № 2. – С. 73–79.
10. *Яськів О.І., Погрелюк І.Н., Федирко В.Н.* Фазовый состав поверхностного слоя на титане, образующийся при взаимодействии с углерод-азотсодержащей средой // *МИТОМ.* – 2006. – № 3. – С. 35–37.
11. *Тот Л.* Карбиды и нитриды переходных металлов. – М.: Мир, 1974. – 296 с.
12. *Специальные стали: Учебник для вузов / М.И. Гольдштейн, С.В. Грачев, Ю.Г. Векслер.* – М.: Металлургия, 1985. – 408 с.
13. *Диаграмма* состояния двойных систем на основе железа: Справ. изд. / О. Кубашевски; Пер. с англ. – М.: Металлургия, 1985. – 184 с.
14. *Киндрачук М.В., Кульгавый Э.А.* Трибологические процессы в гетерогенных системах // *Пробл. тертя та зношування.* – К., 2007. – Вип. 48. – С. 39–54.

Рекомендована Радою інженерно-фізичного факультету НТУУ "КПІ"

Надійшла до редакції
11 вересня 2008 року

ПРИЛАДОБУДУВАННЯ ТА ІНФОРМАЦІЙНО-ВИМІРЮВАЛЬНА ТЕХНІКА

УДК 681.3+615.89

О.М. Мелашенко, Л.М. Рижков

ОПТИМІЗАЦІЯ МАГНІТНОЇ СИСТЕМИ СТАБІЛІЗАЦІЇ МІКРОСУПУТНИКА ЗА ЗМІШАНИМ H_2/H_∞ -КРИТЕРІЄМ

Вступ

Необхідність досягнення високої точності стабілізації мікросупутника (МС) в умовах діючих на нього збурень із невідомим спектральним розподілом змушує відмовитися від використання квадратичного критерію якості в задачі синтезу зворотного зв'язку. Натомість, оптимізація системи орієнтації і стабілізації (СОС) МС за H_∞ -критерієм дає можливість забезпечити задану точність стабілізації при заданому рівні невизначеності моделі мікросупутника, моделі діючих на нього збурень і моделі магнітного поля Землі (МПЗ).

Оптимізація магнітної системи стабілізації МС за H_∞ -критерієм розглядалася в [1], де розв'язок поставленої задачі досягається через розширення задачі типового H_∞ -синтезу на випадок лінійних нестационарних систем. Виконане тут моделювання повних рівнянь руху МС із синтезованим зворотним зв'язком дає високі характеристики за точністю і робастністю замкненої магнітної СОС.

Оптимізація магнітної системи стабілізації МС за H_2 -критерієм розглядалася в [2], де, як і в попередньому випадку, розв'язок поставленої задачі досягається через розширення задачі типового H_2 -синтезу на випадок лінійних нестационарних систем. Тут демонструється ефективність застосування методу лінійних матричних нерівностей у задачі оптимізації магнітної СОС.

Розглянуті в працях [1, 2] нестационарні алгоритми керування потребують значних ресурсів бортового обчислювача. Зважаючи на це, в [3] розглядався стаціонарний алгоритм магнітної СОС, оптимізованої за лінійно-квадратичним критерієм. Показано, що підбором вагових матриць можна досягнути високої точності стабілізації МС в усталеному режимі. З іншого боку, вимога забезпечення високої якості перехідних процесів за неточності моделі МПЗ веде до необхідності пошуку більш ефективних алгоритмів магнітної стабілізації.

Постановка задачі

Метою даної статті є оптимізація параметрів магнітної СОС на основі використання змішаного H_2/H_∞ -критерію. Алгоритми керування досліджуються за припущення про доступність для зворотного зв'язку повного фазового вектора МС.

Модель просторового руху МС

Розглядатимемо далі рух МС в орбітальній системі координат $O_1X_0Y_0Z_0$ (рис. 1), центр O_1 якої збігається з центром мас супутника. Згідно з рис. 1, вісь O_1X_0 розташована в площині орбіти і направлена по вектору лінійної швидкості супутника, вісь O_1Z_0 направлена по радіус-вектору супутника до центра Землі і вісь O_1Y_0 направлена так, щоб утворювалась права система координат (СК).

По осі O_1Y_0 направлений вектор кутової швидкості обертання супутника по орбіті $\omega_{OI}^O = (0, -\omega_0, 0)^T$. Будемо описувати орієнтацію зв'язаної СК відносно орбітальної кватерніоном $\mathbf{q} = (q_0, q_1, q_2, q_3)^T$. Тоді, за припущення про збіг осей X, Y, Z зв'язаної СК з головними центральними осями інерції супутника, повні рівняння його руху в орбітальній СК набудуть вигляду

$$\begin{aligned} J\dot{\omega}_{BI}^B + \omega_{BI}^B \times (J\omega_{BI}^B) &= \tau^B, \\ \dot{\mathbf{q}} &= \frac{1}{2}\mathbf{q} \circ (0, (\omega_{BO}^B)^T)^T, \end{aligned} \quad (1)$$

де $J = \text{diag}(I_x, I_y, I_z)$ – тензор інерції супутника; ω_{BI}^B – абсолютна кутова швидкість супутника, виражена у зв'язаній СК; $\omega_{BO}^B = \omega_{BI}^B - R_O^B \omega_{OI}^O$ – кутова швидкість супутника відносно орбітальної СК, виражена у зв'язаній СК; $\tau^B = \tau_g^B + \tau_m^B + \tau_d^B$ – сумарний момент, який діє на супутник, виражений у зв'язаній СК, причому $\tau_g^B = 3\omega_0^2 \mathbf{c}_3 \times (J\mathbf{c}_3)$ – гравітаційний момент (тут \mathbf{c}_3 – проекції орта осі O_1Z_0 на осі зв'язаної СК); $\tau_m^B = \mu^B \times \mathbf{V}^B$ – момент керування, який розвивається магнітними котушками (тут μ^B – магнітний момент котушок і \mathbf{V}^B – вектор індукції МПЗ у зв'язаній СК); τ_d^B – момент збурення, в який входять моменти від залишкової намагніченості супутника, від сонячного вітру,

від залишкової атмосфери та інші моменти; \circ – знак кватерніонного множення.

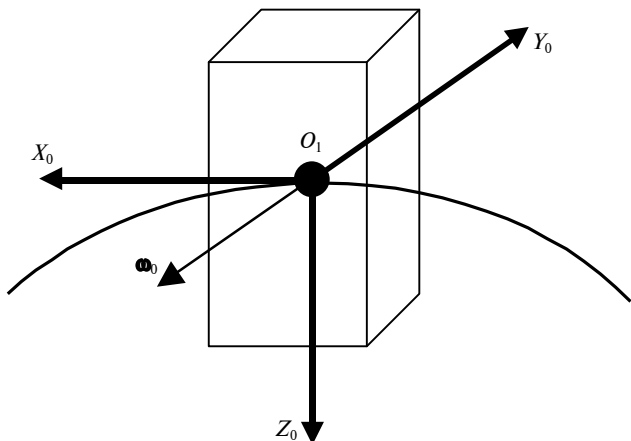


Рис. 1. Супутник в орбитальній СК

Кватерніон q в (1) подаватимемо у вигляді $q = (\eta, \epsilon)^T$, де η – скалярна частина кватерніона і ϵ – його векторна частина.

З метою оптимізації керування за змішаним H_2/H_∞ -критерієм лінеаризуємо рівняння (1) і запишемо їх у просторі станів. Детально ці операції описано в [3], тому одразу наведемо кінцевий результат:

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \epsilon_1 \\ \dot{\epsilon}_1 \\ \epsilon_2 \\ \dot{\epsilon}_2 \\ \epsilon_3 \\ \dot{\epsilon}_3 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4k_x \omega_0^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3k_y \omega_0^2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -(1-k_z)\omega_0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (1-k_x)\omega_0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -k_z \omega_0^2 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \epsilon_1 \\ \dot{\epsilon}_1 \\ \epsilon_2 \\ \dot{\epsilon}_2 \\ \epsilon_3 \\ \dot{\epsilon}_3 \end{pmatrix} +$$

$$+ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1/(2I_x) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/(2I_y) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/(2I_z) \end{bmatrix} \tau_d^B(t)$$

$$+ \frac{J^{-1}}{2\|\bar{B}^O\|} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -\bar{B}_y^2 - \bar{B}_z^2 & \bar{B}_x^2 \bar{B}_y^2 & \bar{B}_x^2 \bar{B}_z^2 \\ 0 & 0 & 0 \\ \bar{B}_x^2 \bar{B}_y^2 & -\bar{B}_x^2 - \bar{B}_z^2 & \bar{B}_y^2 \bar{B}_z^2 \\ 0 & 0 & 0 \\ \bar{B}_x^2 \bar{B}_z^2 & \bar{B}_y^2 \bar{B}_z^2 & -\bar{B}_x^2 - \bar{B}_y^2 \end{bmatrix} \bar{\mu}^B(t), \quad (2)$$

де $\bar{B}^O = 1/T_{orb} \int_0^{T_{orb}} B^O(t) dt$ – осереднений вектор індукції МПЗ; T_{orb} – час одного оберту МС.

Оптимізація магнітної СОС за змішаним H_2/H_∞ -критерієм

Як вище зазначалося, оптимізація магнітної СОС МС лише за H_2 -критерієм дає змогу досягти високої точності стабілізації у випадку відомих моделей об'єкта керування і збурень, тоді як оптимізація її тільки за H_∞ -критерієм, забезпечуючи замкненій системі властивості робастності, не дає можливості ефективно впливати на такі характеристики системи, як час перехідного процесу та перерегулювання. Тому метою оптимізації за змішаним H_2/H_∞ -критерієм є знаходження компромісу між точністю системи і її робастністю, або, іншими словами, компромісу між значеннями H_2 і H_∞ норм замкненої СОС. Для розв'язання цієї задачі подамо магнітну СОС у вигляді структурної схеми, зображеної на рис. 2.

Матриця L на рис. 2 є матрицею зворотного зв'язку за повним фазовим вектором МС. Математичний зміст матриць A, B_d, \bar{B}_u на рис. 2 видно з виразу (2). На основі матриць C_∞, C_2, D_{22} формуються сигнали якості замкненої СОС, тобто вибираються виходи системи із своїми ваговими коефіцієнтами, за якими буде мінімізуватися та чи інша норма.

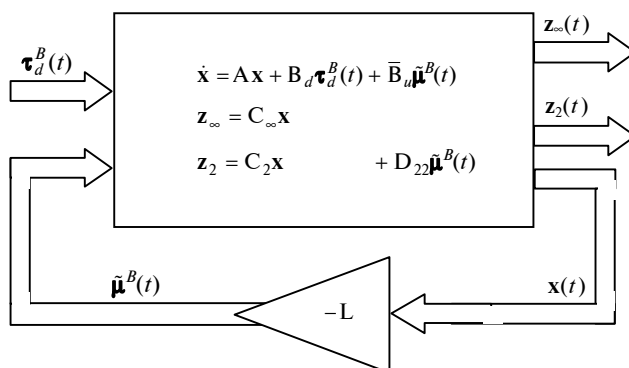


Рис. 2. Структурна схема задачі змішаної H_2/H_∞ -оптимізації магнітної СОС МС

Введемо оператори $T_2(s) = \frac{z_2(s)}{\tau_d^B(s)}$, $T_\infty(s) = \frac{z_\infty(s)}{\tau_d^B(s)}$. Тоді змішаний H_2/H_∞ -критерій якості керування МС запишеться у вигляді [4]

$$\min_L (\alpha \|T_\infty\|_\infty^2 + \beta \|T_2\|_2^2), \quad (3)$$

де α і β – вагові коефіцієнти, які визначають питому вагу кожного з критеріїв якості, тобто за заданих матриць C_∞ , C_2 , D_{22} ітеративна процедура оптимізації магнітної СОС полягатиме у встановленні компромісу між її точністю і робастністю через підбір вагових коефіцієнтів у критерії (3).

Для знаходження розв'язку оптимізаційної задачі (3) використаємо апарат лінійних матричних нерівностей [5]. Згідно з [5], знаходження коефіцієнта підсилення L зворотного зв'язку за станом полягає в знаходженні таких матриць Y , X , Q і скаляра γ , які задовольняють умови

$$\begin{aligned} & \min \operatorname{tr}(Q), \\ & \begin{pmatrix} AX + XA^T + \bar{B}_u Y + Y^T \bar{B}_u^T & B_d & XC_\infty^T \\ (\bullet)^T & -I & 0 \\ (\bullet)^T & 0 & -\gamma^2 I \end{pmatrix} < 0, \\ & \begin{pmatrix} Q & C_2 X + D_{22} Y \\ (\bullet)^T & X \end{pmatrix} > 0, \\ & \gamma^2 < \gamma_0^2, \end{aligned} \quad (4)$$

де $Y \in \mathbb{R}^{3 \times 6}$; $X \succ 0$ – матриця розмірності 6×6 ; $(\bullet)^T$ – транспонований елемент матриці, симетричний відносно головної діагоналі; $\gamma > 0$; γ_0 – бажаний рівень H_∞ -норми замкненої системи стабілізації.

Якщо система (4) має розв'язок, то шуканий коефіцієнт підсилення знаходиться з рівності $L = YX^{-1}$.

Зауважимо, що в системі (4) нерівності є обмеженнями на вибір матриці Q . При цьому перша і третя нерівності відповідають оптимізації системи за H_∞ -критерієм, а мінімізація сліду матриці Q за обмежень у вигляді другої нерівності – оптимізації за H_2 -критерієм, тобто, якщо взяти, що один з коефіцієнтів у (3) дорівнює нулю, а інший – одиниці, то прийдемо до задачі оптимізації або тільки за H_2 -критерієм, або тільки за H_∞ -критерієм.

За об'єкт керування візьмемо МС, який рухається по коловій орбіті на висоті 650 км з нахилом орбіти, який дорівнює 98° , і тензором інерції при розгорнутій гравітаційній штанзі – $J = \operatorname{diag}(51,44 \ 51,48 \ 0,76)$ [кг·м²]. За модель МПЗ візьмемо модель WMM2005 [6].

При синтезі стаціонарного зворотного зв'язку згідно із змішаним H_2/H_∞ -критерієм сигнали якості $z_\infty(t)$ і $z_2(t)$ вибираємо у вигляді

$$z_\infty(t) = 10^{-3} \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \end{pmatrix}, \quad z_2(t) = \begin{pmatrix} 9 \cdot 10^{-2} \check{\mu}_x \\ 9 \cdot 10^{-2} \mu_y \\ 9 \cdot 10^{-5} \check{\mu}_z \end{pmatrix}.$$

Такий вибір сигналів якості означає, що при синтезі зворотного зв'язку ставиться задача знаходження компромісу між H_∞ -нормою оператора за входом $\tau_d^B(t)$ і виходом $\varepsilon(t)$ і H_2 -нормою того ж оператора за входом $\tau_d^B(t)$ і виходом $\check{\mu}^B(t)$.

Основна вимога синтезу робастних систем, згідно з парадигмою H_∞ -керування, полягає у виконанні нерівності $\|T_\infty\|_\infty < 1$. Для подальших досліджень беруться значення $\alpha = 10^3$, $\beta = 5 \cdot 10^{-2}$, при яких $\|T_\infty\|_\infty = 0,98$, $\|T_2\|_2 = 233$.

Оцінку ефективності описаного вище алгоритму функціонування магнітної СОС виконаємо через аналіз перехідних і усталених процесів, які в ній виникають. Дослідження ґрунтуються на порівнянні кривих вказаних процесів у магнітній СОС з матрицею L , розрахованою за точною моделлю МПЗ, і в СОС з матрицею L , обчисленою за неточною моделлю цього поля.

Для демонстрації переваг запропонованого алгоритму наведемо також криві перехідних і усталених процесів у магнітній СОС з осередненим лінійно-квадратичним регулятором [3]. Проведемо аналіз динаміки супутника у двох найважливіших режимах – початковій орієнтації та стабілізації.

На рис. 3 наведено графіки вільного руху МС по кутах орієнтації з двома алгоритмами магнітної стабілізації за таких початкових умов: $\omega_{OB}^B = 0$ [рад/с], $(\phi, \theta, \psi) = (-30^\circ, 10^\circ, -20^\circ)$. Суцільна, штрихова і пунктирна криві на цьому рисунку відповідають процесам у магнітних СОС згідно з робастним регулятором при точній моделі МПЗ і робастним та осередненим ЛК-регуляторами при неточній моделі МПЗ, взятій у вигляді $\hat{B}_{orb} = B_{orb} + (0,04, 0,04, 0,04)^T \|B_{orb}\|$, де

\mathbf{V}_{orb} – вектор індукції МПЗ, за яким розраховувалися матриці зворотного зв'язку L ; $\hat{\mathbf{V}}_{orb}$ – вектор індукції МПЗ, з яким насправді взаємодіяли магнітні котушки. Зауважимо, що лінійно-квадратичний регулятор повністю взято з [3].

Як видно з рис. 3, перехідний процес у робастній системі керування закінчується приблизно за п'ять орбітальних витків незалежно від точності моделі МПЗ, тоді як якість перехідних процесів у системі з лінійно-квадратичним регулятором за невизначеності моделі МПЗ істотно погіршилася.

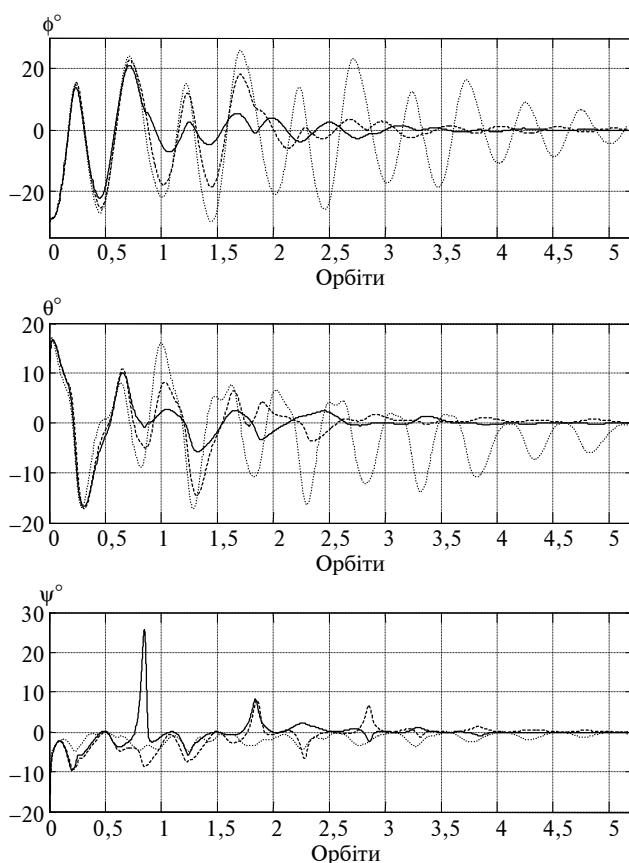


Рис. 3. Перехідні процеси в СОС по трьох кутах орієнтації

На рис. 4 наведено результати моделювання усталених процесів у режимі стабілізації при дії збурюючого моменту вигляду $\tau_d^B = (3 \cdot 10^{-6} - 5 \cdot 10^{-6} - 9,8 \cdot 10^{-7}) \sin(\omega_0 t)$ [Н·м]. Позначення кривих на цьому рисунку такі ж, як і на рис. 3.

Як видно з рис. 4, і робастний, і осереднений лінійно-квадратичний регулятори дають можливість отримати точність стабілізації не гірше

ніж $3^\circ-4^\circ$ по всіх трьох каналах, навіть за вказаної неточності моделі МПЗ.

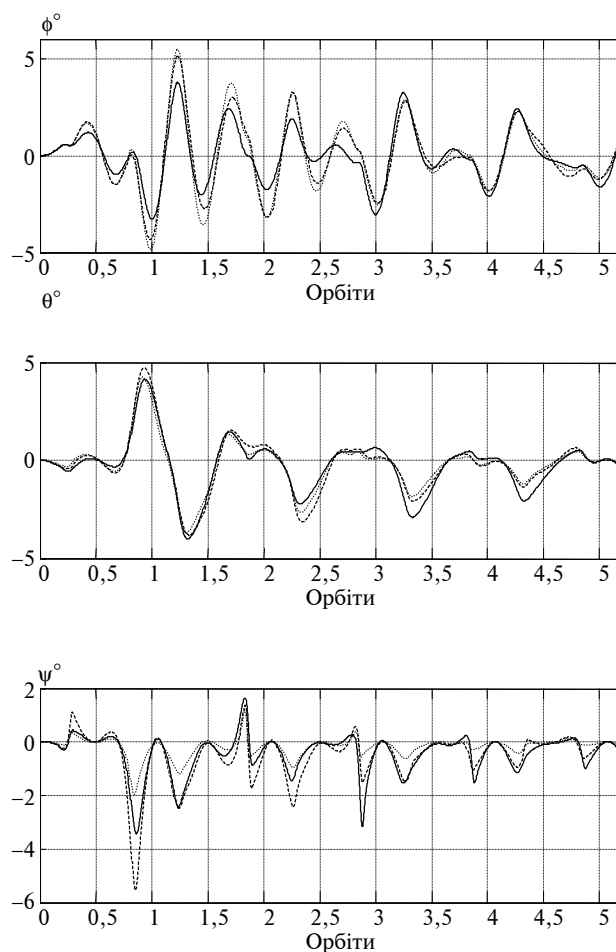


Рис. 4. Усталені процеси в СОС по трьох кутах орієнтації при дії збурення

Висновки

Оптимізація магнітної системи орієнтації і стабілізації мікросупутника за змішаним H_2/H_∞ -критерієм істотно підвищує точність стабілізації мікросупутника в перехідному режимі порівняно з точністю, яка досягається при оптимізації системи стабілізації за лінійно-квадратичним критерієм якості у випадку невизначеності моделі МПЗ.

Напрямок подальшої роботи може бути дослідження точності магнітної СОС з нестационарними законами керування.

О.Н. Мелашенко, Л.М. Рыжков

ОПТИМИЗАЦИЯ МАГНИТНОЙ СИСТЕМЫ СТАБИЛИЗАЦИИ МИКРОСПУТНИКА ПО СМЕШАННОМУ H_2/H_∞ -КРИТЕРИЮ

Рассматривается построение магнитной системы стабилизации микроспутника. Оценивается и сравнивается эффективность регуляторов с использованием разных критериев качества.

O.M. Melaschenko, L.M. Ryzhkov

THE OPTIMIZATION OF MICROSATELLITE MAGNETIC STABILIZING SYSTEM ON THE MIXED H_2/H_∞ -CRITERION

The core of this paper is the study of the construction of the microsatellite magnetic stabilizing system. Furthermore, using various quality criteria, we estimate and compare the efficiency of the regulators.

1. *Kulkarni J., Campbell M.* An approach to magnetic torque attitude control of satellites via H_∞ -control for LTV systems // Decision and Control. CDC. 43rd IEEE Conf., 14–17 Dec. 2004. – 2004. – 1, Issue. – P. 273–277.
2. *Wisniewski R., Stoustrup J.* Periodic H_2 Synthesis for Spacecraft Attitude Determination and Control with Vector Magnetometer and Magnetorquers // Proc. of IFAC Workshop on Periodic Control Systems, PSYCO 2001. – Cernobbio-Como, 2001. – P. 121–126.
3. *Мелашенко О.М., Рыжков Л.М.* Синтез гравітаційно-магнітної системи стабілізації микросупутника // Механіка гіроскопічних систем. – 2008. – Вип. 19. – С.76–86.
4. *Khargonekar P.P., Rotea M.A.* Mixed H_2/H_∞ control: A convex optimization approach // IEEE Trans. Automat. Contr. – 1991. – 36. – P. 824–837.
5. *Chilali M., Gahinet P.* H_∞ -Design with Pole Placement Constraints: An LMI Approach // Ibid. – 1996. – 11. – P. 358–366.
6. <http://www.ngdc.noaa.gov/seg/WMM/DoDWMM.shtml>

Рекомендована Радою факультету авіаційних і космічних систем НТУУ “КПІ”

Надійшла до редакції
18 липня 2008 року

УДК 528.7:629.78

Л.А. Міхеєнко, В.І. Микитенко

МЕТОДИ, ЗАСОБИ ТА МЕТРОЛОГІЧНЕ ЗАБЕЗПЕЧЕННЯ КАЛІБРУВАННЯ ЕТАЛОННИХ ВИПРОМІНЮВАЧІВ

Вступ

Постійне удосконалення прецизійної фотометричної апаратури потребує випереджаючого розвитку відповідного еталонного та вимірювального забезпечення. Ця задача, одна з найбільш складних та важливих у сучасній оптичній метрології, в умовах України значно ускладнюється рядом додаткових факторів – відсутністю сертифікованих еталонів та повірочних схем для енергетичних вимірювань (є тільки проект ДСТУ), моральним та фізичним зношенням елементної фотометричної бази (особливо в розряді зразкових засобів вимірювань), недостатнім розвитком наукового і методичного забезпечення оптико-фізичних вимірювань [1].

Особливо гостро ця ситуація проявилась при розробці систем вимірювання енергетичних характеристик прецизійних цифрових відеосистем (ЦВС) з багатоелементними приймачами випромінювання, наприклад, установок для калібрування вітчизняних багатоспектральних скануючих пристроїв космічного базування [2].

Постановка задачі

Метою даної статті є огляд, аналіз та розробка методів калібрування еталонних випромінювачів для вимірювання енергетичних характеристик прецизійних ЦВС у видимій та ближній інфрачервоній ділянках спектра на основі поширеної та доступної в Україні елементної бази.

Засоби калібрування еталонних випромінювачів

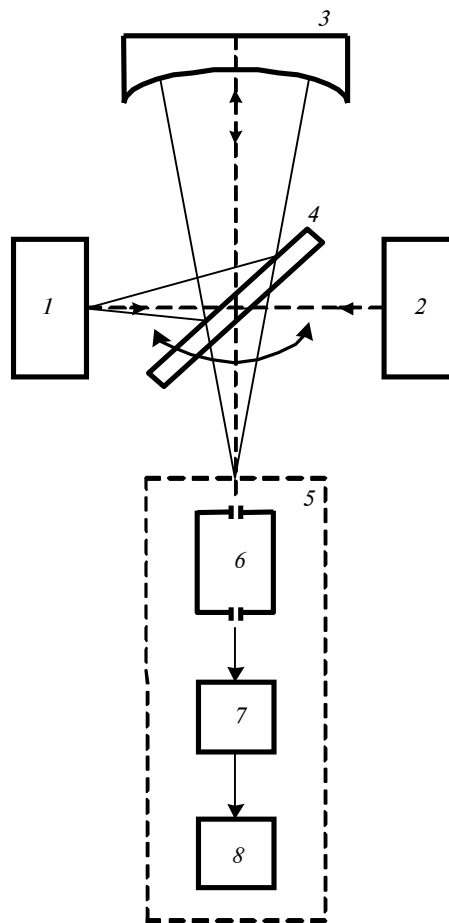
У більшості установок для вимірювання енергетичних характеристик ЦВС в еталонних джерелах випромінювання використовуються дифузні випромінювачі на основі інтегруючої сфери [3], типові характеристики яких наведено в табл. 1. Їх калібрування, зазвичай, здійснюється за спектральною густиною енергетичної яскра-

Таблиця 1. Типові характеристики вимірювальних випромінювачів

Характеристика	Значення
Інтегральна яскравість, Вт/ср·м ²	500–2000
Спектральний діапазон, мкм	0,4–1,8
Динамічний діапазон зміни яскравості	10 ² –10 ⁵
Вихідна апертура, м	∅0,0025–∅0,25
Середньоквадратична похибка відтворення одиниці яскравості	10 ⁻² –10 ⁻¹

вості (СГЕЯ), що найбільш повно відтворює енергетичні характеристики випромінювача.

Для переносу одиниці СГЕЯ від первинного еталона до робочих засобів вимірювання використовується проекційна схема, яка показана на рисунку.



Структурна схема установки передачі одиниці СГЕЯ: 1 – еталонне джерело випромінювання; 2 – джерело випромінювання, що калібрується; 3 – проекційний об'єктив; 4 – комутатор (плоске дзеркало); 5 – спектрокомпаратор; 6 – монохроматор; 7 – вимірювальний приймач випромінювання; 8 – підсилювально-реєструючий пристрій

Елемент ділянки кожного з випромінювачів за допомогою дзеркального об'єктива з комутатором почергово проектується на вхід спектрокомпаратора, який об'єднує монохроматор та вимірвальний приймач випромінювання. При цьому вхідна щільність монохроматора оптично спряжена з випромінюючою площиною, а вихідна – з приймальним елементом приймача. Калібрування здійснюється порівнянням сигналів від первинного (еталонного) та вторинного (того, що калібрується) випромінювачів у вузькій смузі пропускання монохроматора. Змінюючи довжину хвилі, на яку налаштовано монохроматор, проводять калібрування в заданому спектральному діапазоні.

Основними характеристиками калібрувальних систем є: спектральний діапазон, в якому здійснюється перенос одиниці СГЕЯ, смуга пропускання монохроматора, похибка переносу одиниці СГЕЯ, монохроматичний потік на вході монохроматора, спектральний фотосигнал на виході приймача випромінювання.

Задачею синтезу калібрувальної системи є вибір елементів (еталонних та робочих випромінювачів, об'єктива, монохроматора та приймача випромінювання), що забезпечують отримання прийнятних характеристик та параметрів вимірвальної установки – мінімальної похибки передачі одиниці СГЕЯ при заданому відношенні сигнал/шум.

Елементна база вимірвальних установок

Із врахуванням вимог до вимірвальних установок, що розглядаються [2], для практичного застосування були відібрані такі типи вимірвальних ламп: світловимірвальні лампи розжарення (табл. 2) [4], спеціальні галогенні лампи (табл. 3) [5], вимірвальні приймачі випромінювання (табл. 4) [6, 7] та монохроматори (табл. 5) [8, 9]. Наведені в таблицях дані дали змогу розробити методику обґрунтування елементного складу установки калібрування ЦВС.

Таблиця 2. Лампи розжарення, світловимірвальні

Тип випромінювача	Країна, фірма	Електричні параметри		Фотометричні параметри			Стабільність	Габарити тіла розжарення, мм ²	Вимірювана величина
		P, Вт	U, В	T, К	I, кд	Φ, Вт			
СИС 107-500	Росія	365	107	2800	500	–	15 год/18 міс	25×30	Сила світла
СИС 107-1500	”	915	107	2860	1500	–	15 год/13 міс	28×35	”
СИП 107-500	”	74	107	2800	–	500	25 год/18 міс	25×15	Світловий потік
СИП 107-1500	”	260	107	2800	–	3500	25 год/18 міс	25×15	”
СИРШ 6-100	”	100	6	2840	–	–	200 год/12 міс	2×8	Яскравість
СИРШ 8,5-200	”	212	8,5	3000	–	–	300 год/12 міс	2×10	”
WI 14	Німеччина, Osram	90	5	2400	–	–	–	1,6×8	”
LF 300	Великобританія, Polaron	300	100	2750	–	4000	1%/100 год	–	Світловий потік
LIS 3000	”	616	19,2	3000	740	–	1%/100 год	10×15	Сила світла

Таблиця 3. Лампи розжарення, галогенні та температурні

Тип випромінювача	Країна, фірма	Електричні параметри		Фотометричні параметри		Тривалість горіння, год	Габарити тіла розжарення, мм ²	Вимірювана величина
		P, Вт	U, В	T, К	Φ, лм			
КГМ 12-100	Росія	100	12	3000	3000	85	44×12,5	Яскравість

Кінець табл. 3

Тип випромінювача	Країна, фірма	Електричні параметри		Фотометричні параметри		Тривалість горіння, год	Габарити тіла розжарення, мм ²	Вимірювана величина
		$P, \text{Вт}$	$U, \text{В}$	$T, \text{К}$	$\Phi, \text{лм}$			
КГМ 24-150	Росія	150	24	3000	5000	50	47×12,5	Яскравість
КГМ 24-150-3	"	250	24	3000	8500	150	70×12,5	"
КГМ 30-300-2	"	300	30	3200	—	55	55×16	"
КГМ 36-400	"	400	36	3200	14500	50	60×18	"
ТРУ 1100-2350	"	300	10	2350	—	50	50×72	"
ТРШ 2850-3000	"	440	55	2850	—	255	39×460	"
Halostar 64435	Німеччина, Osram	100	12	3000	2200	1000	33×9,5	"
FEL (Ge Lamp)	США	1000	120	3200	27500	375	70×22	"

Таблиця 4. Вимірювальні приймачі випромінювання

Тип приймача	Країна, фірма	Матеріал чутливого шару	Спектральний діапазон, мкм	Чутливість	Розмір чутливої площадки, мм	Габаритні розміри, мм×мм
ФД-24К	Росія	Si	0,47–1,0	60 А/лк	∅10	6,5×19,6
S 1227	Японія, Hamamatsu	Si	0,19–1,0	0,12 А/Вт	10×10	17×17
S 2281	"	Si	0,19–1,1	0,5 А/Вт	∅10	25×10
Л16Si-8A4-R03M-Se	США, Judson technologies	Si, Ge "Sandwich"	0,4 –1,0 1,1–1,8	0,45 А/Вт 0,65 А/Вт	∅5 ∅3	—
G-050	США, EOS	Ge	1,0–1,8	0,9 А/Вт	10×10	17×17
РТН-10	Росія	Сур'мяна чернь	0,18–5,5	2 В/Вт	1,5×3	65×18
РТН-12	"	"	0,18	20 В/Вт	1,5×12	110×25
РТН-16	"	"	0,18	20 В/Вт	1×1	110×25
РТН-30	"	"	0,18	5,5 В/Вт	3×3	65×18

Таблиця 5. Монохроматори

Тип монохроматора	Країна, фірма	Спектральний діапазон, нм	Оптична система			Зворотна дисперсія, нм/мм	Точність установки довжини хвилі, нм	Ширина щілини, мм
			Схема	$f'_{об}, \text{мм}$	$D_{вт}/f_{об}$			
МДР-204	Росія	190–5000	Еберта Фасті	300	1/6	2,6	0,5	0–4
МДР-206	"	190–5000	—	180	1/4	4,3	0,5	0–4

Кінець табл. 5

Тип монохроматора	Країна, фірма	Спектральний діапазон, нм	Оптична система			Зворотна дисперсія, нм/мм	Точність установки довжини хвилі, нм	Ширина щілини, мм
			—	300	1/6			
МДР-40	Росія	200–25000	—	300	1/6	2,0	0,025	0–4
MS 2001	США	180–60000	Черні Тернер	200	1/3,6	4,2	0,12	0–2
MS 3501	”	180–60000	—	350	1/3,8	2,37	0,06	0–2
MS 750i	”	180–60000	—	750	1/8,9	0,9	0,015	0–2
MSDD 1000	”	180–60000	—	1000	1/5,9	0,78	0,012	0–2

Розглянемо дану методику стосовно багатоспектрального скануючого пристрою штучного супутника Землі Egipsat-1 [2].

Методика, зокрема, передбачає:

- попередній вибір елементів по спектральному діапазону, потужності джерел випромінювання та чутливості приймачів випромінювання;

- розрахунок втрат випромінювання в оптичному тракті вимірювальної схеми;

- розрахунок спектральних характеристик випромінювачів та визначення монохроматичного потоку, що потрапляє на вхід компаратора в заданому спектральному діапазоні;

- розрахунок корисних сигналів на виході компаратора, на кінцях та посередині спектрального діапазону.

Із врахуванням параметрів дифузного випромінювача установки (вихідний потік $\Phi_{\text{вих}} = 1200$ Вт; робочий спектральний діапазон $\Delta\lambda = 0,4\text{--}1,8$ мкм; діаметр вихідної зіниці $D_{\text{вих}} = 0,25$ м) [2], доцільно відібрати такі елементи:

- світловимірювальна лампа СИС 107-1500;
- галогенна лампа КГМ 30-300;
- стрічкова лампа СИРШ 2,5-200;
- вимірювальний фотодіод ФД-24К;
- неселективний термоелемент РТН-12.

Як оптичну систему було використано дзеркальний сферичний об'єктив із фокусною відстанню 1400 мм та відносним отвором 1:6 [10].

Результати енергетичного розрахунку подано в табл. 6. Вони дають змогу вибрати узгоджену пару джерело випромінювання–компаратор, яка забезпечує максимальний корисний сиг-

Таблиця 6. Порівняльна оцінка схем передачі одиниці СГЕЯ

Параметр	Випромінювач				
	ДВ (12 ламп КГМ 30-300)	СИРШ 8.5-200	СИС 107-1500	КГМ 30-300-2	ДВ (1 лампа СИП 107-1500)
Інтегральний потік на виході випромінювача Φ_i , Вт	144	22	300	100	6,5
Інтегральний коефіцієнт пропускання оптичного тракту τ_0	$1,4 \cdot 10^{-8}$	$1,4 \cdot 10^{-4}$	$3 \cdot 10^{-4}$	$1,4 \cdot 10^{-4}$	$1,4 \cdot 10^{-8}$
Монохроматичний потік на виході монохроматора Φ_λ , Вт/мкм	$5,5 \cdot 10^{-9}$	$8,5 \cdot 10^{-6}$	$7,1 \cdot 10^{-8}$	$1,4 \cdot 10^{-7}$	$9 \cdot 10^{-9}$
Сигнал на виході приймача випромінювання U_c , В	$2 \cdot 10^{-4}$	$7,3 \cdot 10^{-2}$	$6 \cdot 10^{-3}$	$1,2 \cdot 10^{-3}$	$7,4 \cdot 10^{-5}$
Порівняльна величина вихідного сигналу $U_0 = U_c / U_{c \text{ макс}}$, відн. од.	$2,7 \cdot 10^{-3}$	1,0	$8,2 \cdot 10^{-3}$	$1,6 \cdot 10^{-2}$	10^{-3}
Похибка передачі одиниці СГЕЯ δ	0,055–0,11	0,044–0,060	0,055–0,11	0,055–0,077	0,044–0,055

Кінець табл. 6

Параметр	Випромінювач				
	ДВ (12 ламп КГМ 30-300)	СИРШ 8.5-200	СИС 107-1500	КГМ 30-300-2	ДВ (1 лампа СИП 107-1500)
Порівняльна величина похибки передачі одиниці СГЕЯ* $\delta_0 = \delta/\delta_{\max}$, відн.од.	1,0	0,7	1,0	0,85	0,65
Коефіцієнт порівняння якості схеми передачі одиниці СГЕЯ $\xi = U_0/\delta_0$	$2,7 \cdot 10^{-3}$	1,4	$8,2 \cdot 10^{-3}$	$1,8 \cdot 10^{-2}$	$1,1 \cdot 10^{-4}$
Примітки	Випромінювач, що калібрується	Первинний еталон установки	Зразковий засіб вимірювання	Зразковий засіб вимірювання	Величина СГЕЯ визначається розрахунком

*Середнє значення.

нал у межах заданого спектрального діапазону і смуги пропускання монохроматора.

В основу метрологічного аналізу було покладено повірочні схеми Росії [11] та України ("Державна повірочна схема для засобів вимірювання спектральної густини енергетичної яскравості, в діапазоні довжин хвиль від 0,2 до 25 мкм" – проект). Узагальнена повірочна схема на основі вказаних документів показана в табл. 7 і дає загальне уявлення про послідовність та параметри передачі одиниці СГЕЯ від еталона до робочих засобів вимірювання. При аналізі було використано метрологічні характеристики елементів, які наведені в табл. 1–4. При розрахунках сумарної похибки передачі одиниці СГЕЯ окремі складові загальної похибки вважалися статистично незалежними, а довірчу ймовірність брали 0,95.

Результати аналізу наведені в табл. 6. Як узагальнений критерій порівняння було прийнято параметр ξ , що враховує: втрати випромінювання в оптичній системі для конкретної пари випромінювач–приймач, сигнал на виході спектрального компаратора, відносно похибки передачі одиниці СГЕЯ.

Як видно з табл. 7, кращі енергетичні та метрологічні характеристики забезпечують галогенні і стрічкові лампи розжарення. Однак останні в Україні не виробляються і є досить дефіцитними. Тому для вітчизняних розробників більш перспективними є галогенні лампи, велика номенклатура яких дозволяє розв'язати більшість фотометричних задач у видимій та ближній інфрачервоній областях спектра.

Таблиця 7. Узагальнена повірочна схема передачі одиниці СГЕЯ

Розряд носія одиниці СГЕЯ	Діапазон значень відтворюваної величини, Вт/ср·м ³ , мкм	Засіб вимірювання	Середньоквадратичне відхилення відтворюваної одиниці	Невиключена систематична похибка	Метод відтворення
Державний еталон	$4 \cdot 10^4 - 3 \cdot 10^{11}$ 0,2–2,5	Модель чорного тіла	$0,5 \cdot 10^{-2}$ $0,5 \cdot 10^{-2} - 2,5 \cdot 10^{-2}^*$	$1,5 \cdot 10^{-2}$ $0,2 \cdot 10^{-2} - 2 \cdot 10^{-2}^*$	Непрямі вимірювання, компаратор
Робочий еталон	$4 \cdot 10^4 - 3 \cdot 10^{11}$ 0,2–2,5	Модель чорного тіла, галогенні та стрічкові лампи	$2 \cdot 10^{-2} - 8 \cdot 10^{-2}$ $1,5 \cdot 10^{-2} - 8 \cdot 10^{-2}^*$	–	Непрямі вимірювання, компаратор
Робочі засоби вимірювання	$4 \cdot 10^4 - 10^{12}$ 0,2–2,5	Галогенні та стрічкові лампи	$6 \cdot 10^{-2} - 15 \cdot 10^{-2}$ $2 \cdot 10^{-2} - 11 \cdot 10^{-2}^*$	–	Компаратор, яскравоміри

*Згідно з ГОСТ 8.195–89.

Висновки

У статті розглянуто методи, схеми та доступну в Україні елементну базу, які забезпечують калібрування прецизійних випромінювачів середньої потужності у видимій та ближній інфрачервоній ділянках спектра для вимірювання енергетичних параметрів ЦВС, розроблено інженерну методику та рекомендації щодо раціонального вибору основних елементів

схем калібрування випромінювачів. Енергетичний та метрологічний аналіз схем установок для передачі одиниці СГЕЯ, виконаний авторами, дає можливість кількісно оцінити параметри калібрування випромінювачів на початковій стадії розробки.

Отримані результати можуть використовуватись широким колом розробників прецизійного фотометричного обладнання

Л.А. Михеєнко, В.І. Микитенко

МЕТОДЫ, СРЕДСТВА И МЕТРОЛОГИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ КАЛИБРОВКИ ЭТАЛОННЫХ ИЗЛУЧАТЕЛЕЙ

Рассмотрены методы и средства калибровки излучателей для прецизионного фотометрического оборудования. Разработаны инженерная методика и рекомендации по выбору основных элементов.

L.A. Mikheenko, V.I. Mykytenko

THE APPROACHES, MEANS AND METROLOGICAL ASSURANCE OF CALIBRATION OF THE STANDARD RADIATORS

We consider the approaches and means of calibration of the standard radiators for precision photometric equipment. Moreover, we develop the engineering approaches and recommendations on choosing the primary elements of the equipment.

1. *Купко А.Д., Назаренко Л.А.* Метрологическое обеспечение световых измерений в Украине // Светотехника. – 2001. – № 5. – С. 38–40.
2. *Вариченко Л.В., Колобродов В.Г., Ладыка Я.Е., Микитенко В.И., Михеєнко Л.А.* Методы и средства измерения энергетических характеристик оптико-электронных систем космического зондирования Земли // Космічна наука і технологія. – 2006. – 12, № 2/3. – С. 59–69.
3. *Колобродов В.Г., Микитенко В.І., Михеєнко Л.А., Петрущенко Л.А.* Теорія дифузного випромінювача на основі інтегруючої сфери // Наукові вісті НТУУ “КПІ”. – 2005. – № 4. – С. 106–114.
4. *ГОСТ 10771–88.* Лампы накаливания светоизмерительные рабочие. Технические условия.
5. *Лампы накаливания галогенные* // Электротехника СССР. – Информэлектро, 1988.
6. *Ильин Л.С.* Термоэлектрические приемники оптического излучения с пленочными и проволочными термопарами для прецизионных измерений // Метрология. – 2005. – № 11. – С. 19–30.
7. *Кувалдин Э.В., Борисов В.А.* Основные характеристики и методы испытаний измерительных фотодиодов // Импульсная фотометрия. – Л.: Машиностроение, 1984. – Вып. 8. – С. 71–81.
8. *Выставочный материал.* Монохроматоры.
9. <http://solartii.com>
10. *Гайворонська Г.О., Михеєнко Л.А., Сокурєнко В.М.* Оптична система установки для передачі одиниць фотометричних величин // Вісник НТУУ “КПІ”. Сер. Приладобудування. – 2007. – Вип. 33. – С. 29–36.
11. *ГОСТ 8.195–89.* Государственная поверочная схема для средств измерения спектральной плотности силы излучения и спектральной плотности энергетической освещенности в диапазоне длин волн 0,2–2,5 мкм.

Рекомендована Радою приладобудівного факультету НТУУ “КПІ”

Надійшла до редакції
29 вересня 2008 року

УДК 579.8:582.284

І.Р. Ключак, Н.А. Бісько, Н.Л. Поєдинок,
Л.О. Антоненко**ЗАКОНОМІРНОСТІ РОСТУ ПЕРСПЕКТИВНИХ ОБ'ЄКТІВ БІОТЕХНОЛОГІЇ – БАЗИДИОМІЦЕТІВ РОДУ *CORIOLUS* У ПОВЕРХНЕВІЙ КУЛЬТУРІ****Вступ**

Базидіальні гриби роду *Coriolus* належать до неїстівних афілофоральних грибів і є досить поширеними, добре відомими з багатотривалою історією використання у східній медицині. В народній медицині Японії *Coriolus versicolor* (коріол різнобарвний) відомий під назвою *Kawaratake*, а в Китаї – *Yunzhi* [1] і застосовується у вигляді водних екстрактів як протизапальний засіб при захворюваннях печінки, верхніх дихальних шляхів, травного тракту та сечового міхура. *Coriolus hirsutus* (коріол жорстковолосяний) корисний при захворюваннях легень, для заспокоєння кашлю, зняття жару, прискорення регенерації тканин м'язів [2]. Досвід східної народної медицини, зокрема Японії і Китаю, став стимулом для сучасних наукових пошуків у галузі розробки засобів одержання фармакологічних препаратів культивуванням деяких видів лікарських грибів роду *Coriolus* [3]. Найкраще в клінічних умовах вивчено препарат японської біотехнологічної фірми “Sankyo” крестин, діючою основою якого є імуномодулюючі протеїнівмісні полісахариди гриба *Coriolus versicolor*. Цей та інші препарати полісахаридної природи з коріолу різнобарвного широко використовуються в онкології при лікуванні раку шлунку, стравоходу, прямої кишки, яєчників, матки, простати в поєднанні з хіміо- або радіотерапією [4]. У Росії розроблено і запатентовано біологічно активну добавку “Трамелан” на основі сухої біомаси базидіомицету *Coriolus pubescens* (Schum. ex Fr.) Quel (*Trametes pubescens* (Schum.) Pilat). За результатами деяких досліджень, траметес опушений має протипухлинну та імунізуючу дію, що за ефективністю переважає коріолус різнобарвний [5].

Отже, базидіальні гриби роду *Coriolus* мають широкий спектр лікарських властивостей, серед яких – антивірусна, антибактеріальна, гепатопротекторна, імуномодулююча та протипухлинна [3]. Крім того, вони характеризуються висо-

кими показниками росту і відсутністю токсичності [6]. З огляду на це, дослідження біологічних властивостей і закономірностей росту штамів *Coriolus sp.* створює наукові передумови для їх подальшого використання у вітчизняній біотехнології.

Однією з важливих біологічних характеристик грибів у культурі, а також вагомою таксономічною ознакою є морфологічна характеристика і ріст колонії на еталонних агаризованих середовищах. За цими ознаками визначається сприятливе середовище для культивування грибів. Зазначимо також, що одним із важливих критеріїв відбору штамів, перспективних для розробки біотехнології, є швидкість росту вегетативного міцелію.

На даний час швидкість росту вегетативного міцелію і культурально-морфологічні характеристики штамів *Coriolus sp.* на агаризованих поживних середовищах різного складу досліджено недостатньо.

Постановка задачі

Метою статті було дослідження впливу складу агаризованих поживних середовищ на швидкість росту міцелію і культурально-морфологічні характеристики базидіомицетів *Coriolus sp.*

Матеріали і методи дослідження

Об'єктами дослідження стали п'ять видів (31 штам) роду *Coriolus* Quel (*Trametes* Fr.), які зберігаються в Колекції шапинкових грибів Інституту ботаніки ім. М.Г. Холодного НАН України [7], а саме: 1) *C. zonatus* (Fr.) Quel (*Trametes ochracea* (Pers.) Gilbe&Ryvarden, 1897) 301, 1525, 1561, 1570, 5021, 5022, 5133, 5134, 5135, 5300, 5301, 5302, 5303; 2) *C. versicolor* (L.: Fr.) Quel (*T. versicolor* (L.) Lloyd, 1921) 353, 1689, 5094, 5095, 5129, 5131, 5299; 3) *C. hirsutus* (Fr.) Quel (*T. hirsuta* (Wulfen) Pilat, 1939) 338, 358, 359, 1569, 5018, 5019, 5137; 4) *C. pubescens* (Schum.: Fr.) Quel (*T. pubescens* (Schum.) Pilat, 1939) 322; 5) *C. villosus* (Fr.) M.Bond et S.Herrera (*T. villosa* (Sw.) Kreisel, 1971) 1009; *C. sp.* 1004, 1567. Слід зазначити, що відповідно до міжнародної бази систематики грибів CABI Bioscience і бази даних CBS Database of Fungal Names (<http://www.indexfungorum.org>) всі описані в статті види віднесені до роду *Trametes* Fr., тому в дужках вказані назви штамів за базою даних CBS Database of Fungal Names. У статті ж використано назву штамів, яку вони мають у Колекції Інституту ботаніки.

Динаміка росту і морфологія колоній досліджувалась на чотирьох агаризованих середовищах: сусло-агаризованому середовищі 8° за Баллінгом (СА), картопляно-глюкозному агаризованому середовищі (КГА), синтетичному середовищі Норкранс (СН), сусло-агаризованому середовищі з відваром дубової кори (СА + дуб) при температурі $28 \pm 1^\circ\text{C}$. Всі середовища готувались за загальноприйнятими методиками [8]. Як інокулюм використовувались 7-добові культури, вирощені на СА. Агарові диски з міцелієм гриба ($d = 5\text{ мм}$), вирізані стерильним свердлом по краю активно ростучої колонії, переносились у центр чашки Петрі ($d = 90\text{ мм}$) та інкубувались у термостаті при 28°C . Культури грибів вирощувались протягом 20 днів. Радіуси колоній вимірювались у чотирьох взаємно перпендикулярних напрямках щодобово, починаючи з третьої доби після посіву до повного обростання чашки. За одержаними даними розраховувалась лінійна швидкість радіального росту культур (V_r) [9] (для полегшення сприйняття надалі – швидкість росту).

Статистична обробка даних виконувалась з використанням програми Microsoft Excel.

Культурально-морфологічні ознаки штамів вивчались за Стальперсом [10]. На кожному середовищі в процесі росту описувались забарвлення, текстура, щільність, край та реверзум колонії [8].

Результати і їх обговорення

Вивчення культурально-морфологічних особливостей міцеліальних колоній на різних по-

живних середовищах дає можливість ідентифікувати грибні культури у вегетативній стадії розвитку, підтримувати штами в належному фізіологічному стані та запобігти витісненню штамів сторонньою мікрофлорою, наприклад, у процесі вирощування, що свідчить про сприятливі умови культивування.

При виборі поживних середовищ для дослідження ми керувались тим, що середовища СА, КГА, СН, СА + дуб використовуються при культивуванні базидіальних грибів. Крім того, більшість вітчизняних мікологів [8] використовують СА як стандартне середовище для вивчення культурально-морфологічних ознак вищих базидіальних грибів.

У працях А.С. Бухало [11] було визначено, що додавання до складу поживних середовищ дріжджів, екстрактів і відварів вищих рослин, зокрема дубової кори та зеленої маси конюшини, у концентрації 2–10% стимулювало значною мірою ріст лігнотрофних видів, до яких належать і гриби *Coriolus*.

З літератури відомо, що у грибів роду *Coriolus* в умовах росту на різних агаризованих середовищах виявлено характерні типи колоній міцелію: для *C. versicolor* – ватну і повстяну [12]; для *C. pubescens* – пухнасту, бавовняно-шерстисту, повстяну і шкірясту [13]. Отримані нами дані щодо культурально-морфологічних ознак колоній грибів роду *Coriolus* на поживних середовищах різного складу наведено в табл. 1.

Таблиця 1. Морфологічна характеристика колоній досліджених видів на агаризованих середовищах різного складу

Вид	Морфологічна характеристика колоній на середовищах			
	СА	СА + дуб	КГА	СН
<i>C. zonatus</i>	Колонії борошністо-повстяні, зональні, щільні або середньої щільності, в молодому віці білі, з часом світло-кремові, край рівний, притиснутий до субстрату, реверзум незмінний, за 14 діб колонії на поверхні утворюють шкірясту плівку, що легко відділяється від агару	Колонії борошністо-повстяні, в центрі з коротким сплутаним міцелієм, зональні з концентричними колами різної щільності, з часом утворюють шкірясту плівку. У молодому віці колонії білі, з часом – жовто-кремові, край рівний, притиснутий до субстрату, на поверхні численні склероції та краплі ексудату, реверзум незмінний	Колонії борошністо-повстяні, щільні, в центрі міцелій тонший, зональні, білі, з часом світло-кремові, кремово-жовті або лимонно-жовті, край рівний, притиснутий до субстрату, реверзум незмінний, за 14 діб колонії на поверхні утворюють шкірясту плівку, що легко відділяється від агару	Колонії борошністо-повстяні, прозорі, зональні, білі, при старінні кремового кольору, з часом утворюють шкірясту плівку, реверзум незмінний

Кінець табл. 1

Вид	Морфологічна характеристика колоній на середовищах			
	СА	СА + дуб	КГА	СН
<i>C. versicolor</i>	Колонії шовковисто-пухнасті, потім повстяні, середньої щільності, в молодому віці білі, з часом світло-кремові, край рівний, притиснутий до субстрату, реверзум незмінний	Колонії шовковисто-пухнасті, потім повстяні, зональні, щільні, білі, з часом кремові, край рівний, притиснутий до субстрату, реверзум незмінний	Колонії повстяні, щільні, білі, з часом кремові або жовто-кремові, на поверхні численні склероції, край рівний, притиснутий до субстрату, реверзум незмінний	Колонії пухнасті, зональні, середньої щільності, білі, з часом кремові, край рівний, притиснутий до субстрату, на поверхні колонії краплі ексудату, реверзум коричневого кольору
<i>C. hirsutus</i>	Колонії пластівцевоподібні, з невеликими гіфальними пучками, які підіймаються з агару або повітряного міцелю, з вираженою секторністю, середньої щільності, в молодому віці білі, при старінні жовтувато-кремові, край нерівний, притиснутий до субстрату, реверзум незмінний, за 7 діб колонія утворює на поверхні міцну шкірясту плівку	Колонії пластівцевоподібні, в центрі з коротким сплутаним повітряним міцелієм, зональні, з вираженою секторністю, середньої щільності або прозорі, білі, з часом жовто-кремові, склероції поодинокі, край нерівний, притиснутий до субстрату, реверзум незмінний, за 7 діб колонія утворює на поверхні міцну шкірясту плівку	Колонії пластівцевоподібні, в центрі пухнасті, зональні, з сегментами різної щільності, з радіальними пучками гіф (як промені), білі, з часом кремові або жовто-кремові, край нерівний, притиснутий до субстрату, реверзум незмінний, за 7 діб колонія утворює на поверхні міцну шкірясту плівку	Колонії повстяні, прозорі, з часом утворюють шкірясту плівку, білі, з часом жовто-кремового кольору, край нерівний, притиснутий до субстрату, реверзум незмінний
<i>C. pubescens</i>	Колонії пухнасті, бархатисті, потім повстяні з концентричними колами, з часом утворюють шкірясту плівку, на поверхні численні склероції, колонії середньої щільності, у молодому віці білі, при старінні жовтуватого або кремового відтінку, край рівний, притиснутий до субстрату, реверзум незмінний, з часом біліе	Колонії пухнасті, бархатисті, потім повстяні з концентричними колами, з часом утворюють шкірясту плівку, колонії середньої щільності, білі, при старінні жовтуватого або кремового відтінку, край рівний, притиснутий до субстрату, реверзум незмінний, з часом біліе	Колонії пухнасті, бархатисті, потім повстяні з концентричними колами, з часом утворюють шкірясту плівку, колонії щільні, в молодому віці білі, з часом кремового кольору, край рівний, притиснутий до субстрату, реверзум незмінний	Колонії пухнасті, потім повстяні, з часом утворюють шкірясту плівку, білі, з часом кремові, середньої щільності, край рівний, притиснутий до субстрату, реверзум незмінний
<i>C. villosus</i>	Колонії борошнисто-повстяні, середньої щільності, в молодому віці білі, з часом кремові, край рівний, притиснутий до субстрату, реверзум незмінний	Колонії борошнисто-повстяні, середньої щільності, білі, при старінні кремового кольору, край рівний, притиснутий до субстрату, реверзум незмінний	Колонії борошнисто-повстяні, прозорі, в молодому віці білі, з часом кремові, край рівний, притиснутий до субстрату, реверзум незмінний	Колонії борошнисто-повстяні, прозорі, в молодому віці білі, з часом кремові, край рівний, притиснутий до субстрату, реверзум незмінний

Якщо проаналізувати характеристики міцеліальних колоній, наведені у табл. 1, то можна дійти висновку, що в процесі культивування на досліджуваних середовищах утворювались такі основні морфологічні типи колоній: борошнисто-повстяні (рис. 1, 1), зональні; шовковисто-пухнасті (рис. 1, 2), з часом повстяні; пластівцево-

подібні, з невеликими гіфальними пучками, які підіймаються з агару або повітряного міцелю, з вираженою секторністю (рис. 1, 3); пухнасті, бархатисті, з часом повстяні (рис. 1, 4).

Зазначимо, що для деяких досліджених видів були характерні змішані типи колоній. Так, гриби виду *C. versicolor* на СА і СА + дуб утво-



Рис. 1. Типи колоній культур роду *Coriolius* (температура 28°C, сусло-агаризоване середовище): 1 – борошністо-повстяні (*C. zonatus* 5300); 2 – шовковисто-пухнасті (*C. versicolor* 5129); 3 – пластівцевоподібні (*C. hirsutus* 358); 4 – бархатисті (*C. pubescens* 322)

ривали колонії змішаного типу – шовковисто-пухнасті, які з часом ставали повстяними. Незалежно від складу середовища у видів *C. zonatus* і *C. villosus* домінував борошністо-повстяний змішаний тип міцеліальних колоній. Взагалі повстяний тип колонії зустрічався в більшості досліджених видів. Наприклад, колонії *C. versicolor* і *C. pubescens* з часом набували повстяного типу колонії, а в *C. zonatus* і *C. villosus* цей тип колонії, як зазначалось вище, був змішаний з іншими. Характерною особливістю видів *C. zonatus*, *C. hirsutus*, *C. pubescens*, на відміну від *C. versicolor* і *C. villosus*, було утворення на поверхні колонії з віком шкірястої плівки, що ускладнювала пересів культур. Встановлено, що таку плівку колонії *C. hirsutus* утворювали за 7 діб, *C. zonatus* – за 14 діб, а *C. pubescens* – за 20 діб.

Як правило, колонії досліджених видів були білими, проте з часом більшість із них набувала іншого кольору або відтінку. Зміни в забарвленні колоній різних штамів мали такий вигляд: поява кремового кольору навколо інокулюма, концентричних жовтих чи світло-кремових кіл, рівномірного жовтого кольору, світло-кремового, кремового чи лимонно-жовтого відтінку. Лише на синтетичному середовищі СН колонії двох штамів *C. zonatus*, одного штаму *C. versicolor*, чотирьох штамів *C. hirsutus*, одного штаму *C. villosus* залишалися білими.

Середовища СА і КГА сприяли утворенню найбільш щільних колоній з добре розвиненим повітряним міцелієм у *C. zonatus*, *C. pubescens* і

C. versicolor, а середовище СА + дуб – у *C. versicolor*. На синтетичному середовищі СН у всіх досліджених видів, крім *C. versicolor*, формувались розріджені колонії.

Таким чином, варіабельність морфологічних характеристик колоній на середовищах різного складу проявлялась переважно на середовищі СН у вигляді зміни щільності колонії всіх досліджених видів, забарвлення реверзую колоній *C. versicolor* у коричневий колір та утворення змішаних типів колоній.

Один із найдосвідченіших дослідників у галузі вивчення культур вищих базидіоміцетів М. Ноблз вважає, що ізоляти одного й того ж виду можуть значно відрізнятися за кольором і текстурою колоній, а більш постійними ознаками є швидкість росту, відношення до температури та мікроскопічні особливості гіфальної системи [8]. Тому швидкість росту вегетативного міцелію поряд із здатністю до біосинтезу тих чи інших біологічно активних метаболітів є одним із важливих критеріїв відбору штамів для розробки нових грибних біотехнологій.

За даними літератури, на швидкість росту істотно впливають склад поживного середовища та температура інкубації [9, 14, 15].

Статистично достовірні значення швидкості росту колоній грибів *Coriolius* на різних агаризованих середовищах наведено в табл. 2.

Аналіз таблиці свідчить про те, що швидкість росту переважної більшості культур – 55% (17 штамів) від загальної кількості досліджених штамів грибів *Coriolius* – залежала від складу середовища. Для решти культур (45%, 14 штамів) значення швидкості росту були однаковими на двох або трьох середовищах. Зауважимо, що ми не виявили залежності між видовою приналежністю культур роду *Coriolius* і середовищами, які не впливали на швидкість росту. Наведемо приклад: штам *C. zonatus* 301 однаково ріс на середовищах СА, СА + дуб, СН, штам 5134 – на СА і КГА, штам 5303 – на КГА і СН. Таким чином, можна зробити висновок, що в даному випадку саме особливості штамів досліджених грибів визначали залежність швидкості росту від складу середовища.

Співробітники відділу мікології Інституту ботаніки ім. М.Г. Холодного НАН України Е.Ф. Солонко та М.Л. Ломберг [16], дослідивши 52 види (147 штамів) відділу *Basidiomycota*, повідомили, що на швидкість росту базидіальних грибів впливають як склад поживного середовища, так і температура інкубації. За результатами наших досліджень, ця тенденція характерна і для роду *Coriolius* [15].

Таблиця 2. Швидкість росту вегетативного міцелію *Coriolus* при 28 °С

Вид, штам	Швидкість росту V_r , мм/добу, в середовищі			
	СА	СА + дуб	КГА	СН
<i>C. zonatus</i>				
301	6,3±0,2	6,5±0,4	7,2±0,3	6,8±0,4
1525	6,3±0,4	8,7±0,4	8,3±0,3	7,3±0,4
1561	7,3±0,2	10,5±0,4	8,0±0,3	7,5±0,4
1570	7,5±0,2	9,0±0	9,5±0,4	7,0±0,4
5021	4,3±0,2	8,5±0,1	8,0±0,1	6,3±0,1
5022	8,0±0,4	7,5±0,1	6,0±0,1	6,7±0,1
5133	6,6±0,2	9,5±0,1	7,8±0,1	8,6±0,3
5134	7,0±0,2	9,5±0,3	7,3±0,4	8,9±0,4
5135	5,8±0,3	9,5±0,3	6,4±0,2	8,1±0,3
5300	3,9±0,2	4,8±0,4	8,0±0,3	7,7±0,3
5301	4,7±0,2	4,7±0,3	7,8±0,3	8,5±0,3
5302	7,1±0,2	9,5±0,1	8,0±0,3	7,0±0,3
5303	4,7±0,4	7,3±0,1	7,7±0,1	7,8±0,3
<i>C. versicolor</i>				
353	8,0±0,1	8,5±0,4	10,3±0,2	11,5±0,4
1689	9,0±0,3	8,0±0,2	9,8±0	10,5±0,3
5094	10,6±0,2	8,0±0,2	10,5±0,3	10±0,3
5095	15,0±0,1	6,5±0,1	11,5±0,2	10±0,2
5129	8,5±0,2	8,0±0,3	11,0±0	10±0,3
5131	11,5±0,2	7,3±0,3	9,6±0,2	10,6±0,3
5299	11,0±0,2	7,5±0,2	10±0,3	9,7±0,3
<i>C. hirsutus</i>				
338	6,4±0,3	9,0±0,1	6,0±0	6,1±0,3
358	6,5±0,3	5,8±0,1	5,8±0	5,7±0,3
359	3,3±0,2	5,8±0,2	7,2±0	6,3±0,4
1569	4,0±0,3	5,5±0,3	6,8±0,3	7,4±0,3
5018	5,8±0,4	8,7±0,3	6,1±0,2	7,3±0
5019	7,0±0,4	6,0±0,3	6,8±0,2	6,2±0,3
5137	8,0±0,4	5,0±0,3	5,2±0,3	6,1±0,3
<i>C. pubescens</i> 322	2,7±0,3	3,4±0,3	3,9±0,2	5,5±0,3
<i>C. villosus</i> 1009	5,4±0,2	7,9±0,3	6,7±0,3	3,0±0,3
<i>C. sp.</i> 1004	5,7±0,2	3,2±0,3	8,5±0,2	7,3±0,3
<i>C. sp.</i> 1567	6,5±0,2	7,0±0,3	7,3±0,3	5,6±0,4

Для вибору найбільш сприятливого середовища для культивування досліджених культур не-

обхідно визначитись з тим, які середовища забезпечують максимально високу швидкість росту міцелію. Тому досліджені культури *Coriolus* було розподілено за максимальною швидкістю росту на агаризованих середовищах, що показано на рис. 2. За цією діаграмою найбільший відсоток культур (32%) з максимальною швидкістю росту ($V_r \geq 8,5$ мм/добу) відзначено на СА + дуб.

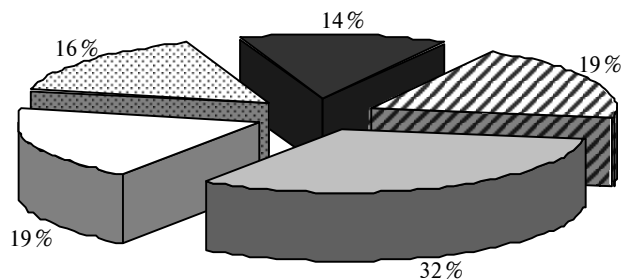


Рис. 2. Розподіл досліджених штамів за максимальною швидкістю росту на агаризованих середовищах (відсоток від загального числа досліджених культур *Coriolus*): ▨ – СА; ▩ – СА + дуб; □ – КГА; ▤ – СН; ■ – на двох середовищах

Зазначимо, що основний вклад у вказаний вище відсоток належить культурам *C. zonatus*, оскільки для семи з тринадцяти штамів найбільша швидкість росту була відзначена на середовищі СА + дуб (рис. 3).

Культури з найбільшою швидкістю росту на середовищах СА і КГА становили 19%, на СН – трохи менше (16%).

Середовище СА, яке вітчизняні дослідники широко застосовують як універсальне середовище для зберігання грибних культур у колекції, в наших дослідженнях забезпечувало широкий діапазон варіювання швидкості росту в межах одного виду. Наприклад, для *C. zonatus* ці межі становили 3,9–8,0 мм/добу, *C. hirsutus* – 3,3–8,0 мм/добу, *C. versicolor* – 8,0–15,0 мм/добу. У зв'язку з цим необхідно відзначити штам *C. versicolor* 5095, який характеризувався найбільшою серед 31 дослідженої культури швидкістю 15,0 мм/добу (див. табл. 2). Крім цього штаму, на СА було зареєстровано максимально активний ріст ще сімох культур: *C. versicolor* 5094, 5131, 5299 ($V_r \geq 10,6$ мм/добу), *C. hirsutus* 358, 5019, 5137 ($V_r \geq 6,5$ мм/добу), *C. zonatus* 5022 ($V_r = 8,0$ мм/добу). Водночас це середовище забезпечувало мінімальний ріст для культури *C. pubescens* 322 ($V_r = 2,7$ мм/добу), воно виявилось несприятливим для даного штаму.

Що стосується широкого діапазону варіювання значень швидкості росту, то, як відзначала О.С. Горшина [14], досліджуючи види *C. pubescens*, *C. hirsutus*, незважаючи на те що швид-

кість росту в базидіальних грибів є ознакою виду, існує значна різниця між штамми за цим показником.

Підвищення швидкості росту міцелію на середовищі СА + дуб, на нашу думку, пов'язано з відповідними чинниками. Дубова кора, відповідно до електронного ресурсу <http://www.fito.npov.ru>, містить 10–20% дубильних речовин пірогаллової групи, галову і елагову кислоти, велику кількість катехіну, пентозани (до 13–14%), пектини (до 6%), флавоноїди (кверцитин, кверцит та ін.), крохмаль і флорафен. Як правило, здатність вищих базидіоміцетів до деградації високомолекулярних субстратів за допомогою позаклітинних ферментних систем, що містять разом із целулазами активні оксидоредуктази, зберігається і в умовах культури. Крім того, дубильні речовини і галова кислота можуть бути індуктором екстрацелюлярних фенолоксидаз, що допомагають завоювати також речовини фенольної природи, зокрема катехін.

Проте в наших дослідженнях підвищення швидкості росту на середовищі СА + дуб порівняно з СА спостерігалось не для всіх досліджених видів грибів *Corioliolus*. Так, стимуляція росту спостерігалась для грибів *C. zonatus*, крім штамів 5022, 5301 (див. рис. 3); для *C. hirsutus*, крім штамів 358, 5019, 5137; для *C. villosus*, *C. pubescens* і *C.sp.1567* (див. табл. 2). І навпаки, для виду *C. versicolor* відзначено зменшення швидкості росту з 8,0–15,0 мм/добу (СА) до 6,5–8,5 мм/добу (СА + дуб). Отже, додавання відвару дубової ко-

ри мало видові відмінності у впливі на динаміку росту міцелію. Це можна було б пояснити, дослідивши ферментативну активність.

Порівнюючи комплексне середовище КГА і синтетичне СН, відзначимо, що вони забезпечували значення швидкості в однакових межах для кожного виду, наприклад: для *C. versicolor* діапазон становив 9,6–11,5 мм/добу, для *C. zonatus* – 6,0–9,5 мм/добу, для *C. hirsutus* – 5,2–7,4 мм/добу. При цьому середовище КГА забезпечувало найбільшу швидкість росту таких культур: *C. versicolor* 5094, 5095, 5129 ($V_r \geq 11,0$ мм/добу), *C. zonatus* 1570, 5300, 5303 ($V_r \geq 7,8$ мм/добу), *C. hirsutus* 359, 5019 ($V_r \geq 6,8$ мм/добу), *C. sp.* 1004 ($V_r = 8,5$ мм/добу), 1567 ($V_r = 7,3$ мм/добу) (рис. 4).

На синтетичному середовищі СН максимальною була швидкість росту 16% усіх досліджених культур, зокрема ряду штамів *C. versicolor* (353, 1689), *C. zonatus* (5301, 5303), *C. hirsutus* 1569, *C. pubescens* 322 (рис. 5). Останній штам лише на середовищі СН проявив свою найбільшу швидкість, яка становила 5,5 мм/добу, а взагалі в наших дослідженнях цей штам відзначився як повільно ростучий на натуральному середовищі СА і комплексних середовищах СА + дуб, КГА. Зауважимо, що наприклад в дослідженнях О.С. Горшиної використовувався штам *C. pubescens* з її власної колекції, для якого характерною була швидкість росту 20 мм/добу на СА [14]. Отже, навіть цей факт підтверджує думку про те, що між штамми одного виду існує різниця за показником швидкості росту.

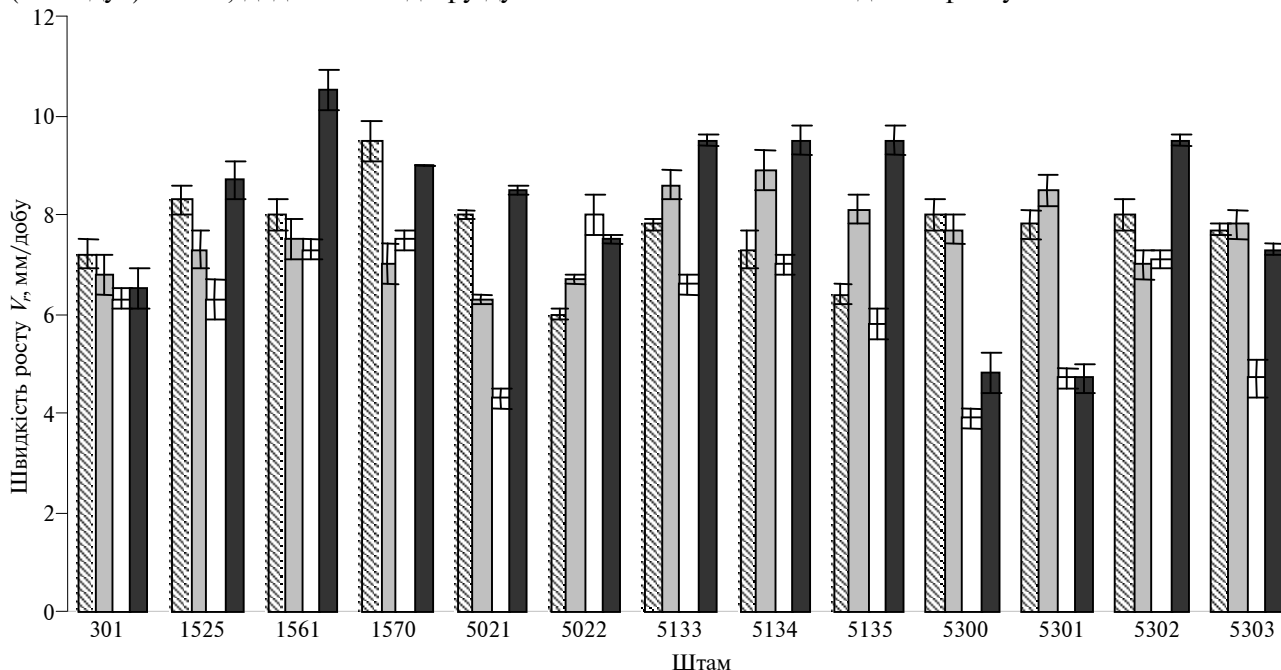


Рис. 3. Швидкість росту *C. zonatus* на агаризованих середовищах: ▨ – КГА; □ – СН; □ – СА; ■ – СА + дубова кора

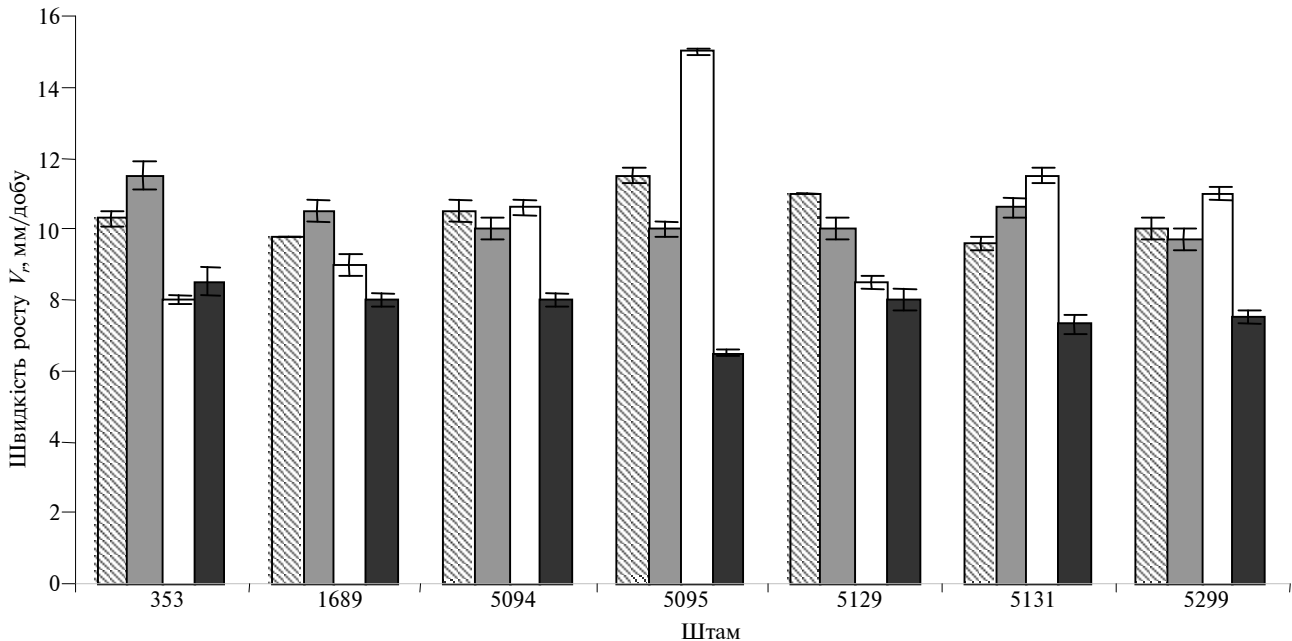


Рис. 4. Швидкість росту *C. versicolor* на агаризованих середовищах: ▨ – КГА; ▩ – СН; □ – СА; ■ – СА + дубова кора

Таким чином, якщо види досліджених базидіоміцетів роду *Coriolus* розташувати від повільноростучих до швидкоростучих на КГА і СН в порядку збільшення швидкості росту міцелію, то отримуємо такий ряд: *C. pubescens* ($V_r = 3,9–5,5$ мм/добу) < *C. hirsutus* ($V_r = 5,2–7,4$ мм/добу) < *C. zonatus* ($V_r = 6,0–9,5$ мм/добу) < *C. versicolor* ($V_r = 9,6–11,5$ мм/добу). Цей ряд дасть нам уявлення про загальну тенденцію зміни швидкості росту для культур одного виду і різних видів.

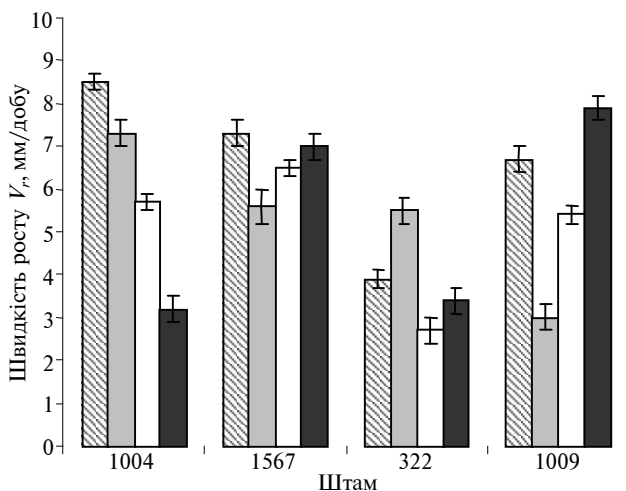


Рис. 5. Швидкість росту штамів *C. sp.* 1004, 1567, *C. pubescens* 322 і *C. villosus* 1009 на агаризованих середовищах: ▨ – КГА; ▩ – СН; □ – СА; ■ – СА + дубова кора

Висновки

Зміна морфологічних характеристик колоній на синтетичному середовищі Норкранс полягала у зменшенні щільності колоній всіх досліджених видів, забарвленні реверзumu колоній *C. versicolor* у коричневий колір та утворенні змішаних типів колоній.

Максимальна швидкість росту вегетативного міцелію 55% від загальної кількості досліджених культур *Coriolus sp.* залежала як від складу поживного середовища, так і від штамових особливостей культур.

Оптимальними середовищами, які забезпечують максимальну швидкість росту грибів роду *Coriolus*, можна вважати три досліджених агаризованих середовища: картопляно-глюкозне, синтетичний Норкранс та сусло-агар з відваром дубової кори.

Перспективними за показником швидкості росту вегетативного міцелію є культури *C. versicolor* 353, 5095, 5129, *C. zonatus* 1570, 5300, *C. hirsutus* 359, 5019.

Подальші дослідження будуть спрямовані на вивчення впливу температури інкубації на швидкість росту грибів *Coriolus* з метою підбору сприятливого температурного режиму для розробки нових біотехнологій.

Автори висловлюють щире подяку професору, доктору біологічних наук А.С. Бухало за надання культур роду *Coriolus* для проведення досліджень.

Дослідження проводилися в рамках гранту Фонду фундаментальних досліджень МОН Ук-

раїни за темою “Закономірності росту базидіальних грибів в глибинній та поверхневій культурі”.

И.Р. Клечак, Н.А. Бисько, Н.Л. Поединок,
Л.А. Антоненко

ЗАКОНОМЕРНОСТИ РОСТА ПЕРСПЕКТИВНЫХ
ОБЪЕКТОВ БИОТЕХНОЛОГИИ – БАЗИДИОМИ-
ЦЕТОВ РОДА *CORIOLUS* В ПОВЕРХНОСТНОЙ
КУЛЬТУРЕ

Проведены исследования влияния состава питательной среды на культурально-морфологические характеристики и скорость роста вегетативного мицелия 31 штамма грибов *Coriolus*. Показано, что скорость роста зависела как от состава питательной среды, так и от штаммовых особенностей культур. Установлены оптимальные для культивирования грибов рода *Coriolus* агаризованные среды: картофельно-глюкозная, синтетический Норкранс и сусло-агар с отваром дубовой коры.

I.R. Klechak, N.A. Bisko, N.L. Poyedinok,
L.O. Antonenko

THE GROWTH MECHANISMS OF THE PROMI-
SING RESEARCH SUBJECTS OF BIOTECHNOLO-
GY – BASIDIOMYCETES MUSHROOMS OF THE
GENUS *CORIOLUS* ON AGAR MEDIUMS

This paper presents the research of the influence of a nutrition medium composition on the cultural-morphological properties and the growth rate of vegetative mycelia of 31 strains of mushrooms of the genus *Coriolus*. We validate our approach with the experiments, showing that the growth rate depends not only on the nutrition medium composition, but also on the strain features of cultures. Specifically, we determine the optimum agar mediums, notably potato-glucose, synthetic Norkrans and malt-agar with a decoction of oak bark for cultivation of mushrooms of the genus *Coriolus*.

1. *Stamets P.* Growing Gourmet and Medicinal Mushroom. – Berkeley Toronto: Ten Speed Press, 2000. – 574 p.
2. *Денисова Н.П.* Лечебные свойства грибов. Этномикологический очерк. – СПб.: СПбГМУ, 1998. – 60 с.
3. *Бухало А.С., Соломко Е.Ф., Митропольська Н.Ю.* Базидіальні макроміцети з лікарськими властивостями // Укр. ботаніч. журн. – 1996. – № 53(3). – С. 192–201.
4. *Горшина Е.С.* Биотехнологические препараты лекарственных грибов рода *Trametes* // Усп. мед. микологии / Под общ. ред. Ю.В. Сергеева. – М.: Нац. академия микологии, 2005. – Т. V. – С. 246–249.
5. *Горшина Е.С., Скворцова М.М.* Трамелан – отечественная биологически активная добавка на основе сухой биомассы лекарственного базидиомицета *Trametes pubescens* (*Schumacher*) и другие препараты грибов рода *Trametes* (*Coriolus*) // Там же. – С. 262–266.
6. *Горшина Е.С.* Морфологические и физиолого-биохимические особенности грибов рода *Coriolus*, продуцентов биологически активных веществ // Совр. микология в России. Первый съезд микологов России: Тез. докл. – М.: Нац. академия микологии, 2002. – С. 253–254.
7. *Каталог культур шапинкових грибів (ІВК) / А.С. Бухало, Н.Ю. Митропольська.* – К.: Ін-т ботаніки ім. М.Г. Холодного НАН України, 2001. – 40 с.
8. *Высшие съедобные базидиомицеты в поверхностной и глубинной культуре / Н.А. Бисько, А.С. Бухало, С.П. Вассер и др.* – К.: Наук. думка, 1983. – 312 с.
9. *Соломко Е.Ф., Ломберг М.Л., Митропольська Н.Ю., Чоловська О.В.* Ріст окремих видів лікарських макроміце-тів на поживних середовищах різного складу // Укр. ботаніч. журн. – 2000. – 57, № 2. – С. 119–126.
10. *Stalpers J.H.* Identification of wood-inhabiting *Aphylllophorales* in pure culture // Stud. Mycol. – 1978. – N 16. – 248 p.
11. *Бухало А.С., Качуровська В.П., Митропольська Н.Ю.* Культуральні особливості рідкісних видів базидіальних макроміцетів // Укр. ботаніч. журн. – 1995. – 52, № 1. – С. 104–113.
12. *Цизь А.М., Бисько Н.А.* Рост мицелия лекарственных грибов порядка *Aphylllophorales* на различных средах // Усп. мед. микологии. – М.: Нац. академия микологии, 2007. – Т. 9. – С. 266–268.
13. *Патент РФ 2005 № 2323966.*
14. *Горшина Е.С., Скворцова М.М., Бирюков В.В.* Технология получения биологически активной субстанции лекарственного гриба кориола опушенного // Биотехнология. – 2003. – № 2. – С. 45–53.
15. *Антоненко Л.А., Дзыгун Л.П., Клечак И.Р., Линовицкая В.М.* Особенности роста дереворазрушающих базидиомицетов на агаризованных средах // Высшие базидиальные грибы: индивидуумы, популяции, сообщества: Матер. юбил. конф., посвященной 100-летию со дня рождения М.В. Горленко. – М.: ООО Изд-во “Восток-Запад”, 2008. – С. 38–52.
16. *Ломберг М.Л.* Лікарські макроміцети в поверхневій та глибинній культурі: Автореф. дис. ... канд. біол. наук: 03.00.21. – К.: Ін-т ботаніки ім. М.Г. Холодного НАН України, 2005. – 22 с.

УДК 6.61.632.658.691.43

І.М. Астрелін, О.М. Синюшкін,
О.В. Іванюк**ЛУЖНЕ ВИЛУЧЕННЯ МІДІ З ГАЛЬВАНІЧНИХ ШЛАМІВ****Вступ**

Основними напрямками розвитку промисловості України є підвищення конкурентоспроможності підприємств розробкою і впровадженням наукоємних технологій та вирішення проблем техногенного забруднення довкілля за умови збереження природних ресурсів при комплексному використанні сировини і залученні до переробки промислових відходів.

Відомо, що джерела отримання високоякісної сировини виснажуються і це загострює проблему дбайливого та раціонального використання мінеральної сировини за рахунок більш глибокої її переробки і утилізації відходів виробництва.

Неутилізовані відходи різних виробництв звичай складаються і зберігаються у відвалах, на полігонах і шламових майданчиках. Як наслідок, відбувається забруднення атмосфери, літосфери, підземних та поверхневих вод. Промислові відходи, у більшості випадків, містять цінні компоненти та можуть класифікуватися як техногенні родовища. Отже, утилізація їх перспективна з точки зору економії високоякісної сировини, поліпшення екологічного стану навколишнього середовища.

Одним із відходів, який потребує повної утилізації, є шлами очищення стічних вод гальванічних виробництв. Ці шлами містять значну кількість важких та кольорових металів, зокрема міді.

Використанню відходів гальванічних виробництв як джерела кольорових металів та їх оксидів приділяється все більше уваги. На це зорієнтовує як дефіцит вказаних металів в умовах України, так і Закон України "Про відходи" [1–3].

Можливими напрямками утилізації гальванічних шламів є конверсія їх складових у відносно безпечні для довкілля сполуки, які можуть зберігатися довгий час у природних умовах без істотних фізико-хімічних змін, вилучення цінних металів, переробка в сировинні матеріали для інших технологічних процесів.

На підставі порівняння витрат по знешкодженню відходів гальванічного виробництва через захоронення на місцевості і повторного використання цінних компонентів, які містяться у відходах, показано, що другий спосіб обробки відходів економічно більш вигідний: витрати на захоронення однієї тонни відходів становлять приблизно 2–2,5 тис. грн, тоді як витрати на вилучення цінних компонентів дорівнюють 1–1,1 тис. грн (без набутої вартості цих компонентів) [4]. У найближчому майбутньому прогнозується збільшення витрат й на захоронення відходів на місцевості, що зумовлено введенням підвищених вимог до екологічної безпеки цього методу. В подальшому неминуче збільшення вартості металів (Cu, Zn, Ni, Cd тощо), що вже спостерігається й зараз, теж буде сприяти зростанню рентабельності переробки гальванічних відходів з метою повторного використання специфічних властивостей сполук металів, які в них містяться.

В той же час в умовах України використовується лише невелика частка гальванічних шламів, що утилізується на основі давно відомих, проте далеких від раціональності технологій — як добавки або наповнювачі в будівельні матеріали, полірувальні пасти, скляні розтопи тощо [2]. Більш економічно привабливим є термохімічна конверсія металевих складових шламів в оксиди кольорових металів з подальшим використанням останніх у виробництві неорганічних пігментів (барвників різноманітної гами кольорів) замість дорогих та дефіцитних чистих оксидів (NiO, ZnO, Fe₂O₃ тощо) [5]. Проте компонентом, що заважає при синтезі пігментів, є сполуки міді, які містяться в багатьох зразках гальванічних шламів і, отже, підлягають екстракційному вилученню і, далі, регенерації з розчинів електрохімічним відновленням (електроосадженням) [6].

З економічних міркувань найприйнятнішими розчинниками для вилучення міді з суміші сполук, близьких за властивостями до неї металів, є розчини аміаку. Але теоретичні передумови і технологічні аспекти забезпечення максимально можливої селективності цього процесу залишаються недостатньо вивченим питанням [7, 8]. У даній статті ми намагаємось розв'язати цю проблему на дослідницькій основі.

Постановка задачі

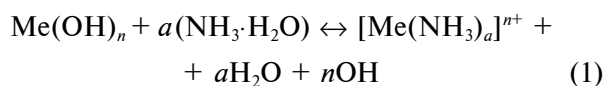
Мета даної статті — теоретичне та технологічне обґрунтування можливості вилучення міді

з мідьвмісних гальванічних шламів методом аміачного вилуговування. При цьому прийнято до уваги, що металеві складові реальних шламів знаходяться в гідроксидній формації.

Теоретичне обґрунтування процесу переведення кольорових металів у розчинний стан з їх гідроксидів розчинами аміаку

При взаємодії з аміаком гідроксидні сполуки міді, цинку та нікелю здатні утворювати розчинні аміачні комплекси: $[\text{Cu}(\text{NH}_3)_4](\text{OH})_2$, $[\text{Ni}(\text{NH}_3)_6](\text{OH})_2$, $[\text{Zn}(\text{NH}_3)_4](\text{OH})_2$ з константами нестійкості K_{H} відповідно $2,31 \cdot 10^{-13}$; $1,12 \cdot 10^{-8}$; $3,46 \cdot 10^{-10}$ [9]. Залізо(III) ж утворює малостійкі аміакати, які можна синтезувати тільки за спеціальними методиками, і, отже, вони не вилуговуються розчинами аміаку.

Перехід вказаних кольорових металів (Cu, Ni, Zn, позначених як Me) у розчин з гідроксидів під впливом ліганда-аміаку відбувається за рахунок утворення розчинного аміачного комплексу за брутто-реакцією



або за стадіями



При заданому значенні рН розчину, яке зумовлює знаходження аміаку у формі гідрату, за наявності твердої фази гідроксиду металу рівноважна концентрація іонів $[\text{Me}^{n+}]$ у розчині буде підтримуватись постійною за рахунок розчинності твердої фази згідно з реакцією (2) при цьому ж рН розчину. Це значення концентрації $[\text{Me}^{n+}]$ зумовлює рівновагу суміжно поєднаної реакції (3) та, в підсумку, рівноважну концентрацію амінокомплексу $[\text{Me}(\text{NH}_3)_a]^{n+}$ в розчині при заданій технологічними умовами концентрації аміаку.

Матеріальний баланс з утворення аміачного комплексу (загальна концентрація S_{Me} , розчинність S_{Me}) можна записати у вигляді

$$C_{\text{Me}} = S_{\text{Me}} = [\text{Me}^{n+}] + [\text{Me}(\text{NH}_3)_a]^{n+}. \quad (4)$$

Складові рівняння матеріального балансу (4) можна визначити таким чином: рівноважна концентрація металу в розчині при заданому значенні рівноважної концентрації гідроксид-

іонів лімітується розчинністю гідроксиду та визначається за формулою

$$[\text{Me}^{n+}] = \frac{\text{ДР}}{[\text{OH}^-]^n}, \quad (5)$$

де ДР – добуток розчинності.

Концентрацію аміачного комплексу можна обчислити при відомій концентрації $[\text{Me}^{n+}]$ з формули визначення поняття константи нестійкості:

$$K_{\text{H}} = \frac{[\text{Me}^{n+}][\text{NH}_3]^a}{[\text{Me}(\text{NH}_3)_a]^{n+}},$$

звідки

$$[\text{Me}(\text{NH}_3)_a]^{n+} = \frac{[\text{Me}^{n+}][\text{NH}_3]^a}{K_{\text{H}}}. \quad (6)$$

Отже, враховуючи (6), отримаємо вираз для обчислення рівноважної розчинності (S_{Me}):

$$S_{\text{Me}} = [\text{Me}^{n+}] \left(\frac{K_{\text{H}} + [\text{NH}_3]^a}{K_{\text{H}}} \right). \quad (7)$$

Рівноважна концентрація $[\text{NH}_3]$ у розчині зв'язана з рівноважною концентрацією $[\text{NH}_4\text{OH}]$ співвідношенням

$$[\text{NH}_3] \approx 0,1[\text{NH}_4\text{OH}].$$

Проте вважаючи, що константи нестійкості аміачних комплексів вже визначено за умовою $[\text{NH}_3] = 0,1[\text{NH}_4\text{OH}]$ [9], це положення нами враховано. Згідно із значенням константи іонізації аміаку, при рН > 10 практично весь аміак знаходиться у вигляді гідрату аміаку.

При постійній рівноважній концентрації $[\text{Me}^{n+}]$ для обчислення розчинності гідроксиду металу не вистачає значення рівноважної концентрації $[\text{NH}_3]$, яку можна обчислити з рівняння матеріального балансу по аміаку:

$$C_{\text{NH}_3} = [\text{NH}_3] + a[\text{Me}(\text{NH}_3)_a]^{n+}. \quad (8)$$

Підставляючи у (8) вирази (5), (6), приводимо це рівняння до вигляду, який є зручним для розв'язання числовими методами:

$$C_{\text{NH}_3} - [\text{NH}_3] + a \frac{\text{ДР}}{[\text{OH}^-]^n} \frac{[\text{NH}_3]^a}{K_{\text{H}}} = 0.$$

Отже, для визначення розчинності гідроксиду металу в розчині аміаку маємо систему рівнянь такого вигляду:

$$\begin{cases} S_{\text{Me}} = [\text{Me}^{n+}] \frac{K_{\text{H}} + [\text{NH}_3]^a}{K_{\text{H}}}, \\ C_{\text{NH}_3} - [\text{NH}_3] + a \frac{\text{ДР}[\text{NH}_3]^a}{K_{\text{H}}[\text{OH}^-]^n} = 0, \\ [\text{Me}^{n+}] = \frac{\text{ДР}}{[\text{OH}^-]^n}. \end{cases}$$

Отриману систему рівнянь розв'язували за допомогою стандартних програм MathCad при заданому значенні концентрації гідроксид-іонів, тобто рН розчину. Значення розчинності гідроксидів металів у розчині аміаку обчислювали в інтервалі рН = 10–12. Цю характеристику вибрано такою тому, що ΔрН розчину аміаку змінюється у вузькому інтервалі при різних концентраціях останнього (C_{NH_3}).

Залежність рН розчинів аміаку в цьому діапазоні від його концентрації визначали, виходячи з рівняння матеріального балансу по аміаку, яке має такий вигляд:

$$C_{\text{NH}_3} = [\text{NH}_4^+] + [\text{NH}_3]. \quad (9)$$

Значення рівноважної концентрації іонів $[\text{NH}_4^+]$, яке входить у рівняння (9), можна виразити через константу рівноваги K_0 в аміачному розчині:

$$K_0 = \frac{[\text{OH}^-][\text{NH}_4^+]}{[\text{NH}_3]}, \quad [\text{NH}_4^+] = \frac{K_0[\text{OH}^-]}{[\text{NH}_3]}. \quad (10)$$

Підставивши (10) в рівняння матеріального балансу та зробивши необхідні перетворення, дістанемо рівняння, яке визначає залежність концентрації $[\text{NH}_3]$ від рН розчину аміаку:

$$[\text{NH}_3] = \frac{C_{\text{NH}_3}[\text{OH}^-]}{K_0 + [\text{OH}^-]}$$

Із результатів розв'язання системи рівнянь випливає, що при однакових концентраційних умовах найбільшу розчинність у розчинах аміаку мають іони міді(II). При низьких концентраціях аміаку значення розчинності гідроксидів міді, цинку та нікелю, які входять до складу шламів, відрізняються в кілька разів.

При збільшенні концентрації розчинів аміаку в інтервалі (0,2–2) моль/л розчинність усіх гідроксидів кольорових металів збільшується, проте концентрація аміаку міді залишається істотно більшою ($S_{\text{Cu}^{2+}} = (1,6 \cdot 10^{-2} - 0,47)$ моль/л, $S_{\text{Ni}^{2+}} = (8,6 \cdot 10^{-8} - 0,15)$ моль/л, $S_{\text{Zn}^{2+}} = (1,2 \cdot 10^{-7} - 1,7 \cdot 10^{-2})$

моль/л), що є передумовою селективного вилучення міді з гальванічних шламів.

Експериментальні дослідження процесу вилучення міді розчинами аміаку

Як показав теоретичний аналіз, селективним реагентом для вилучення із шламів іонів міді на фоні іонів заліза, цинку та нікелю може бути розчин аміаку, який здатний утворювати з компонентами гальванічного шламу розчинні комплексні сполуки з досить низькими значеннями констант нестійкості. При цьому з іонами міді утворюється найбільш стійкий тетрааміачний комплекс, що є вагомою передумовою селективного вилучення міді із шламу. Для практичного підтвердження цього було проведено ряд дослідів, в яких як модель мідьвмісної сировини використовувався синтетичний малахіт $\text{CuCO}_3 \cdot \text{Cu}(\text{OH})_2$.

Експерименти планувались з метою виявлення оптимальних параметрів вилучення міді (концентрації і норми аміаку та час вилучення).

Після математичної обробки даних було отримано апроксимаційне рівняння, що описує процес вилучення міді розчинами аміаку:

$$Y = 75,33376 + 6,782498X_1 + 1,421249X_2 + 5,637503X_3,$$

де Y – ступінь вилучення міді, %; X_1 – концентрація аміаку; X_2 – норма аміаку; X_3 – тривалість вилучення міді.

Аналіз отриманого рівняння показує, що найбільший вплив на ступінь вилучення міді розчином аміаку є його концентрація, а також тривалість проведення експерименту.

Раціональними умовами для отримання не менш ніж 91 %-ного ступеня вилучення міді слід вважати: час – три години, концентрація аміаку в розчині аміаку – 15 %, норма аміаку – 120 % від стехіометрії на мідь. Але для наближення умов вилучення міді до реальних (наявність сполук Ni та Zn) було проведено експерименти на модельних сумішах, що мали у своєму складі домішки гідроксидів цих металів.

Експеримент проводився при таких значеннях параметрів: концентрація аміаку – 15 %, норма – 120 %, тривалість операцій змінна.

Експериментальні дані щодо вилучення міді розчинами аміаку з модельних сумішей, які містять у різних концентраціях цинк і нікель, наведені на рис. 1.

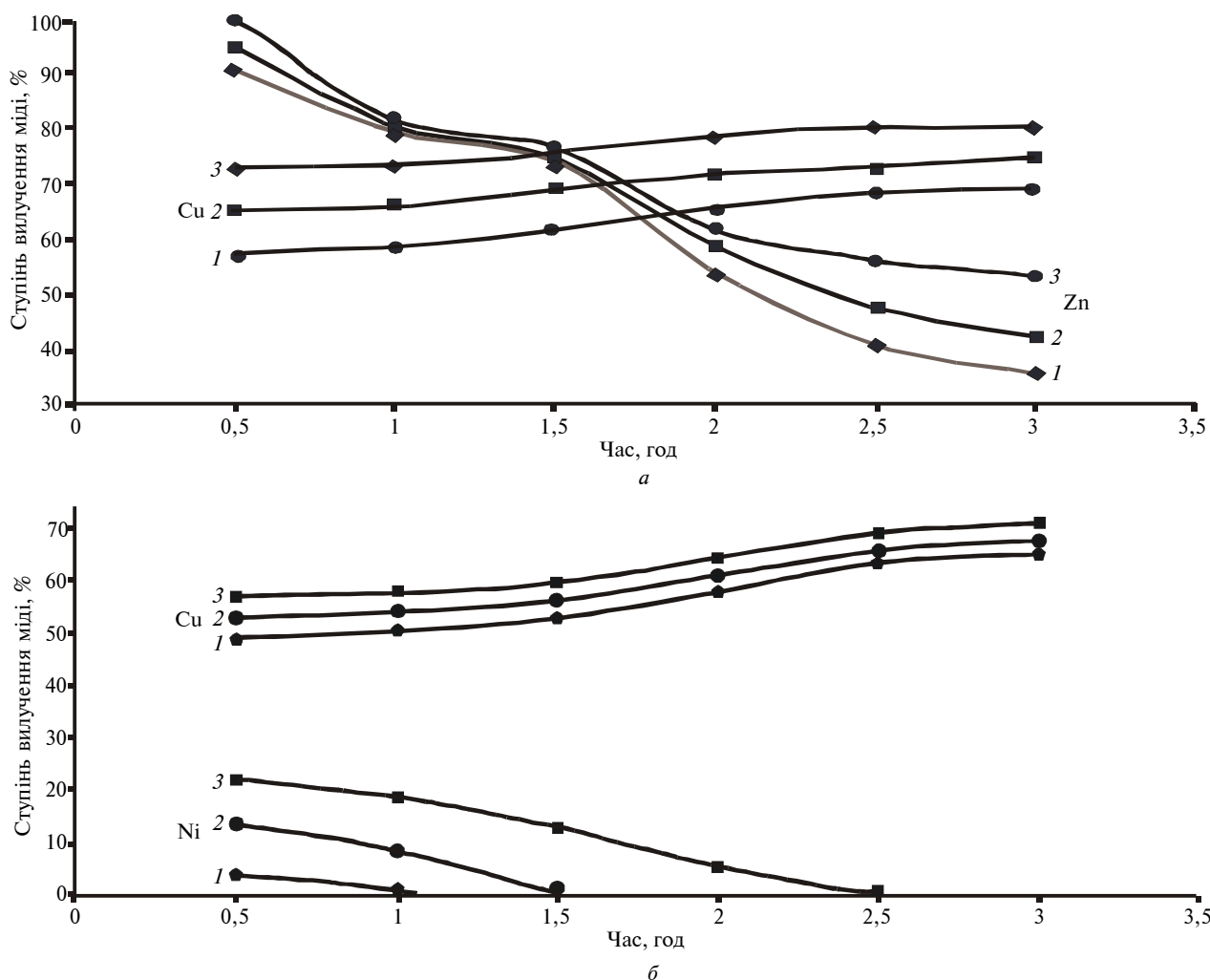


Рис. 1. Експериментальні дані щодо вилучення міді розчинами аміаку з модельних сумішей, що містять у різних концентраціях цинк та нікель гальванічного шламу (Cu, Zn, Ni): *a* – цинквмісна модель; вміст цинку, %: 1 – 2; 2 – 5; 3 – 8; *б* – нікельвмісна модель; вміст нікелю, %: 1 – 2; 2 – 5; 3 – 8

Як видно з наведених даних, на моделях гальванічних шламів спостерігалось зростання ступеня вилучення міді з часом і спадання ступеней вилучення цинку та нікелю (у випадку з нікелем у сумішах з малим його вмістом спостерігалися лише сліди даного компонента). Це можна пояснити тим, що аміак утворює з цинк- та нікельвмісними компонентами розчину комплексні сполуки з досить великими значеннями констант нестійкості і з часом прискорює їх розпад.

Слід також зазначити, що швидкість утворення мідьаміачного комплексу нижча за швидкість утворення комплексів Ni та Zn. Це зумовлює тимчасову підвищену концентрацію цих металів у початковий період вилучення компонентів із гальванічних шламів.

Вилучення міді з мідьвмісних гальванічних шламів

У досліджах використовувався зразок реального гальванічного шламу з таким масовим вмістом сполук (%): CuO – 18,4, ZnO – 0,6, NiO – 10,3, Fe₂O₃ – 3,3, Na₂O – 6,0, SiO₂ – 9,6, CO₂²⁻ – 3,9, витрати при прокалюванні – 25,5. Експерименти було реалізовано з метою виявлення оптимальних параметрів вилучення міді, які набували таких значень: концентрації аміаку X_1 – (17,5 ± 5,5)%; співвідношення рідина:тверда фаза X_2 – 3,75 ± 0,5; час вилучення X_3 – (40 ± 10) хв.

Математичній та оптимізаційній обробці підлягало отримане на основі експериментальних даних апроксимаційне рівняння, що адекватно описує процес вилучення міді з реальних шламів розчинами аміаку (%):

$$S_{\text{Cu}^{2+}} = 11,25 + 3,29X_1 + 4,18X_2 + 2,06X_3,$$

При співвідношенні рідина : тверда фаза менше 2–2,5 утворюється занадто густа суспензія, яку важко розфільтрувати, а при співвідношенні більше 5–6 з'являється велика кількість рідкої фази, що призводить до підвищення витрат на транспортування та подальшу переробку. Виявлено, що при проведенні процесу в області оптимальних параметрів ступінь вилучення міді досягає 85–92%.

Кінетичні залежності процесу вилучення міді з реальних шламів добре описується таким рівнянням (коефіцієнт кореляції дорівнює 0,95):

$$\frac{1}{\sqrt{X}} = 0,1561 + 0,0434 \frac{1}{\tau^{1,43}}, \quad (11)$$

де X – ступінь вилучення міді, %; τ – час перебігу процесу, год.

Кінетичне рівняння швидкості процесу вилучення міді(II), одержане диференціюванням виразу (11) в заданих точках, має вигляд

$$\frac{dx}{d\tau} = 4,3436 \cdot 10^{-2} \cdot 2\beta \frac{x^{1,5}}{\tau^{\beta+1}},$$

де β – коефіцієнт кореляції експериментальних даних.

Технологічна схема переробки високомідистих гальванічних шламів методом аміачного вилуговування

З метою вилучення міді з розчинів нами пропонується в даний час застосовувати метод електролітичної екстракції. У дослідах умови були підбрані таким чином, щоб забезпечити селективне вилучення міді при наявності в розчині інших металів (нікелю, цинку тощо). Принципова технологічна схема наведена на рис. 2.

Шлам 2 із сховища краном 1 подається в бункер 3, звідки шнековим конвеєром 4 спрямовується в реактор з мішалкою 5, куди також додається з бака 8 розчин аміаку та вода для досягнення потрібного співвідношення рідина:тверда фаза. Суспензія після вилуговування надходить на фільтрпрес 6, де відділяється тверда фаза, яка може бути використана, наприклад, у синтезі пігментів. Фільтрат та промивні води використовуються для електроосадження металічної міді в електролітичній ванні 7.

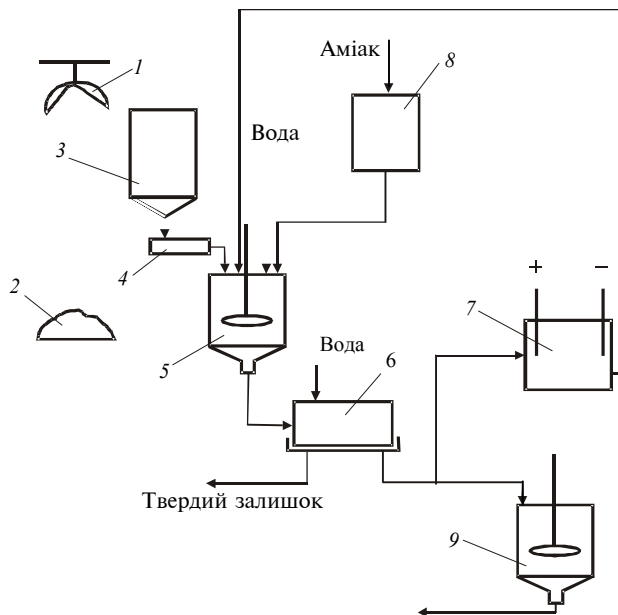


Рис. 2. Принципова технологічна схема вилучення міді з гальванічних шламів: 1 – грейферний кран; 2 – гальванічний шлам; 3 – бункер для шламу; 4 – шнековий конвеєр; 5 – реактор з мішалкою для вилучення міді; 6 – фільтрпрес; 7 – електролітична ванна; 8 – бак для розчину аміаку; 9 – збірник маточного розчину

Матеріальний баланс цієї технології свідчить, що при обробці типових мідьвмісних гальванічних шламів треба здійснювати продувку кожного одинадцятого циклу у зв'язку з накопиченням у маточному розчині досить великої кількості сполук цинку та нікелю (збірник маточного розчину 9).

Висновки

На основі теоретичного аналізу та експериментальних досліджень доведено доцільність аміачного вилучення міді з гальванічних шламів.

Із врахуванням визначених оптимальних умов запропоновано технологічну схему переробки гальванічних мідьвмісних шламів, яка забезпечує можливість не менш ніж на 90% вилучати мідь та отримувати осад сполук нікелю і цинку з невеликими домішками міді, який придатний для подальшої переробки.

І.М. Астрелін, А.Н. Синюшкін, Е.В. Іванюк

ЩЕЛОЧНОЕ ИЗВЛЕЧЕНИЕ МЕДИ ИЗ ГАЛЬВАНИЧЕСКИХ ШЛАМОВ

Теоретически определена возможность химического извлечения меди из гальванических шламов, экспериментально исследованы процессы извлечения меди растворами аммиака из модельных смесей и реальных гальванических шламов, а также электроэкстракции меди из растворов выщелачивания. Определены технологические условия извлечения меди из отходов гальванических производств. Предложена принципиальная технологическая схема переработки медьсодержащих гальванических шламов с расчетом материального баланса.

I.M. Astrelin, O.M. Sinyushkin, O.V. Ivanyuk

THE ALKALINE EXTRACTION OF COPPER FROM GALVANIC DROSS

On the theoretical side, we investigate the possibility of chemical extraction of copper from galvanic dross. We study the processes of extracting copper from the model mixtures and original dross of ammoniac solution. Furthermore, we consider the electro-extraction of copper from lixiviation solutions. An emphasis is laid on determining the technological conditions of extracting copper from galvanic waste production. Finally, we propose the fundamental technological scheme of reprocessing galvanic dross containing copper with the calculation of material balance.

1. Тищенко Г.П., Моисеенко Н.Ю., Журавлев В.С. и др. Утилизация промышленных отходов гальванических производств // Обз. инф. Сер. Актуальные вопр. хим. науки и технологии и охраны окруж. среды. – 1991. – № 3. – С. 1–8.
2. Запольский А.П., Образцов В.В. Комплексная переработка сточных вод гальванических производств. – К.: Техника, 1989. – 200 с.
3. Тимофеева С.С., Баранов А.Н., Балаян А.Э., Зуборева Л.Д. Комплексная оценка технологий утилизации осадков сточных вод гальванических производств // Химия и технология воды. – 1991. – 1. – С. 68–71.
4. Кучерова Е.А., Паничева А.Ю., Федорова С.В. Утилизация осадков сточных вод машиностроительных предприятий в производстве стеновой керамики // Очистка производственных сточных вод и утилизация осадков машиностроительной промышленности. – М: Химия, 1988. – 156 с.
5. Астрелін І.М., Іванюк О.В., Супрунчук В.І. Синтез неорганічних пігментів з використанням шламових відходів гальванічних виробництв // Хім. промисловість України. – 1998. – № 9. – С. 48–50.
6. Іванюк Е.В., Астрелін І.М., Супрунчук В.І. Синтезовані неорганічні пігменти, синтезовані з використанням відходів гальванічних виробництв // Журн. прикл. хімії. – 1999. – 72, вып. 9. – С. 1429–1432.
7. Вячеславов П.М., Ильше В.А. Пути создания безотходных технологий в производстве гальванических покрытий // Тез. докл. семинара “Охрана окруж. среды и новый высокоэффективный метод анализа и очистки сточных вод пром. предприятий”. – Л.: ЛТИ, 1983. – С. 7–8.
8. Запольський А.К., Мішкова-Клименко І.М., Астрелін І.М. та ін. Фізико-хімічні основи технології очищення стічних вод – К.: Лібра, 2000. – 552 с.
9. Васильев В.П. Аналитическая химия. – М.: Высш. шк., 1989. – 320 с.

Рекомендована Радою хіміко-технологічного факультету НТУУ “КПІ”

Надійшла до редакції
10 жовтня 2008 року

УДК 544.636

В.Ю. Ізотов, Д.Г. Громадський,
Ю.А. Малетін**МОДЕЛЮВАННЯ І РОЗРАХУНОК РОБОЧИХ ПАРАМЕТРІВ СУПЕРКОНДЕНСАТОРА****Вступ**

Останнім часом з'явився великий інтерес до систем, здатних акумулювати і при необхідності видавати на зовнішнє навантаження електричні імпульси тривалістю кілька секунд і потужністю кілька кіловат. Такі акумулюючі системи знаходять усе ширше використання в системах запуску двигунів внутрішнього згоряння, космічній техніці, і без них важко собі уявити автомобілі майбутнього – електромобілі. Однією з таких систем, що акумулюють енергію, є конденсатори подвійного електричного шару, або суперконденсатори. За своїми питомими характеристиками суперконденсатори здатні накопичувати (віддавати) енергію порядку однієї ват-години на кілограм при потужності порядку кількох кіловат на кілограм та при високих значеннях ККД (порядку 95%).

Практична потреба дала поштовх для цілеспрямованих досліджень процесів заряду й розряду подвійного електричного шару, що відбуваються в нанопористих системах, з яких звичайно виготовляють електроди суперконденсаторів. Результати цих досліджень дали можливість серйозно просунути в розумінні механізму фізико-хімічних процесів, що відбуваються в суперконденсаторах, й обґрунтувати теоретичну модель, яка дозволяє трактувати більшість експериментальних результатів [1]. На базі цих модельних уявлень на даний момент проводиться порівняння різних електрохімічних систем, що лежать в основі різних суперконденсаторів. Однак, незважаючи на очевидні успіхи, досягнуті в цій сфері, залишається нез'ясованим ряд істотних питань. Це проявляється насамперед у неможливості трактувати на базі існуючих модельних уявлень всю сукупність експериментальних результатів та характеристик суперконденсаторів.

Так, залишається відкритим питання про те, що слід розуміти під внутрішнім опором суперконденсатора та як трактувати зміну цього параметра в процесі проведення деяких експериментів. З відповіддю на це тісно пов'язане таке важливе поняття, як ККД. Розв'язуванню цих проблем присвячена дана стаття.

Постановка задачі

Мета статті – розрахунок і моделювання основних характеристик суперконденсаторів і визначення впливу на них внутрішньої релаксації заряду. Зроблено спробу, використовуючи відносно просту модель, яка тільки в цілому описує фізичні процеси, що протікають на пористих електродах, описати вказані нижче експерименти.

Аналіз експериментальних даних

Дуже часто при трактуванні експериментальних результатів виходять із простого модельного уявлення суперконденсатора у вигляді двох послідовно з'єднаних елементів опору і конденсатора. При цьому припускається, що ємність конденсатора відповідає ємності суперконденсатора, а опір – його внутрішньому опору. Опір і ємність вважаються сталими величинами.

Однак таке модельне трактування суперконденсатора не може пояснити одержання всіх експериментальних даних. Розглянемо класичний експеримент з циклування суперконденсатора постійним струмом. Будемо заряджати, а потім розряджати суперконденсатор у гальваностатичному режимі струмом I . Виходячи із стрибка напруги ΔU_1 у початковий момент зарядки і опираючись на зазначену вище модель, можна визначити внутрішній опір суперконденсатора: $R_1 = \Delta U_1 / I$. Аналогічно внутрішній опір суперконденсатора можна знайти, виходячи із стрибка потенціалу ΔU_2 у момент його перезарядження: $R_2 = \Delta U_2 / I$.

На рис. 1 наведено результати циклування струмом 5 А макета суперконденсатора ємністю 52 Ф. Як видно з цього рисунка, ΔU_2 більше ΔU_1 і, отже, опір, розрахований з першого стрибка потенціалу, менший за опір, розрахований із другого стрибка потенціалу. Цей результат явно протирічить модельним уявленнями про суперконденсатор як систему послідовно з'єднаних опорів і конденсатор.

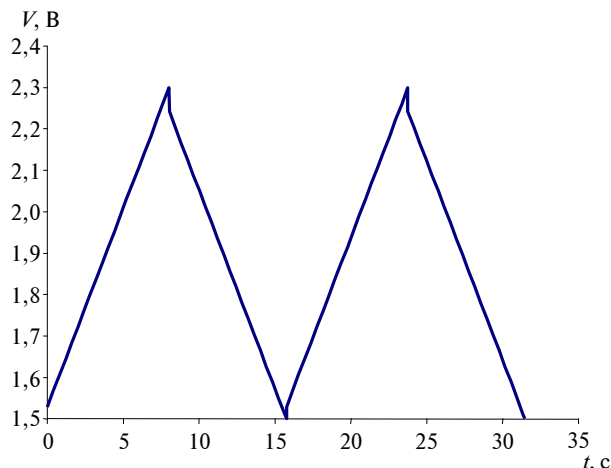


Рис. 1. Залежність напруги від часу при циклуванні суперконденсатора ємністю 52 Ф у гальваностатичному режимі струмом 5 А

Для усунення цього протиріччя експеримент ставився трохи по-іншому. На першому етапі суперконденсатор заряджався у гальваностатичному режимі і визначався стрибок напруги ΔU_1 , на другому – витримувався при постійному потенціалі, на третьому – розряджався в гальваностатичному режимі і при цьому визначався ΔU_2 . При такому підході ΔU_1 дорівнював ΔU_2 і внутрішній опір, визначений при заряді суперконденсатора, дорівнював опорі, виявленому при розряді. На рис. 2 наведено саме таку схему циклування макета суперконденсатора ємністю 52 Ф. Струм заряду дорівнював струму розряду і становив 5 А.

Для відповіді на питання, чому експеримент, наведений на рис. 1, суперечить теоретич-

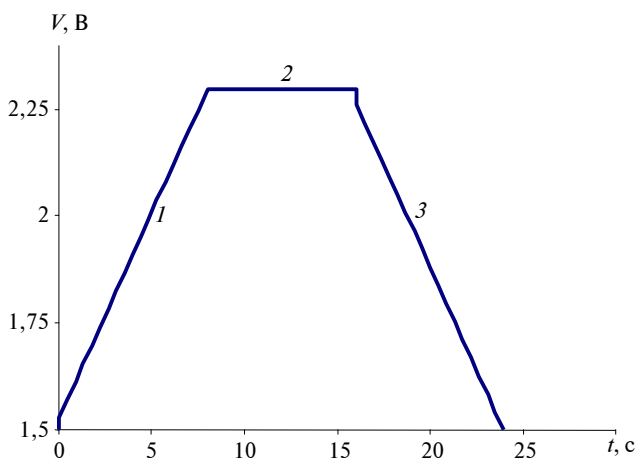


Рис. 2. Залежність напруги від часу на клеммах суперконденсатора ємністю 52 Ф при: 1 – заряді в гальваностатичному режимі струмом 5 А; 2 – витримуванні в потенціостатичному режимі при напрузі 2,3 В; 3 – розряді суперконденсатора в гальваностатичному режимі струмом 5 А

ній моделі, розглянемо фізичні процеси, які відбуваються в суперконденсаторі при його заряді (розряді). Поляризаційний електрод суперконденсатора являє собою пористу систему з широким розподілом пор за розмірами. Процес заряду електрода характеризується накопиченням заряду в порах різного діаметра. У різних порах накопичується різний заряд і за різний час. Отже, кожному розміру пор можна поставити у відповідність RC -ланцюжок. Така модель не має практичного значення через те, що її неможливо використати при проведенні прогнозуючих розрахунків параметрів суперконденсатора.

Існує цілий ряд більш простих модельних наближень для опису роботи суперконденсатора [2–4]. Ці моделі дають можливість досить точно описати роботу суперконденсатора, однак для практичних розрахунків вони також уявляються досить складними через велику кількість параметрів.

Модельні розрахунки

У даній статті, як і раніше в [5], зроблена спроба описати роботу суперконденсатора з використанням мінімального числа параметрів. При побудові цієї моделі умовно розділимо пори на дві великі групи і поставимо у відповідність кожній групі пор свою сталу часу RC . Припускаємо, що константи RC всередині кожної групи можна вважати близькими між собою за значенням. Такий умовний поділ можна провести в такий спосіб: до першої групи віднести пори, в яких радіус не більше 50 \AA , а до другої – ті, в яких радіус більший. До другої групи віднесемо також і транспортні канали. Далі будемо зображати суперконденсатор у вигляді двох паралельно з'єднаних RC -ланцюжків. Параметри R_0 і C_0 будуть відповідати першій групі пор, а R_m і C_m – другій.

Для запропонованої моделі суперконденсатора зміна потенціалу на зовнішніх клеммах при гальваностатичному зарядженні має вигляд

$$U(t) = I \left[\frac{R_0 R_m}{R_0 + R_m} e^{-\frac{t}{\tau}} + \frac{R_0 C_0^2 + R_m C_m^2}{(C_0 + C_m)^2} \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right) + \frac{t}{C_0 + C_m} \right] + U_0, \quad (1)$$

де $\tau = \frac{(R_0 + R_m)C_0 C_m}{C_0 + C_m}$ – характерний час внутрішньої релаксації суперконденсатора; U_0 – напруга на клеммах суперконденсатора до початку циклування.

Виходячи з рівняння (1), залежність внутрішнього опору від часу опишемо рівнянням

$$R(t) = \frac{R_0 C_0^2 + R_m C_m^2}{(C_0 + C_m)^2} - \frac{(R_0 C_0 - R_m C_m)^2}{(R_0 + R_m)(C_0 + C_m)^2} e^{-\frac{t}{\tau}}. \quad (2)$$

З рівняння (2) видно, що залежно від співвідношення реального часу t і характерного часу внутрішньої релаксації експериментально спостерігаються різні асимптотики для внутрішнього опору суперконденсатора.

Для "коротких" імпульсів, або для початкового моменту заряду суперконденсатора, коли можна знехтувати лінійними членами, внутрішній опір визначається початковим стрибком потенціалу ΔU_1 і становить

$$R(t \ll \tau) \approx \frac{R_0 R_m}{R_0 + R_m} + O\left(\frac{t}{\tau}\right). \quad (3)$$

Виходячи з уявлень даної моделі, до "коротких" імпульсів слід віднести імпульси, тривалість яких (t_0) набагато менша часу внутрішньої релаксації ($t_0 \ll \tau$). До другого граничного випадку варто віднести той часовий інтервал, коли суперконденсатор працює на зовнішнє навантаження протягом часу, що набагато перевищує час внутрішньої релаксації ($t_0 \gg \tau$).

У випадку, коли суперконденсатор заряджається протягом тривалого часу ($t \gg \tau$), його внутрішній опір описується рівнянням

$$R(t \gg \tau) \approx \frac{R_0 C_0^2 + R_m C_m^2}{(C_0 + C_m)^2} + O\left(e^{-\frac{t}{\tau}}\right), \quad (4)$$

що відповідає опору R_2 , який визначається із стрибків потенціалу ΔU_2 .

Ємність суперконденсатора знаходиться з нахилу кривої $U(t)$ при тривалому часі заряду $t \gg \tau$:

$$C = C_0 + C_m. \quad (5)$$

Якщо після завершення заряду суперконденсатор відключити від зовнішнього джерела живлення, то напруга на його зовнішніх клеммах $U_r(t)$ буде змінюватися в такий спосіб:

$$U_r(t) = \frac{I t_0}{C_m + C_0} + U_0 - I \frac{(C_m R_m - C_0 R_0)^2}{(C_m + C_0)^2 (R_m + R_0)} e^{-\frac{t}{\tau}}, \quad (6)$$

де t_0 – час, протягом якого продовжувався заряд суперконденсатора в гальваностатичному режимі.

Виходячи з форми кривої $U_r(t)$, на основі рівняння (6) можна визначити характерний час внутрішньої релаксації суперконденсатора τ .

Таким чином, рівняння (3)–(6) можуть використовуватися для визначення чотирьох параметрів, що характеризують дану модель суперконденсатора. У рамках даної моделі з'являється можливість не тільки однозначно трактувати експериментальні результати з гальваностатичного циклування суперконденсатора, але й теоретично розрахувати такий важливий параметр, як ККД на стадії заряду (розряду) суперконденсатора. Крім того, можна також оцінити енергетичні втрати на релаксаційні процеси, що відбуваються всередині суперконденсатора при відключенні його від зовнішнього джерела живлення.

При розрахунках ККД суперконденсатора необхідно також враховувати процеси внутрішньої релаксації (перерозподіл заряду за порами). Тому при оцінюванні енергії, витраченої суперконденсатором при роботі на зовнішнє навантаження

$$E = \frac{CU_0^2}{2} - \frac{CU^2}{2}, \quad (7)$$

де U – кінцева напруга на клеммах суперконденсатора, тобто вимірювання кінцевої напруги на клеммах суперконденсатора слід проводити після завершення внутрішніх релаксаційних процесів, тобто через час $t > 3\tau$. Після закінчення зазначеного часу внутрішні релаксаційні процеси можна вважати завершеними й напруга на клеммах суперконденсатора буде сталою.

Порівняння модельних розрахунків з експериментальними даними

Для перевірки правильності наших припущень визначимо за зазначеною вище схемою модельні параметри R_0 , C_0 , R_m і C_m для макета батареї з трьох суперконденсаторів. Потім, виходячи з модельних параметрів, спробуємо описати експериментальну залежність струму від часу при розряді макета батареї суперконденсаторів на постійний зовнішній опір $R_L = 0,375$ мОм.

Візьмемо такі значення параметрів: $\Delta U_1 = 0,083$ В, $\Delta U_2 = 0,113$ В, $C_0 + C_m = 465$ Ф, $\tau = 0,85$ с. Циклування відбувалося струмом $I = 10$ А.

Розв'язуючи систему рівнянь, знаходимо значення параметрів, що характеризують модель суперконденсатора: $R_0 = 25$ мОм, $C_0 = 25$ Ф, $R_m = 12,5$ мОм, $C_m = 440$ Ф.

У випадку, коли суперконденсатор розряджається на постійне навантаження і між опором навантаження та опорами, що характеризують суперконденсатор, виконується співвідношення $R_0, R_m \gg R_L$, рівняння, яке описує залежність струму від часу, має вигляд [5]

$$I = \frac{U_0}{R_0} e^{-\frac{t}{R_0 C_0}} + \frac{U_0}{R_m} e^{-\frac{t}{R_m C_m}} + O\left(\frac{R_L}{R_0}; \frac{R_L}{R_m}\right). \quad (8)$$

На рис. 3 наведено результати модельних розрахунків і експериментальні результати розряду батареї суперконденсаторів на постійний

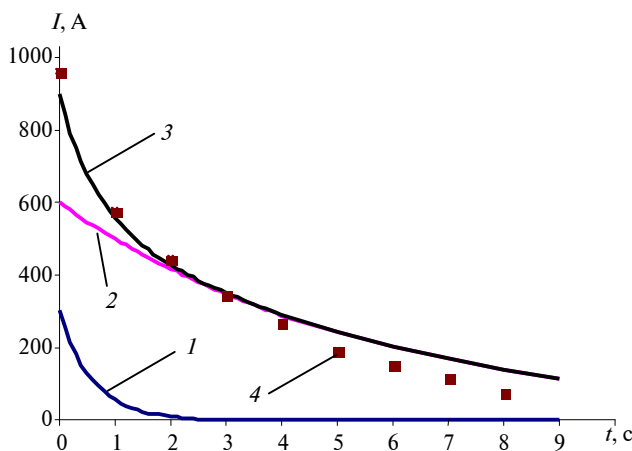


Рис. 3. Залежність струму, що протікає через опір R_L при розряді макета батареї суперконденсаторів: 1 – струм розряду для $R_0 C_0$ -ланцюжка; 2 – струм розряду для $R_m C_m$ -ланцюжка; 3 – сумарний струм розряду; 4 – експериментальні значення для струму розряду в режимі короткого замикання

зовнішній опір $R_L = 0,375$ мОм. Параметри одного елемента: ємність дорівнює 1500 Ф і внутрішній опір, визначений по першому стрибку потенціалу ($R_1 = \Delta U_1 / I$), становить 0,003 Ом. Точність визначення всіх параметрів $\pm 5\%$. Початкова напруга на клеммах батареї 7,5 В. Як видно з рис. 3, теоретичні розрахунки і експериментальні дані добре узгоджуються, що свідчить на користь запропонованої моделі суперконденсатора.

Висновки

Із наведених вище викладок зрозуміло, що запропонована модель суперконденсатора більш повно відображує фізичні процеси, які протікають в електрохімічній системі суперконденсатора. Вона дає можливість прогнозувати поведінку суперконденсатора при роботі на різні зовнішні навантаження. У рамках даної моделі вдалося пояснити тимчасову залежність внутрішнього опору суперконденсатора при розряді (заряді) його в гальваностатичному режимі. Показано, що для опису зміни властивостей суперконденсатора як функції часу доцільно ввести нову характеристику τ – час внутрішньої релаксації. Введення даної характеристики дає змогу виділити тимчасові інтервали, протягом яких при роботі на зовнішнє навантаження внутрішній опір суперконденсатора можна вважати сталим.

Експериментально значення внутрішнього опору можна визначити, наприклад, з описаного вище дослід з циклування суперконденсатора пилкоподібною напругою в гальваностатичному режимі (див. рис. 1). У першому випадку (режим “короткого” імпульсу) внутрішній опір суперконденсатора визначається з початкового стрибка потенціалу при його заряді (ΔU_1). У другому випадку внутрішній опір суперконденсатора визначається із стрибка потенціалу в момент його перемикавання із заряду на розряд (ΔU_2).

Виходячи з усього зазначеного вище, можна вважати за доцільне характеризувати суперконденсатор за допомогою чотирьох параметрів R_0 , C_0 , R_m і C_m . Таке модельне уявлення суперконденсатора не переобтяжить розрахунки, але дасть можливість врахувати енергетичні втрати, зумовлені перерозподілом зарядів у пористих електродах, та пов'язане з цим виділення тепла. Останнє вкрай важливо при проведенні інженерних розрахунків у випадку, коли суперконденсатор має працювати в режимі критичних навантажень.

Експериментальну перевірку застосування даної моделі для зазначених вище випадків можна розглядати як першочергову задачу працездатності даної моделі.

В.Ю. Изотов, Д.Г. Громадский, Ю.А. Малетин

МОДЕЛИРОВАНИЕ И РАСЧЕТ РАБОЧИХ ПАРАМЕТРОВ СУПЕРКОНДЕНСАТОРА

Статья посвящена изучению влияния внутренней релаксации заряда на изменение основных характеристик суперконденсатора во времени. Предложена теоретическая модель, которая описывает состояние суперконденсатора в зависимости от режима и длительности эксплуатации. В рамках предложенной модели показано, что при экспериментальном определении параметров суперконденсатора необходимо учитывать изменения, связанные с процессами внутренней релаксации заряда.

V.Yu. Izotov, D.G. Gromadskyi, Yu.A. Maletin

THE MODELING AND CALCULATION OF PERFORMANCE PARAMETERS OF ULTRACAPACITOR

This paper provides insights into the study of the effect of internal charge relaxation on the time change of ultracapacitors' main characteristics. Emphasized here is a proposed theoretical model, which describes the ultracapacitor's state, depending on operation regime and duration. Within the framework of this model, we demonstrate that the ultracapacitor's performance measurements should be conducted, considering internal charge relaxation processes and changes.

1. *Conway B.* Electrochemical supercapacitors: scientific fundamentals and technological applications. Kluwer Academic / Plenum New York. – 1999.
2. *Gualous H., Bouquain D., Berthon A., Kauffmann J.M.* Experimental study of supercapacitor serial resistance and capacitance variations with temperature // *J. of Power Sources.* – 2003. – **123.** – P. 86–93.
3. *Levie R. de.* Advances in Electrochemistry and Electrochemical Engineering / P. Delahay (ed.). – Wiley, New York. – 1967. – **6.** – P. 329–397.
4. *Zubieta L., Bonert R.* Characterization of double-layer capacitors for power electronics applications // *IEEE-IAS 98.* – 1998. – P. 1149–1154.
5. *Maletin Y.A., Strizhakova N.G., Izotov V.Y. et al.* Novel type of storage cells based in electrochemical double-layer capacitors // *New Promising Electrochemical Systems for Rechargeable Batteries.* – P. 363–372.

Рекомендована Радою хіміко-технологічного факультету НТУУ "КПІ"

Надійшла до редакції
27 червня 2008 року

УДК 620.197.3

С.В. Фроленкова, М.І. Донченко

ВПЛИВ ОКСОАНІОНІВ НА АНОДНУ І ХІМІЧНУ ПАСИВАЦІЮ СТАЛІ В СЛАБОМІНЕРАЛІЗОВАНІЙ ВОДІ

Вступ

Ефективним способом захисту сталі від корозійного руйнування в рідких середовищах є пасивація, яка дає можливість зменшувати швидкість корозії на кілька порядків. Серед інгібіторів, які викликають самовільну пасивацію маловуглецевих сталей і заліза в нейтральних водних розчинах, широко відомі оксоаніони – хромати та нітрити. Але такі пасиватори є токсичними й екологічно небезпечними, тому використання їх має супроводжуватися спеціальними запобіжними заходами, стічні води з їх вмістом потребують знешкодження і спеціальної утилізації. Крім того, відомо, що маловуглецева сталь схильна до пітингоутворення в розчинах хроматів [1] і нітритів [2]. Тому актуальним залишається питання рівноцінної заміни їх у різних розчинах, наприклад у слабомінералізованій воді, яка використовується в замкнених охолоджувальних системах.

Для вибору оксоаніонів-пасиваторів необхідно знати електрохімічну поведінку сталі у воді, яка використовується в реальних умовах експлуатації виробів. Кількісні і якісні оцінки корозійного процесу отримують із поляризаційних кривих сталі. Аналіз літературних даних показує, що відомостей щодо електрохімічної поведінки вуглецевої сталі в слабомінералізованій воді практично немає. Це пояснюється складністю відтворення отриманих результатів, яка, в свою чергу, пов'язана з рядом труднощів, що виникають у процесі дослідження: по-перше, – мала електропровідність розчинів; по-друге, – зміна рН під час зняття поляризаційних кривих, а звідси й різний хід пасиваційного процесу. Тому найчастіше в літературі наводяться дані щодо процесу анодного розчинення металів у нейтральних буферних розчинах. Але додавання буферуючих добавок істотно впливає на хід анодних кривих. Так, в карбонат-гідрокарбонатному буфері [3–5] струм розчинення сталі в активній області в два рази менший за такий же в ацетатному буфері [6]. Це може бути пов'язано з накопиченням на поверхні сталі малорозчинних сполук заліза різного скла-

ду, які й викликають гальмування корозійного процесу. Хід анодної кривої в боратному буфері взагалі принципово відрізняється від кривих, отриманих в інших нейтральних розчинах [7, 8]. Тому дані щодо електрохімічної поведінки сталі в буферних розчинах некоректно використовувати для прогнозування корозії в реальних нейтральних розчинах.

Постановка задачі

У даній статті поставлена задача проведення електрохімічних досліджень безпосередньо в слабомінералізованій воді із застосуванням прийомів для врахування омичного опору розчинів і стабілізації їх кислотності. Порівняння пасивувальної дії оксоаніонів різної природи в слабомінералізованій воді дасть змогу визначити можливість використання їх як інгібіторів корозії сталі в цьому середовищі.

Методика експерименту

Дослідження проводились на сталі марки 08кп. Для оцінки пасивувальних властивостей інгібіторів було вибрано запропонований ГОСТ 9.502–82 розчин такого складу: 0,319 г/л Na_2SO_4 + 0,3 г/л NaHCO_3 + 0,5 г/л CaCl_2 (модельна вода). Для вивчення впливу хлорид-іонів використовувався той же розчин без додавання CaCl_2 : 0,319 г/л Na_2SO_4 + 0,3 г/л NaHCO_3 (фоновий розчин).

Як інгібітори корозії пасивувального типу використовувались іони оксигенних кислот, зокрема іони хромату, перманганату, ванадату, вольфрамату, молібдату, бромату, іодату або їх комбінації. Розчини готувались на дистильованій воді введенням неорганічних речовин кваліфікації "хч" чи "чда". Для вивчення та порівняння пасивувальної дії оксоаніонів у фоновий розчин вводили добавки однакової концентрації. Виходячи з попередньо отриманих даних про самовільну пасивацію сталі в дистильованій воді під дією 0,5 г/л ($2,42 \cdot 10^{-3}$ М) молібдату натрію, саме таку концентрацію добавок вибрали для дослідження електрохімічної поведінки сталі у фоновому розчині. Кислотність розчинів, яку вимірювали іономіром ЕВ-74, становила рН = 7,6–8,0.

Поляризаційні криві отримували в потенціодинамічному режимі із швидкістю розгортки потенціалу 2 мВ/с, використовуючи потенціостат ПИ-50-1.1 та самописець ПДА-1. Потенціали вимірювали відносно насиченого хлор-срібного

електрода порівняння. За стаціонарний потенціал електрода брали значення, яке встановлювалось після витримки сталі в досліджуваному розчині протягом 10 хв. Для вилучення омичної складової при знятті поляризаційних кривих використовували методику трьох капілярів. Згідно з цією методикою, до поверхні сталевого зразка підводили зафіксовані на різній відстані (x_i) три капіляри, кожний з яких вмикався у вимірювальний ланцюг із своїм електродом порівняння. За дійсне значення електродного потенціалу брали величину, отриману екстраполяцією кривої E_i-x_i до перетину з координатою $x_i=0$. Через малу електропровідність розчину катод доводилося розміщати на невеликій відстані від анода. Для зменшення перемішування розчину бульбашками водню використовувався катод з площею, яка значно перевищувала площу анода, що забезпечувало невисоку катодну густину струму. Об'єм розчину був досить великий (200 мл при площі анода 1 см^2) – з метою підтримання стабільної величини рН в процесі поляризації. І все ж таки величина рН зростала на 0,2–0,3 одиниці за рахунок виділення водню на катоді. Тому аноди, як і розчини, замінювались на нові після кожного дослідження. Показники корозії визначались масометричним методом і розраховувались за такою формулою:

$$K_{\text{кор}} = \frac{\Delta m}{S \tau} [\text{г/см}^2 \cdot \text{год}], \quad (1)$$

де Δm – втрати маси зразка впродовж випробувань, г; S – робоча площа поверхні зразка, см^2 ; τ – термін експозиції, год.

Коефіцієнт гальмування γ та ступінь захисту від корозії Z обчислювались за формулами:

$$\gamma = \frac{K_{\text{кор}}}{K'_{\text{кор}}}, \quad (2)$$

де $K_{\text{кор}}$ і $K'_{\text{кор}}$ – швидкість корозії в розчині без та з інгібітором, відповідно;

$$Z = (1 - 1/\gamma) \cdot 100\% = \frac{K_{\text{кор}} - K'_{\text{кор}}}{K_{\text{кор}}} \cdot 100\%. \quad (3)$$

Масові показники корозії перераховувались на струмові одиниці відповідно до закону Фарадея за формулою

$$i_{\text{кор}} = \frac{K_{\text{кор}}}{1,042} [\text{А/см}^2], \quad (4)$$

де 1,042 – електрохімічний еквівалент заліза Fe^{2+} [г/А·год].

Оксоаніони металів V–VI груп періодичної системи

Стаціонарний потенціал сталі у фоновому розчині становить $E_{\text{ст}} \approx -0,7 \text{ В}$. Анодна крива у відсутності хлоридів має вигляд, типовий для металів, що підлягають пасивації (рис. 1). Критична густина струму пасивації ($i_{\text{кр}}$) становить $i_{\text{кр}} = 6,3 \text{ мА/см}^2$ для вибраної швидкості зміщення потенціалу, потенціал повної пасивації – $E_{\text{п.п}} \approx 0,5 \text{ В}$.

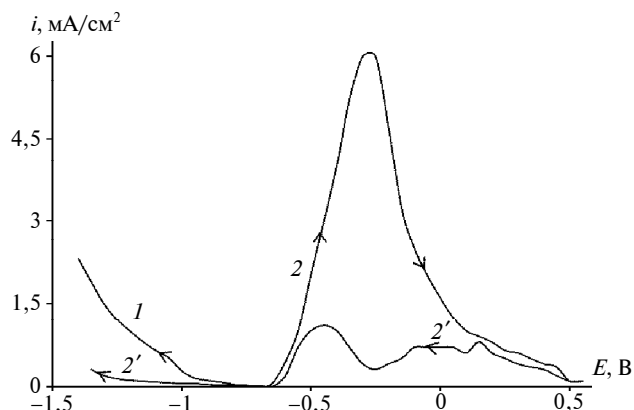
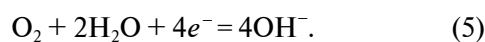


Рис. 1. Катодна (1) і анодні (2, 2') поляризаційні криві сталі в розчині 0,319 г/л Na_2SO_4 + 0,3 г/л NaHCO_3 ; хід кривих: 1, 2 – прямий; 2' – зворотний

Зворотний хід поляризаційної кривої свідчить про те, що пасивна плівка, яка утворюється при додатних значеннях потенціалу, відновлюється не повністю: струм анодного розчинення менше, ніж при знятті прямого ходу. При потенціалі $E < -0,7 \text{ В}$ на зворотній кривій спостерігається катодний струм. На катодній кривій до потенціалу $E = -0,9 \text{ В}$ існує ділянка граничного струму $i_{\text{гр}} \sim 0,05 \text{ мА/см}^2$ (див. рис. 1). Така величина добре узгоджується із швидкістю дифузії молекул кисню в неперемішуваних розчинах у повітряній атмосфері [9]. Саме цей процес зазвичай є лімітуючою стадією корозії сталі в нейтральних розчинах. Середня швидкість корозії сталі за 10 діб, визначена масометричним методом, виявилась дещо меншою, ніж граничний струм відновлення кисню. Можливо, це пов'язано з утворенням плівок продуктів корозії, які мають певні захисні властивості. При наявності CaCl_2 може проявлятися також інгібуюча дія іонів кальцію, наприклад, у результаті утворення нерозчинного гідроксиду $\text{Ca}(\text{OH})_2$ [10] при підключенні приелектродного шару в результаті реакції:



Найвідомішим пасиватором у нейтральних розчинах є хромат. При введенні добавки хромоту у фоновий розчин відбувається зміщення стаціонарного потенціалу сталі до значення $-0,5$ В (рис. 2). На анодній кривій спостерігається зменшення швидкості розчинення сталевго електрода поблизу стаціонарного потенціалу. Але хромат при вибраній концентрації ($2,42 \cdot 10^{-3}$ М) перешкоджає переходу сталі в пасивний стан. Крім того, виникнення гістерезису при знятті зворотного ходу свідчить про можливість появи пітингу на поверхні сталевго електрода, що узгоджується з літературними даними [11].

На зворотному ході анодної кривої струми розчинення сталі більші, ніж у фоновому розчині без добавок. Таким чином, на відміну від загальновідомих даних про пасивувальні властивості добавка хромоту в концентрації $2,42 \cdot 10^{-3}$ М не забезпечує самопасивації сталі у фоновому розчині.

Схожу поведінку сталі зумовлюють і перманганати (рис. 3). У фоновому розчині з добав-

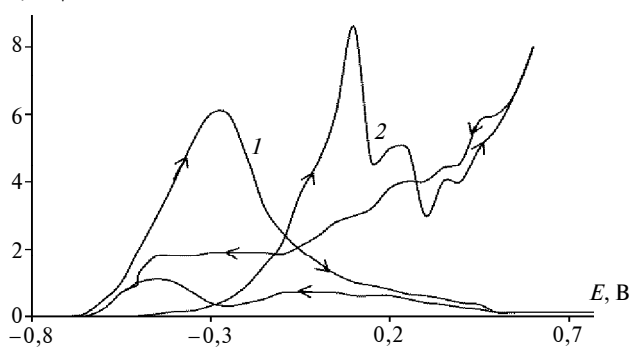


Рис. 2. Прямий і зворотний хід анодних поляризаційних кривих сталі у фоновому розчині без добавки (1) та з добавкою Na_2CrO_4 (2)

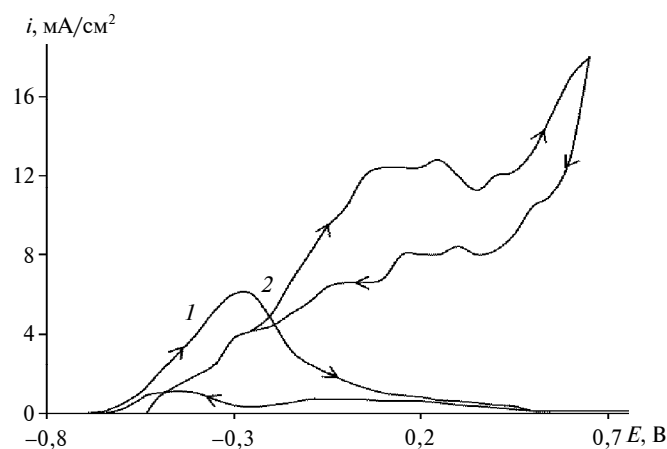


Рис. 3. Прямий і зворотний хід анодних поляризаційних кривих сталі у фоновому розчині без добавки (1) та з добавкою KMnO_4 (2)

кою перманганату стаціонарний потенціал сталі становить $-0,53$ В. На анодній кривій переходу сталі в пасивний стан взагалі не відбувається. Максимальний струм розчинення сталевго електрода в 2,5 рази більший, ніж в чистому розчині, тобто перманганат стимулює анодне розчинення сталі в слабомінералізованій воді.

Добавки ванадату амонію та вольфрамату натрію (рис. 4) дещо сильніше гальмують анодне розчинення сталі. Вони суттєво зміщують стаціонарний потенціал в позитивний бік і зменшують критичний струм пасивації сталі. У розчині з добавкою VO_3 спостерігається зменшення $i_{\text{кр}}$ до величини порядку $i_{\text{кр}} = 1,32$ mA/cm^2 та струму розчинення в пасивному стані до $i_{\text{п.п}} = 0,1$ mA/cm^2 .

На відміну від ванадату на анодній кривій сталі у фоновому розчині з добавкою вольфрамату (див. рис. 4) спостерігається великий струм розчинення сталі в пасивному стані. Це може бути пов'язано з пробоем пасивної плівки або з утворенням пітингу на поверхні сталевго електрода [12].

Молібдат забезпечує утворення найбільш стабільної анодної пасивної плівки (рис. 5). Характерним є зміщення потенціалу повної пасивації до $E_{\text{п.п}} = -0,3$ В, тобто розширення інтервалу потенціалів пасивного стану сталі. Струм розчинення в пасивній області також дещо менший при наявності добавки, ніж без неї.

Зворотний хід анодної кривої в розчині з молібдатом свідчить про відсутність активації при змищенні потенціалу в негативний бік до від'ємних значень – сталь залишається пасивною протягом всієї поляризаційної кривої. Анодний струм зменшується й досягає нуля при потенціалі $-0,1$ В. Виникає катодний струм порядку $0,1$ mA/cm^2 , який відображає суму процесів відновлення розчиненого кисню, водню та самого

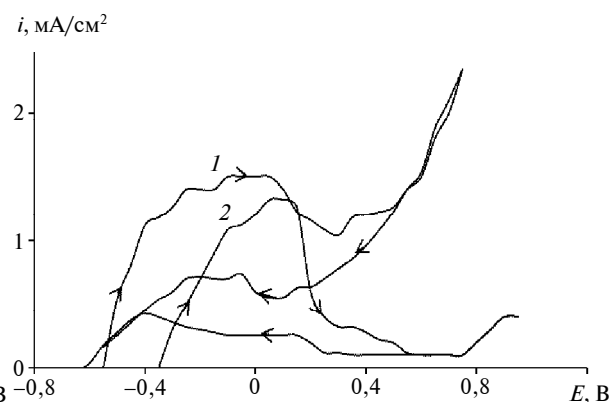


Рис. 4. Прямий і зворотний хід анодних поляризаційних кривих сталі у фоновому розчині з добавками Na_2WO_4 (1) і NH_4VO_3 (2)

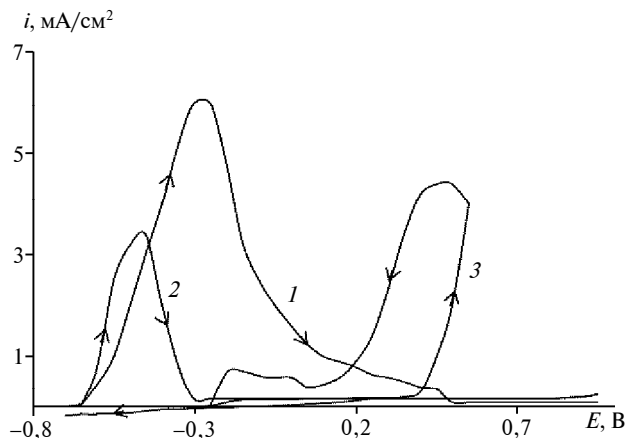


Рис. 5. Прямий і зворотний хід анодних поляризаційних кривих сталі у фоновому розчині без добавки (1) та з добавками Na_2MoO_4 (2) і KBrO_3 (3)

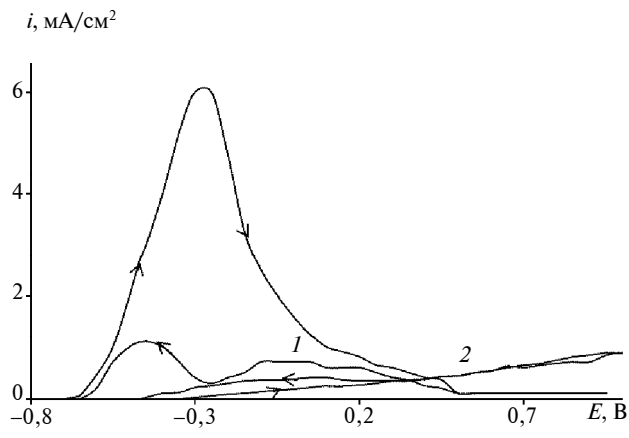


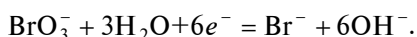
Рис. 6. Прямий і зворотний хід анодних поляризаційних кривих сталі у фоновому розчині без добавки (1) та з добавкою KIO_3 (2)

молібдату. Таким чином, добавка молібдату полегшує пасивацію сталі і стабілізує пасивну плівку в більшій мірі, ніж інші оксоаніони.

Методом електронної дифракції було встановлено [13], що полегшення анодної пасивації сталі при додаванні в нейтральний розчин молібдату натрію пов'язано з його введенням у структуру пасивної плівки. Сполуки молібдену(VI) модифікують оксидну плівку на залізі, утворюючи нерозчинний комплекс виду $\text{Fe}_2(\text{MoO}_4)_3$. Це стабілізує оксидну плівку і перешкоджає її розчиненню.

Оксоаніони галоїдів

Дія бромату, доданого у фоновий розчин, принципово відрізняється від впливу на поведінку сталі інших добавок (див. рис. 5). Бромат сприяє самовільній пасивації (самопасивації) сталі: стаціонарний потенціал суттєво зміщується в позитивний бік, а на анодних кривих немає ділянки активного розчинення. Але при потенціалі $+0,4$ В відбувається пробій пасивної плівки і різке збільшення анодного струму. При знятті зворотного ходу кривої спостерігається "петля", характерна для пітингоутворення. Така дія броматів може бути пов'язана з утворенням активуючих галогенідів за реакцією



Введення в розчин добавки йодату калію викликає зміщення стаціонарного потенціалу сталі в позитивний бік до величини $E_{\text{ст}} = -0,35$ В і самопасивацію сталі (рис. 6), як і у випадку бромату. При анодній поляризації струм розчинення сталі в пасивному стані дещо зростає і перевищує такий у розчині без добавок окиснювачів, але на відміну від бромату йодат не призводить до

пробою пасивної плівки; на зворотному ході кривої активація сталі відсутня.

Таким чином, можна зробити висновок, що ефективна пасивувальна дія галоїдних оксоаніонів пов'язана з їх високими окиснювальними властивостями і здатністю до відновлення. Бромати, відновлюючись, значно прискорюють катодний процес у широкій області потенціалів: виконується умова хімічної пасивації металів, тобто швидкість катодної реакції деполізації перевищує критичну анодну густину струму пасивації металу. У нейтральних розчинах ця умова реалізується за рахунок великої швидкості сумарного катодного процесу відновлення водню і бромату [14], в нітратних розчинах – аніонів нітрату і бромату [15]. Молібдати в нейтральних розчинах не відновлюються, а їх пасивувальна дія проявляється за рахунок адсорбції, гальмування анодної реакції і введення в оксидні шари нерозчинних сполук заліза з молібденом(VI).

Порівняння пасивувальної дії оксоаніонів

Порівнюючи вплив оксоаніонів у концентрації $2,42 \cdot 10^{-3}$ М на анодну поведінку сталі в слабкомінералізованій воді, можна зробити такі висновки:

- хромати і перманганати не тільки не забезпечують самопасивації, а й перешкоджають анодній пасивації сталі;
- окиснювачі, центральним атомом у молекулах яких є галогени, викликають самопасивацію маловуглецевої сталі;
- ванадати і молібдати полегшують перехід сталі в пасивний стан;
- вольфрамати, хоча суттєво гальмують анодне розчинення сталі, не спричиняють стійкої

анодної пасивації в нейтральному середовищі; крім того, вони здатні викликати появу пітингу;

- найбільш стабільна плівка на поверхні сталі формується при наявності молібдатів.

Отримані дані заперечують уявлення, що найсильнішим пасиватором сталі є хромат. Справді, в розчині слабмінералізованої води пасивувальна концентрація молібдату натрію C_n виявилася набагато нижчою, ніж хромату натрію (рис. 7, 8). Найменша концентрація C_n характерна для бромату.

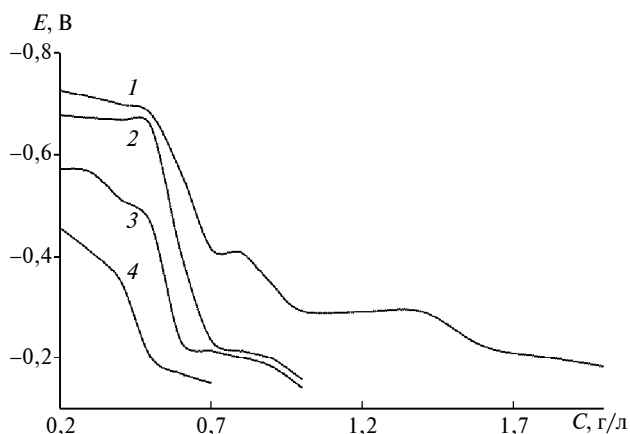


Рис. 7. Вплив концентрації добавки оксоаніонів на стаціонарний потенціал сталі в розчині слабмінералізованої води; добавка: 1 – Na_2CrO_4 ; 2 – Na_2MoO_4 ; 3 – KIO_3 ; 4 – KBrO_3

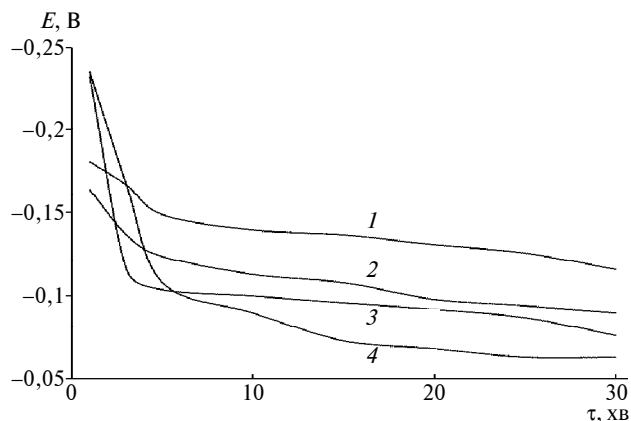


Рис. 8. Зміна в часі потенціалу в процесі самопасивації сталі в розчині слабмінералізованої води з добавками оксоаніонів; пасивувальна концентрація добавки, г/л: 1 – $2,0 \text{ Na}_2\text{CrO}_4$; 2 – $0,7 \text{ Na}_2\text{MoO}_4$; 3 – $0,6 \text{ KIO}_3$; 4 – $0,5 \text{ KBrO}_3$

Суміші оксоаніонів

Серед запропонованих оксоаніонів найефективнішими пасиваторами виявилися бромати та йодати. Але бромат натрію здатний викликати пітингову корозію сталі [16]. Крім того, тривалі (десять і більше діб) корозійні масометричні випробування свідчать про те, що при невеликих концентраціях бромату, попри первинну пасивацію, сталь з часом активується і інгібуючий ефект зникає (таблиця). Для нівелювання такого ефек-

Таблиця. Показники корозії сталі в розчині слабмінералізованої води з добавками

Добавка	Концентрація добавки, г/л	Час випробувань, год	K , г/см ² ·год	i , мА/см ²	γ	Z , %
Без добавки	–	168	$5,8 \cdot 10^{-3}$	$5,6 \cdot 10^{-3}$	–	–
CaCl_2	0,5	168	$4,6 \cdot 10^{-3}$	$4,4 \cdot 10^{-3}$	1,26	20,63
Na_2MoO_4	0,5	168	$3,8 \cdot 10^{-3}$	$3,7 \cdot 10^{-3}$	1,53	34,64
KBrO_3	0,5	48	$4,0 \cdot 10^{-4}$	$3,8 \cdot 10^{-4}$	14,6	93,15
KBrO_3	0,5	168	$4,5 \cdot 10^{-3}$	$4,3 \cdot 10^{-3}$	1,30	23,08
Na_2MoO_4	0,5	48	$6,5 \cdot 10^{-5}$	$6,2 \cdot 10^{-5}$	89,23	98,88
KBrO_3	0,1					
Na_2MoO_4	0,5	168	$3,2 \cdot 10^{-3}$	$3,1 \cdot 10^{-3}$	1,81	44,75
KBrO_3	0,1					
Na_2MoO_4	0,5	168	$6,4 \cdot 10^{-5}$	$6,1 \cdot 10^{-5}$	91,8	99,1
KIO_3	0,1					
Na_2MoO_4	0,5	240	$1,2 \cdot 10^{-5}$	$1,1 \cdot 10^{-5}$	500	99,8
KIO_3	0,1					

ту в розчині слабмінералізованої води було зроблено спробу використання як пасиватора суміші оксоаніонів галоїдів із молібдатом натрію, який показав себе як ефективний стабілізатор пасивної плівки.

На анодних кривих у фоновому розчині з додаванням суміші $\text{Na}_2\text{MoO}_4 + \text{KBrO}_3$ (рис. 9)

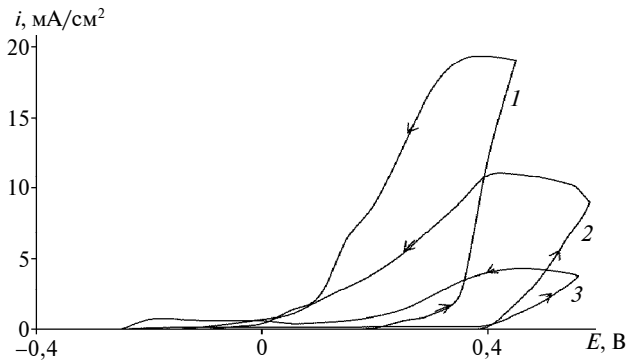


Рис. 9. Прямий і зворотний хід анодних поляризаційних кривих сталі у фоновому розчині з добавками оксоаніонів; добавка, г/л: 1 – 0,5 $\text{Na}_2\text{MoO}_4 + 0,05 \text{KBrO}_3$; 2 – 0,5 $\text{Na}_2\text{MoO}_4 + 0,1 \text{KBrO}_3$; 3 – 0,404 KBrO_3

при знятті прямого ходу спостерігається зменшення струмів розчинення сталі з підвищенням концентрації бромату, зворотного – збільшення струмів у кілька разів. Таким чином, хоча бромат і сприяє самопасивації сталі і гальмує корозію в перші дві доби (див. таблицю), він не гарантує стабільності пасивної плівки в часі, тобто є небезпечним інгібітором при концентрації $\leq 0,5 \text{ г/л}$. У цих умовах навіть додаткове введення в розчин добавки молібдату не здатне забезпечити стійкий пасивний стан.

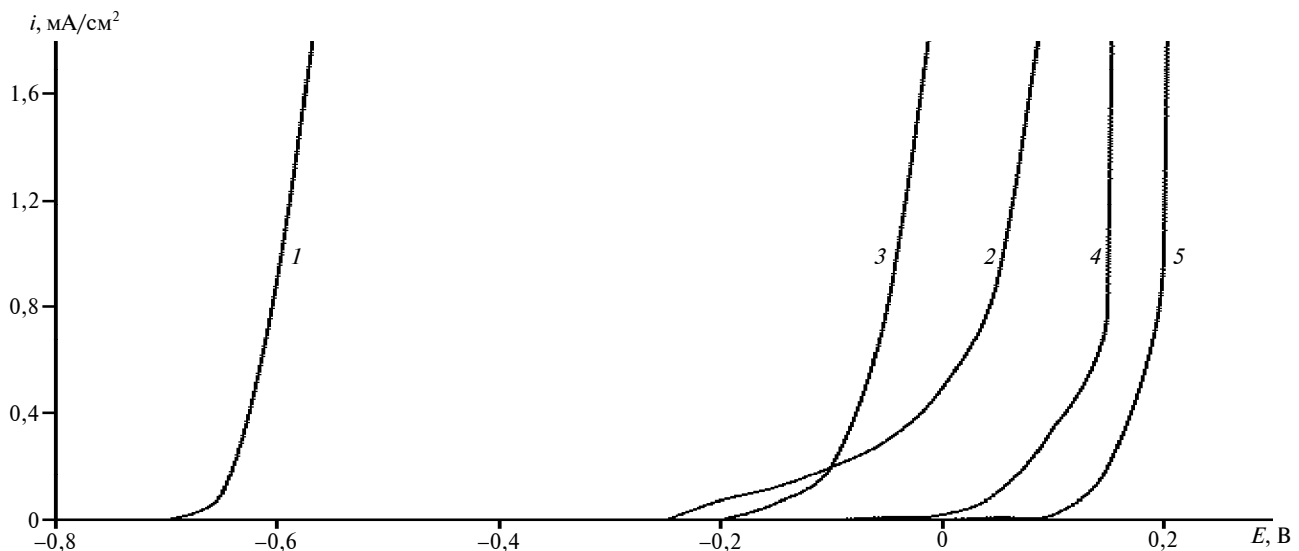


Рис. 11. Анодні поляризаційні криві сталі в розчині модельної води з добавками оксоаніонів; концентрація добавок, г/л: 1 – 0; 2 – 0,5 Na_2MoO_4 ; 3 – 0,518 KIO_3 ; 4 – 0,3 $\text{Na}_2\text{MoO}_4 + 0,1 \text{KIO}_3$; 5 – 0,5 $\text{Na}_2\text{MoO}_4 + 0,1 \text{KIO}_3$

Йодат калію не має згаданого вище недоліку бромату. В розчині слабмінералізованої води з додаванням молібдату натрію і йодату калію при знятті анодних кривих прямий та зворотний ходи повністю збігаються (рис. 10): KIO_3 забезпечує

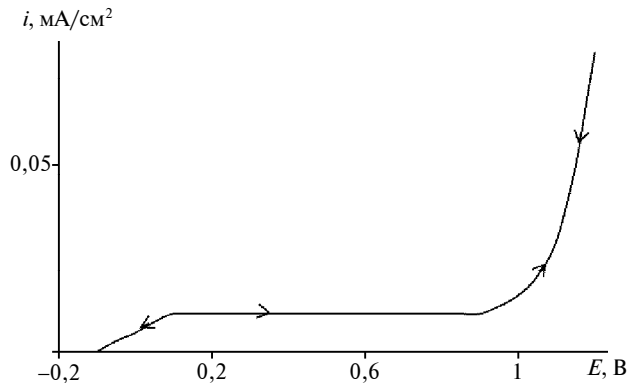


Рис. 10. Прямий і зворотний хід анодних поляризаційних кривих сталі у фоновому розчині з добавками 0,5 г/л Na_2MoO_4 та 0,1 г/л KIO_3

самопасивацію сталі, а добавка Na_2MoO_4 підтримує пасивний стан і малу швидкість розчинення сталі ($i_{\text{п.п}} = 0,01 \text{ mA/cm}^2$). Це свідчить про те, що пасивна плівка на поверхні сталевого електрода є стійкою і її захисні властивості повинні підвищуватися з часом. Цей факт підтверджують і масометричні корозійні дані (див. таблицю).

При додаванні в розчин слабмінералізованої води хлориду кальцію в кількості 0,5 г/л (модельна вода) стаціонарний потенціал сталі суттєво не змінюється порівняно із значенням, отриманим у фоновому розчині без CaCl_2 , але на анодній поляризаційній кривій перехід сталі в пасивний стан не спостерігається (рис. 11). Вве-

дення індивідуальних добавок молібдату натрію та йодату калію в розчин модельної води викликає зміщення стаціонарного потенціалу сталі в позитивний бік до $E_{ст} = -0,24$ В та $E_{ст} = -0,20$ В, відповідно, але при анодній поляризації затримки підйому кривих не відбувається.

Використання суміші оксоаніонів – молібдату та йодату – викликає не лише зміщення стаціонарного потенціалу сталі до позитивніших значень ($E_{ст} = -0,06$ В), а й суттєву затримку підйому кривої – пробою пасивної плівки під впливом хлорид-іонів (див. рис. 11). Із збільшенням концентрації молібдату натрію потенціал підйому кривої зміщується в позитивний бік.

У зв'язку з високими захисними властивостями і малими концентраціями компонентів суміш молібдату натрію та йодату калію доцільно рекомендувати для використання як інгібітора корозії сталі в замкнених системах водного охолодження. Застосування броматів у даному випадку не рекомендується через можливість пітингової корозії та активації сталі. Але бромати можуть бути перспективними як пасиватори (в комбінації з молібдатом) для короткочасної обробки сталі і формування конверсійних покриттів з метою подальшого захисту сталі від атмосферної корозії.

Висновки

Порівняння впливу оксоаніонів різної природи при однаковій їх мольній концентрації на анодне розчинення і пасивацію сталі показало, що на відміну від традиційних уявлень про найефективнішу пасивувальну дію хроматів останні при малих концентраціях ($2,42 \cdot 10^{-3}$ М) не тільки не забезпечують самопасивацію нелегованої сталі в слабомінералізованій воді, але й перешкоджають її анодній пасивації.

Найефективнішими пасиваторами виявилися оксоаніони, центральним атомом в яких є галоген (BrO_3^- , IO_3^-), а найбільш стабільні плівки формуються під дією молібдатів. Суміші молібдатів з йодатами практично повністю захищають сталь від корозії в слабомінералізованій воді впродовж тривалого часу: при терміні випробувань 168–240 діб ступінь захисту перевищує 99%.

Одержані результати досліджень можуть бути корисними для розвитку теоретичних уявлень стосовно синергетичної дії інгібіторів пасивувального типу різної природи як в нейтральних, так і в кислих або лужних середовищах. Виявлення ефекту післядії пасиваційних процесів робить перспективним створення екологічно безпечних розчинів для нанесення на метали захисних конверсійних покриттів.

С.В. Фроленкова, М.И. Донченко

ВЛИЯНИЕ ОКСОАНИОНОВ НА АНОДНУЮ И ХИМИЧЕСКУЮ ПАССИВАЦИЮ СТАЛИ В СЛАБОМИНЕРАЛИЗОВАННОЙ ВОДЕ

Исследовано влияние оксоанионов (CrO_4^{2-} , WO_4^{2-} , MoO_4^{2-} , VO_3^- , MnO_4^- , BrO_3^- , IO_3^-) на анодное поведение малоуглеродистой стали в слабоминерализованной воде. Показано, что наиболее эффективными пассиваторами являются броматы и йодаты; молибдаты обуславливают высокую стабильность анодных пассивных пленок. Предложены композиции добавок, которые обеспечивают самопроизвольную пассивацию стали и могут использоваться как ингибиторы коррозии в замкнутых системах водного охлаждения.

S.V. Frolenkova, M.I. Donchenko

THE INFLUENCE OF THE OXYANIONS ON ANODIC AND CHEMICAL STEEL PASSIVATION IN POORLY MINERALIZED WATER

We study the influence of the oxyanions (CrO_4^{2-} , WO_4^{2-} , MoO_4^{2-} , VO_3^- , MnO_4^- , BrO_3^- , IO_3^-) on the anodic behaviour of mild steel in poorly mineralized water. Through experiments performed, we demonstrate that bromates and iodates are the most effective passivators; the molybdates guarantee a high stability of the anodic passive films. We also propose the compositions of additives that ensure spontaneous chemical steel passivation, which can be used as the corrosion inhibitors in the closed circuit systems of water cooling.

1. *Cheng Y.F., Luo J.L.* Electronic structure and pitting susceptibility of passive film on carbon steel // *Electrochimica Acta.* – 1999. – **44**, N 17. – P. 2947–2957.
2. *Deyaba M.A., Abd El-Rehimb S.S.* Inhibitory effect of tungstate, molybdate and nitrite ions on the carbon steel pitting corrosion in alkaline formation water containing Cl-ion // *Ibid.* – 2007. – **53**, N 4. – P. 1754–1760.
3. *Мусеева Л.С., Кузнецов Ю.И.* Влияние ингибиторов коррозии на пассивацию анодно-поляризованной низкоуглеродистой стали в карбонат-гидрокарбонатных средах // *Журн. прикл. химии.* – 1998. – **71**. – С. 950–955.
4. *Rangel C.M., Fonseca I.T., Leitzo R.A.* Some aspects of the electrochemical behavior of mild steel in carbonate-bicarbonate solutions // *Electrochimica Acta.* – 1986. – **31**, N 12. – P. 1659–1662.
5. *Кузнецов Ю.И., Ибатуллин К.А.* Об ингибировании углекислотной коррозии стали карбоновыми кислотами // *Защита металлов.* – 2002. – **38**, № 5. – С. 496–501.
6. *Bardwell J.A., MacDougall B., Graham M.J.* Pitting of Fe in pH 7.4 acetate buffer // *Corrosion Science.* – 1991. – **32**. – P. 139–149.
7. *Frankenthal R.P.* Passivation of iron in borate buffer solution // *Electrochimica Acta.* – 1971. – **16**, N 11. – P. 1845–1857.
8. *Salvarezza R.C., Videla H.A., Arvia A.J.* The electrochemical behaviour of mild steel in phosphate–borate–sulphide solutions // *Corrosion Science.* – 1983. – **23**, N 7. – P. 717–725.
9. *Vukmirovic M.B., Vasiljevic N., Dimitrov N., Sierodzki K.* Diffusion-limited current density of oxygen reduction on copper // *J. Electrochem. Soc.* – 2003. – **150**, N 1. – P. 10–15.
10. *Pistorius P.C., Sandenbergh R.F.* The scanning reference electrode technique – a “corrosion microscope” // *Corros. and Coat.* – 1990. – **16**, N 5. – P. 476.
11. *Weishan Lia, Jingli Luoa.* Electric properties and pitting susceptibility of passive films formed on iron in chromate solution // *Electrochemistry Communications.* – 1999. – **1**, N 8. – P. 349–353.
12. *Silva J., Codaro E.N., Nakazato R.Z.* Influence of chromate, molybdate and tungstate on pit formation in chloride medium // *Applied Surface Science.* – 2005. – **252**, N 4. – P. 1117–1122.
13. *Розенфельд И.А., Казанский Л.И., Акимов Л.Г., Фролова Л.В.* Рентгеноэлектронное исследование неорганических ингибиторов на поверхности железа // *Защита металлов.* – 1979. – **15**, № 3. – С. 349–352.
14. *Донченко М.І., Срібна О.Г., Будько С.В., Фроленкова С.В.* Електрохімічне відновлення іонів молібдату при формуванні захисних конверсійних покриттів на сталі // *Фізико-хімічна механіка матеріалів. Пробл. корозії та протикорозійного захисту металів.* – 2008. – Спец. вип. № 7. – С. 587–592.
15. *Донченко М.І., Фроленкова С.В., Білоусова Н.А., Срібна О.Г.* Пассивуюча обробка заліза та маловуглецевої сталі для тимчасового захисту від атмосферної корозії // *Фізико-хімічна механіка матеріалів. Електрохімічний захист і корозійний контроль.* – 2007. – Спец. вип. № 6. – С. 124–129.
16. *Пон М.С.* Гетерополи- и изополиоксометаллаты / Пер. с англ. – Новосибирск: Наука, Сиб.отд., 1990. – 232 с.

Рекомендована Радою хіміко-технологічного факультету НТУУ “КПІ”

Надійшла до редакції
15 жовтня 2008 року

ТЕОРЕТИЧНІ ТА ПРИКЛАДНІ ПРОБЛЕМИ ФІЗИКО-МАТЕМАТИЧНИХ НАУК

УДК 519.21

В.В. Булдігін, О.А. Тимошенко

ТОЧНИЙ ПОРЯДОК РОСТУ РОЗВ'ЯЗКІВ СТОХАСТИЧНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВ- НЯНЬ

Вступ

У працях Й.І. Гіхмана і А.В. Скорохода [1], Г. Келлера [2], пізніше В.В. Булдігіна та інших авторів [3–6] розглядалась асимптотична поведінка розв'язку стохастичного диференціального рівняння (СДР)

$$d\xi(t) = g(\xi(t))dt + \sigma(\xi(t))dw(t),$$

$$t \geq 0, \xi(0) \equiv b, b > 0, \quad (*)$$

де w – стандартний вінерів процес; b – невід'язкова додатна стала; ξ – розв'язок СДР (*); g і σ – такі неперервні додатні функції, що рівняння (*) має єдиний та майже напевно (м. н.) неперервний розв'язок (див., наприклад, [1]). У зазначених працях розглядався випадок, коли $P\{\lim_{t \rightarrow \infty} \xi(t) = \infty\} > 0$.

Одним із результатів цих досліджень є умови, за яких *точний порядок росту* розв'язку ξ визначається невід'язковою функцією

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\xi(t)}{\mu(t)} = 1 \text{ м. н. на множині } \{\lim_{t \rightarrow \infty} \xi(t) = \infty\}, (**)$$

де μ – розв'язок звичайного диференціального рівняння (ЗДР), яке відповідає СДР (*) при $\sigma = 0$, тобто

$$d\mu(t) = g(\mu(t))dt, t \geq 0, \mu(0) = b, b > 0. \quad (***)$$

Постановка задачі

Мета статті – розгляд подібної задачі для СДР з коефіцієнтом зсуву і дифузії, які залежать від часу.

Основні результати

Розглянемо СДР

$$d\eta(t) = g(\eta(t))\varphi(t)dt + \sigma(\eta(t))\theta(t)dw(t), t \geq 0,$$

$$\eta(0) \equiv b, b > 0, \quad (1)$$

де w , b – позначення ті самі, що і в (*); η – розв'язок рівняння (1); θ – неперервна функ-

ція; g , φ і σ – неперервні додатні функції, такі, що (1) має єдиний та майже напевно неперервний розв'язок η .

Позначимо

$$\Phi(t) = \int_0^t \varphi(u)du, t \geq 0,$$

і припустимо, що

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \Phi(t) = \infty. \quad (2)$$

Зауважимо, що при $\varphi(t) = \theta(t) = 1, t \geq 0$, отримаємо рівняння (*).

Розглянемо ЗДР

$$d\mu(t) = g(\mu(t))\varphi(t)dt, t \geq 0,$$

$$\mu(0) \equiv b, b > 0. \quad (3)$$

Задача полягає в тому, щоб знайти умови, при яких розв'язок μ ЗДР (3) є точним порядком росту розв'язку η СДР (1), тобто

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\eta(t)}{\mu(t)} = 1 \text{ м. н. на множині } \{\lim_{t \rightarrow \infty} \eta(t) = \infty\}. \quad (4)$$

Покладемо

$$G(x) = \int_b^x \frac{ds}{g(s)}, x \geq b.$$

Тоді отримаємо

$$G(\mu(t)) = \Phi(t), t \geq 0,$$

і розв'язок рівняння (3) матиме вигляд

$$\mu(t) = G^{-1}(\Phi(t)), t \geq 0, \quad (5)$$

де G^{-1} – функція, обернена до функції G .

Дослідження поставленої задачі, як і в працях [1–6], складається з двох кроків. Перший крок – знаходження умов, при яких

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{G(\eta(t))}{\Phi(t)} = 1 \text{ м. н. на множині } \{\lim_{t \rightarrow \infty} \eta(t) = \infty\}. \quad (6)$$

Другим кроком є визначення умов, при яких із співвідношення (6) випливає співвідношення (4).

Далі будемо розглядати СДР (1) і ЗДР (3), де θ – неперервна функція, g , φ і σ – неперервні додатні функції, такі, що (1) має єдиний і майже напевно неперервний розв'язок η і (3) має єдиний неперервний розв'язок μ . Наступне твердження містить умови, при яких виконується співвідношення (6).

Теорема 1. Нехай η є розв'язком рівняння (1), коефіцієнти якого задовольняють такі умови:

$$а) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\int_{2^k}^{2^{k+1}} \theta^2(s) ds}{\Phi^2(2^k)} < \infty;$$

б) функція $\frac{\sigma}{g}$ є обмеженою;

в) існує похідна g' і

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{g'(\eta(t))\theta^2(t)}{\varphi(t)} = 0 \text{ м. н. на множині } \{\lim_{t \rightarrow \infty} \eta(t) = \infty\}.$$

Тоді маємо

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{G(\eta(t))}{\Phi(t)} = 1 \text{ м. н. на множині } \{\lim_{t \rightarrow \infty} \eta(t) = \infty\}.$$

Зауваження 1. Перевірка умови в) досить складна, оскільки залежить від розв'язку СДР. Тому доцільно використовувати такі достатні умови:

$$g'(x) \rightarrow 0, x \rightarrow \infty, \text{ і } \sup_t \frac{\theta^2(t)}{\varphi(t)} < \infty$$

або

$$\sup_x |g'(x)| < \infty \text{ і } \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\theta^2(t)}{\varphi(t)} = 0.$$

Зауваження 2. При $\theta(t) = 1, t \geq 0$, ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\int_{2^k}^{2^{k+1}} \theta^2(s) ds}{\Phi^2(2^k)} < \infty$$

буде збігатись, якщо при довільному фіксованому $\delta > \frac{1}{2}$ виконується нерівність

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} \Phi(t)t^{-\delta} > 0. \quad (7)$$

Крім того, умова (7) справедлива, якщо при $\beta < \frac{1}{2}$

$$\liminf_{u \rightarrow \infty} \varphi(u)u^\beta > 0.$$

У наступній теоремі розглядаються умови, за яких точним порядком росту розв'язку СДР (1) є розв'язок ЗДР (3).

Теорема 2. Нехай η є розв'язком рівняння (1), μ є розв'язком рівняння (3). Крім того, не-

хай виконуються всі умови теореми 1, а також умови:

$$а) \lim_{t \rightarrow \infty} G(t) = \infty;$$

$$б) \liminf_{t \rightarrow \infty} \int_t^{ct} \frac{du}{g(u)G(u)} > 0 \text{ для всіх } c > 1.$$

Тоді

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\eta(t)}{\mu(t)} = 1 \text{ м. н. на множині } \{\lim_{t \rightarrow \infty} \eta(t) = \infty\}.$$

Зауваження 3. Якщо $\varphi(t) = \theta(t) = 1, t \geq 0$, з теорем 1 і 2 випливають відповідні результати праць [1–6].

Відзначимо, що при виконанні умов а) і б) теореми 2 функція G зберігає еквівалентність функцій (див. [3]).

Нагадаємо умови, за яких виконується умова б) теореми 2 (див. [3]).

Твердження 1. Нехай g – додатна неперервна функція, така, що виконується умова а) теореми 2 і, крім того, або:

$$1) \limsup_{x \rightarrow \infty} \frac{g(x)G(x)}{x} < \infty;$$

2) g не зростає при великих x ;

3) існує таке $\alpha < 1$, що $0 < \inf_{x \geq 1} g(x)x^{-\alpha}, \sup_{x \geq 1} g(x) \times x^{-\alpha} < \infty$;

$$4) g^*(c) < c \text{ для всіх } c > 1, \text{ де } g^*(c) = \limsup_{x \rightarrow \infty} \frac{g(cx)}{g(x)};$$

5) g є функцією правильної зміни з індексом $\alpha < 1$ (див. [7]).

Тоді виконується умова б) теореми 2.

Доведення основних результатів

Для доведення основних результатів розглянемо допоміжні твердження.

Насамперед розглянемо СДР, яке на відміну від (1) має новий доданок у правій частині:

$$\begin{aligned} d\zeta(t) &= (\tilde{g}(\zeta(t))\varphi(t) + \tilde{g}_1(\zeta(t))\theta^2(t))dt + \\ &+ \tilde{\sigma}(\zeta(t))\theta(t)dw(t), \quad t \geq 0, \quad (8) \\ \zeta(0) &\equiv b, \quad b > 0, \end{aligned}$$

де w, b – такі самі, що і в (*); ζ – розв'язок рівняння (8); \tilde{g}_1, θ – неперервні функції; \tilde{g}, φ і $\tilde{\sigma}$ – неперервні додатні функції, такі, що (8) має єдиний та майже напевно неперервний розв'язок ζ , і виконується умова (2).

Має місце така лема.

Лема 1. Нехай ζ є розв'язком рівняння (8) і нехай виконуються такі умови:

- а) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\int_0^{2^{k+1}} \theta^2(s) ds}{\Phi^2(2^k)} < \infty$;
- б) $\lim_{x \rightarrow \infty} \tilde{g}(x) = K, K \in (0; \infty)$;
- в) функція $\tilde{\sigma}$ є обмеженою;
- г) $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{|\tilde{g}_1(\zeta(t))\theta^2(t)|}{\varphi(t)} = 0$ м. н. на множині $\{\lim_{t \rightarrow \infty} \zeta(t) = \infty\}$.

Тоді

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\zeta(t)}{\Phi(t)} = K \text{ м. н. на множині } \{\lim_{t \rightarrow \infty} \zeta(t) = \infty\}.$$

Доведення. Зауважимо, що при доведенні леми використовуються міркування такі, як і при доведенні теореми 1 з [1, §17].

Оскільки

$$\begin{aligned} \zeta(t) = \zeta(0) + \int_0^t \tilde{g}(\zeta(s))\varphi(s) ds + \int_0^t \tilde{g}_1(\zeta(s))\theta^2(s) ds + \\ + \int_0^t \tilde{\sigma}(\zeta(s))\theta(s) dw(s), \end{aligned}$$

то для доведення леми досить показати, що

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{\Phi(t)} \int_0^t \tilde{g}(\zeta(s))\varphi(s) ds = K \text{ м. н. на множині } \{\lim_{t \rightarrow \infty} \zeta(t) = \infty\}, \quad (9)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{\Phi(t)} \int_0^t \tilde{g}_1(\zeta(s))\theta^2(s) ds = 0 \text{ м. н. на множині } \{\lim_{t \rightarrow \infty} \zeta(t) = \infty\} \quad (10)$$

і

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{\Phi(t)} \int_0^t \tilde{\sigma}(\zeta(s))\theta(s) dw(s) = 0 \text{ м. н.} \quad (11)$$

Доведемо рівність (9). За умови б) леми 1 для P -майже всіх $\omega \in \{\lim_{t \rightarrow \infty} \zeta(t) = \infty\}$ існують такі $\varepsilon = \varepsilon(\omega) > 0$ і $\tau = \tau(\omega) > 0$, що $\tilde{g}(\zeta(s)) > \varepsilon$ при $s \geq \tau$. Тоді маємо

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t \tilde{g}(\zeta(s))\varphi(s) ds = \int_0^\tau \tilde{g}(\zeta(s))\varphi(s) ds + \\ + \lim_{t \rightarrow \infty} \int_\tau^t \tilde{g}(\zeta(s))\varphi(s) ds \geq \varepsilon \lim_{t \rightarrow \infty} \left(\Phi(t) - \int_0^\tau \varphi(s) ds \right), \end{aligned}$$

і згідно з умовою (2)

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t \tilde{g}(\zeta(s))\varphi(s) ds = \infty.$$

Тепер, використовуючи правило Лопіталя, маємо

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\int_0^t \tilde{g}(\zeta(s))\varphi(s) ds}{\Phi(t)} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\frac{d}{dt} \left(\int_0^t \tilde{g}(\zeta(s))\varphi(s) ds \right)}{\frac{d}{dt}(\Phi(t))} = \\ = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\tilde{g}(\zeta(t))\varphi(t)}{\varphi(t)} = K, \end{aligned}$$

і, таким чином, рівність (9) доведена.

Далі, оскільки $\int_0^t |\tilde{g}_1(\zeta(s))\theta^2(s) ds, t \geq 0$, є зростаючою функцією, то майже напевно на множині $\{\lim_{t \rightarrow \infty} \zeta(t) = \infty\}$ можливі два випадки:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t |\tilde{g}_1(\zeta(s))\theta^2(s) ds = \infty \text{ і } \lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t |\tilde{g}_1(\zeta(s))\theta^2(s) ds < \infty.$$

Розглянемо перший із них. Оскільки $\lim_{t \rightarrow \infty} \Phi(t) = \infty$, то за правилом Лопіталя і умовою г) леми 1 маємо

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\int_0^t |\tilde{g}_1(\zeta(s))\theta^2(s) ds}{\Phi(t)} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\frac{d}{dt} \left(\int_0^t |\tilde{g}_1(\zeta(s))\theta^2(s) ds \right)}{\frac{d}{dt}(\Phi(t))} = \\ = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{|\tilde{g}_1(\zeta(t))\theta^2(t)|}{\varphi(t)} = 0. \end{aligned}$$

У другому випадку очевидно, що

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\int_0^t |\tilde{g}_1(\zeta(s))\theta^2(s) ds}{\Phi(t)} = 0.$$

Отже, співвідношення (10) доведено.

Доведемо формулу (11). Для цього при фіксованому $k \geq 0$ і довільному $\varepsilon > 0$ розглянемо події

$$B_k = \left\{ \sup_{2^k \leq t \leq 2^{k+1}} \frac{1}{\Phi(t)} \left| \int_0^t \tilde{\sigma}(\zeta(s))\theta(s) dw(s) \right| > \varepsilon \right\}$$

і

$$C_k = \left\{ \sup_{2^k \leq t \leq 2^{k+1}} \frac{1}{\Phi(2^k)} \left| \int_0^t \tilde{\sigma}(\zeta(s))\theta(s) dw(s) \right| > \varepsilon \right\}.$$

Функція Φ монотонно зростає, тому $B_k \subset C_k$. Звідси та за теоремою 1 з [1, §3] має місце оцінка

$$\begin{aligned} & P \left\{ \sup_{2^k \leq t \leq 2^{k+1}} \frac{1}{\Phi(t)} \left| \int_0^t \tilde{\sigma}(\zeta(s)) \theta(s) dw(s) \right| > \varepsilon \right\} \leq \\ & \leq P \left\{ \sup_{2^k \leq t \leq 2^{k+1}} \frac{1}{\Phi(2^k)} \left| \int_0^t \tilde{\sigma}(\zeta(s)) \theta(s) dw(s) \right| > \varepsilon \right\} \leq \\ & \leq \frac{4}{\Phi^2(2^k) \varepsilon^2} \int_{2^k}^{2^{k+1}} E |\tilde{\sigma}(\zeta(s))|^2 \theta^2(s) ds \leq \\ & \frac{4M^2 \left(\int_{2^k}^{2^{k+1}} \theta^2(s) ds \right)}{\Phi^2(2^k) \varepsilon^2}, \end{aligned}$$

де $M = \sup_x \tilde{\sigma}(x) < \infty$.

Отже, маємо

$$\begin{aligned} & P \left\{ \sup_{2^k \leq t \leq 2^{k+1}} \frac{1}{\Phi(t)} \left| \int_0^t \tilde{\sigma}(\zeta(s)) \theta(s) dw(s) \right| > \varepsilon \right\} \leq \\ & \leq \frac{4M^2 \left(\int_{2^k}^{2^{k+1}} \theta^2(s) ds \right)}{\Phi^2(2^k) \varepsilon^2}. \end{aligned} \quad (12)$$

Тепер для довільних $\varepsilon > 0$ і $m \geq 1$ розглянемо подію

$$\tilde{B}_m = \left\{ \sup_{t \geq 2^m} \frac{1}{\Phi(t)} \left| \int_0^t \tilde{\sigma}(\zeta(s)) \theta(s) dw(s) \right| > \varepsilon \right\},$$

та запишемо її у вигляді

$$\tilde{B}_m = \bigcup_{k=m}^{\infty} B_k.$$

Тоді згідно з (12) отримаємо

$$\begin{aligned} & P \left\{ \sup_{t \geq 2^m} \frac{1}{\Phi(t)} \left| \int_0^t \tilde{\sigma}(\zeta(s)) \theta(s) dw(s) \right| > \varepsilon \right\} \leq \\ & \leq \sum_{k=m}^{\infty} P \left\{ \sup_{2^k \leq t \leq 2^{k+1}} \frac{1}{\Phi(t)} \left| \int_0^t \tilde{\sigma}(\zeta(s)) \theta(s) dw(s) \right| > \varepsilon \right\} \leq \Psi_m, \end{aligned}$$

де

$$\Psi_m = \sum_{k=m}^{\infty} \frac{\int_{2^k}^{2^{k+1}} \theta^2(s) ds}{\Phi^2(2^k)}, \quad m \geq 1.$$

Зауважимо, що згідно з умовою а) леми 1

$$\Psi_m \rightarrow 0 \text{ при } m \rightarrow \infty.$$

Отже, маємо

$$P \left\{ \sup_{t \geq 2^m} \frac{1}{\Phi(t)} \left| \int_0^t \tilde{\sigma}(\zeta(s)) \theta(s) dw(s) \right| > \varepsilon \right\} \leq \frac{4\Psi_m M^2}{\varepsilon^2}. \quad (13)$$

Якщо $\varepsilon \rightarrow \infty$, то для будь-яких $m \geq 1$ отримуємо

$$\frac{4\Psi_m M^2}{\varepsilon^2} \rightarrow 0.$$

Звідси випливає, що для будь-яких $m \geq 1$ матимемо

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow \infty} P \left\{ \sup_{t \geq 2^m} \frac{1}{\Phi(t)} \left| \int_0^t \tilde{\sigma}(\zeta(s)) \theta(s) dw(s) \right| > \varepsilon \right\} = 0,$$

тобто

$$P \left\{ \sup_{t \geq 2^m} \frac{1}{\Phi(t)} \left| \int_0^t \tilde{\sigma}(\zeta(s)) \theta(s) dw(s) \right| < \infty \right\} = 1.$$

Тому із співвідношення (13) та умови а) леми 1 випливає, що

$$\begin{aligned} & P \left\{ \limsup_{m \rightarrow \infty} \sup_{t \geq 2^m} \frac{1}{\Phi(t)} \left| \int_0^t \tilde{\sigma}(\zeta(s)) \theta(s) dw(s) \right| > \varepsilon \right\} = \\ & = \lim_{m \rightarrow \infty} P \left\{ \sup_{t \geq 2^m} \frac{1}{\Phi(t)} \left| \int_0^t \tilde{\sigma}(\zeta(s)) \theta(s) dw(s) \right| > \varepsilon \right\} \leq \end{aligned}$$

$$\leq \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{4\Psi_m M^2}{\varepsilon^2} = 0$$

для будь-якого $\varepsilon > 0$.

Отже, отримуємо

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{\Phi(t)} \left| \int_0^t \tilde{\sigma}(\zeta(s)) \theta(s) dw(s) \right| = 0 \text{ м. н.}$$

і формулу (11) доведено.

Із співвідношень (9)–(11) і (2) випливає, що

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\zeta(t)}{\Phi(t)} = K \text{ м. н. на множині } \{ \lim_{t \rightarrow \infty} \zeta(t) = \infty \}.$$

Лему 1 доведено.

У наступній лемі розглядається асимптотична поведінка розв'язку рівняння (1).

Лема 2. Нехай θ – неперервна функція, g , φ і σ – неперервні додатні функції, такі, що (1) має єдиний та майже напевно неперервний розв'язок η . Крім того, припустимо, що:

$$\text{а) } \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\int_{2^k}^{2^{k+1}} \theta^2(s) ds}{\Phi^2(2^k)} < \infty;$$

б) існує зростаюча, двічі неперервно диференційовна функція f , для якої $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$, $\lim_{x \rightarrow \infty} f'(x)g(x) = C > 0$, і $f'\sigma$ є обмеженою функцією;

в) $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{|f''(\eta(t))|\sigma^2(\eta(t))\theta^2(t)}{\varphi(t)} = 0$ м. н. на множині $\{\lim_{t \rightarrow \infty} \eta(t) = \infty\}$.

Тоді матимемо

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{f(\eta(t))}{\Phi(t)} = C \text{ м. н. на множині } \{\lim_{t \rightarrow \infty} \eta(t) = \infty\}.$$

Доведення. Нехай f^{-1} є обернена до f функція. Покладемо $\zeta(t) = f(\eta(t))$. Тоді $\eta(t) = f^{-1}(\zeta(t))$. Із $\lim_{t \rightarrow \infty} \eta(t) = \infty$ випливає, що $\lim_{t \rightarrow \infty} \zeta(t) = \infty$.

Застосовуючи формулу Іто, отримуємо

$$\begin{aligned} d\zeta(t) &= [f'_x(\eta(t))g(\eta(t))\varphi(t) + \\ &+ \frac{1}{2}f''_{xx}(\eta(t))\sigma^2(\eta(t))\theta^2(t)]dt + \\ &+ f'_x(\eta(t))\sigma(\eta(t))\theta(t)dw(t) = \\ &= [f'_x(f^{-1}(\zeta(t)))g(f^{-1}(\zeta(t)))\varphi(t) + \\ &+ \frac{1}{2}f''_{xx}(f^{-1}(\zeta(t)))\sigma^2(f^{-1}(\zeta(t)))\theta^2(t)]dt + \\ &+ f'_x(f^{-1}(\zeta(t)))\sigma(f^{-1}(\zeta(t)))\theta(t)dw(t). \end{aligned}$$

Таким чином, процес ζ буде розв'язком рівняння

$$d\zeta(t) = (\tilde{g}(\zeta(t))\varphi(t) + \tilde{g}_1(\zeta(t))\theta^2(t)dt + \tilde{\sigma}(\zeta(t))\theta(t)dw(t),$$

де

$$\tilde{g}(x) = f'_x(f^{-1}(x))g(f^{-1}(x)),$$

$$\tilde{g}_1(x) = \frac{1}{2}f''_{xx}(f^{-1}(x))\sigma^2(f^{-1}(x)),$$

$$\tilde{\sigma}(x) = f'_x(f^{-1}(x))\sigma(f^{-1}(x)).$$

Зауважимо, що це рівняння має вигляд (8).

Оскільки за умовою б) леми 2 $\lim_{x \rightarrow \infty} f'(x) \times g(x) = C > 0$, то матимемо $\lim_{x \rightarrow \infty} \tilde{g}(x) = C > 0$, а за умовою в) отримаємо

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{|\tilde{g}_1(\zeta(t))|\theta^2(t)}{\varphi(t)} =$$

$$= \frac{1}{2} \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{|f''_{xx}(\eta(t))|\sigma^2(\eta(t))\theta^2(t)}{\varphi(t)} = 0 \text{ м. н. на множині } \{\lim_{t \rightarrow \infty} \eta(t) = \infty\}.$$

За умовою б) леми 2 функція $f'\sigma$ є обмеженою, тому $\tilde{\sigma}$ є теж обмеженою. Отже, виконуються всі умови леми 1 і тому

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\zeta(t)}{\Phi(t)} = C \text{ м. н.}$$

Оскільки $\zeta(t) = f(\eta(t))$, то з останнього співвідношення випливає доведення теореми. Отже, маємо

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{f(\eta(t))}{\Phi(t)} = C \text{ м.н. множині } \{\lim_{t \rightarrow \infty} \eta(t) = \infty\}.$$

Лему 2 доведено.

Тепер перейдемо до доведення теореми 1.

Доведення теореми 1. Нехай $f' = \frac{1}{g}$. Тоді отримуємо

$$C = \lim_{x \rightarrow \infty} f'(x)g(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} g(x) \frac{1}{g(x)} = 1.$$

Оскільки за умовою теореми 1 функція $\frac{\sigma}{g}$ є обмеженою і

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{g'(\eta(t))\theta^2(t)}{\varphi(t)} = 0 \text{ м. н. на множині } \{\lim_{t \rightarrow \infty} \eta(t) = \infty\},$$

то

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{|f''(\eta(t))|\sigma^2(\eta(t))}{\varphi(t)} &= \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\sigma^2(\eta(t))g'(\eta(t))\theta^2(t)}{g^2(\eta(t))\varphi(t)} = 0 \text{ м. н. на множині } \\ &\quad \{\lim_{t \rightarrow \infty} \eta(t) = \infty\}. \end{aligned}$$

З обмеженості функції $\frac{\sigma}{g}$ випливає обмеженість функції $f'\sigma$. Отже, виконуються всі умови леми 2, і тому

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{G(\eta(t))}{\Phi(t)} = 1 \text{ м. н. на множині } \{\lim_{t \rightarrow \infty} \eta(t) = \infty\}.$$

Теорему 1 доведено.

Доведення теореми 2. З умов а), б) теореми 2 та леми 4.3 з [3], де треба покласти

$$f = G \text{ і } f' = \frac{1}{g}, \text{ впливає, що}$$

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{G(ct)}{G(t)} > 1 \text{ для будь-якого } c > 1.$$

Отже, згідно з теоремою 3.2 з [3], функція G^{-1} зберігає еквівалентність функцій, тому з (6) маємо

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{G(\eta(t))}{\Phi(t)} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{G^{-1}(G(\eta(t)))}{G^{-1}(\Phi(t))} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\eta(t)}{\mu(t)} = 1 \text{ м. н. на}$$

множині $\{\lim_{t \rightarrow \infty} \eta(t) = \infty\}$.

Таким чином, теорему 2 доведено.

Висновки

Результати даної статті узагальнюють результати праць [3–6].

За одержаних у статті умов розв'язок μ звичайного диференціального рівняння (3) є точним порядком росту розв'язку η стохастичного диференціального рівняння (1). Ці умови дають можливість розглядати більш загальні форми залежності коефіцієнтів зсуву та дифузії від часу.

В.В. Булдыгин, Е.А. Тимошенко

ТОЧНЫЙ ПОРЯДОК РОСТА РЕШЕНИЙ СТОХАСТИЧЕСКИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Исследуется асимптотическое поведение решений стохастических дифференциальных уравнений с коэффициентом сдвига и диффузии, которые зависят от времени $d\eta(t) = g(\eta(t))\varphi(t)dt + \sigma(\eta(t))\theta(t)dw(t)$, $\eta(0) \equiv b$. Найлены условия на функции g , φ , σ , θ , при которых точный порядок роста решения η совпадает с решением μ дифференциального уравнения $d\mu(t) = g(\mu(t))\varphi(t)dt$, $\mu(0) \equiv b$.

V.V. Buldygin, O.A. Tymoshenko

THE ASYMPTOTIC BEHAVIOUR OF THE SOLUTIONS OF STOCHASTIC DIFFERENTIAL EQUATIONS

In this paper, we study the asymptotic behaviour of the solutions of some stochastic differential equations with the coefficients, dependent on time $d\eta(t) = g(\eta(t))\varphi(t)dt + \sigma(\eta(t))\theta(t)dw(t)$, $\eta(0) \equiv b$. Moreover, we define the conditions on the functions g , φ , σ , θ , under which the asymptotic behaviour of the solution η coincides with the solution μ of the differential equation $d\mu(t) = g(\mu(t))\varphi(t)dt$, $\mu(0) \equiv b$.

1. Гихман И.И., Скороход А.В. Стохастические дифференциальные уравнения. – К.: Наук. думка, 1968. – 354 с.
2. Keller G., Kersting G., Rosler U. On the asymptotic behaviour of solutions of stochastic differential equations // Z. Wahrsch. Geb. – 1984. – 68. – P. 163–184.
3. Булдыгин В.В., Клесов О.И., Штайнебах Й.Г. PRV-властивість функцій та асимптотична поведінка розв'язків стохастичних диференціальних рівнянь // Теорія ймовірностей та мат. статистика. – 2004. – № 72. – С. 63–78.
4. Булдыгин В.В., Клесов О.И., Штайнебах Й.Г. Про деякі

властивості асимптотично квазіобернених функцій та їх застосування. I // Там же. – № 70. – С. 9–25.

5. Булдыгин В.В., Клесов О.И., Штайнебах Й.Г. Про деякі властивості асимптотично квазіобернених функцій та їх застосування. II // Там же. – № 71. – С. 63–78.
6. Buldygin V.V., Klesov O.I., Steinebach J.G., Tymoshenko O.A. On the φ -asymptotic behaviour of solutions of stochastic differential equations // Theory of stochastic processes. – 2008. – № 1. – P. 11–30.
7. Сенета Е. Правильно меняющиеся функции. – М.: Наука, 1985. – 142 с.

Рекомендована Радою фізико-математичного факультету НТУУ "КПІ"

Надійшла до редакції
25 вересня 2008 року

УДК 517.581

Н.О. Вірченко, С.М. Заїкіна

УЗАГАЛЬНЕНІ ІНТЕГРАЛЬНІ ПЕРЕТВОРЕННЯ І ЇХ ЗАСТОСУВАННЯ**Вступ**

Спеціальні функції стали ефективним теоретичним знаряддям і для вчених, і для інженерів. Розвиток математичної фізики, механіки суцільного середовища, теорії імовірностей та математичної статистики, квантової механіки, теорії моделювання, теплофізики, термомеханіки та інших наук стимулює як розвиток теорії спеціальних функцій, так і розмаїтість їх застосувань. Спеціальні функції є і ядрами багатьох інтегральних перетворень. А метод інтегральних перетворень – один із найефективніших аналітичних методів розв'язання крайових задач математичної фізики, широкого класу прикладних задач та ін.

В останні десятиріччя запроваджуються нові типи інтегральних перетворень, які знаходять застосування при розв'язанні складніших задач. Тут слід звернути увагу на працю [1], в якій подано розгорнуту картину сучасного стану теорії інтегральних перетворень, багато місця відведено інтегральним перетворенням, ядра яких містять H -функцію, визначену за допомогою інтеграла Мелліна–Бернса, підінтегральний вираз якого – це добуток ейлерових гамма-функцій.

Постановка задачі

У статті запроваджуються нові узагальнення найбільш відомих і поширених інтегральних перетворень, вивчаються їх властивості, зокрема, встановлюються рівності типу Парсеваля–Гольдштейна для деяких із них.

Класичні інтегральні перетворення

Для викладу подальшого матеріалу нагадаємо найбільш поширені класичні інтегральні перетворення:

перетворення Лапласа [3]

$$L\{f(x); y\} = \int_0^{\infty} \exp(-xy) f(x) dx; \quad (1)$$

перетворення потенціала за Віддером [4]

$$\mathfrak{F}\{f(x); y\} = \int_0^{\infty} \frac{xf(x)}{x^2 + y^2} dx; \quad (2)$$

перетворення Стілтєса [3]

$$\mathfrak{G}\{f(x); y\} = \int_0^{\infty} \frac{f(x)}{x+y} dx; \quad (3)$$

узагальнене перетворення Стілтєса [3]

$$\mathfrak{G}_p\{f(x); y\} = \int_0^{\infty} \frac{f(x)}{(x+y)^p} dx; \quad (4)$$

перетворення Мелліна [3]

$$\mathfrak{M}\{f(x); y\} = \int_0^{\infty} x^{y-1} f(x) dx; \quad (5)$$

 \mathfrak{E}_1 -перетворення [5]

$$\mathfrak{E}_1\{f(x); y\} = \int_0^{\infty} \exp(xy) E_1(xy) f(x) dx, \quad (6)$$

де $E_1(x)$ – експоненціальна інтегральна функція [6]:

$$E_1(x) = -E_i(-x) = \int_x^{\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt. \quad (7)$$

Основні результати

Запроваджуємо нові узагальнення інтегральних перетворень (1)–(6): за допомогою (τ, β) -узагальненої конфлюентної гіпергеометричної функції ${}_1\Phi_1^{\tau, \beta}(a; c; z)$ [7, 8] маємо

$$\begin{aligned} {}_1\Phi_1^{\tau, \beta}(a; c; z) &\equiv {}_1\Phi_1^{\tau, \beta}(z) = \\ &= \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(c-a)} \int_0^1 t^{a-1} (1-t)^{c-a-1} \times \\ &\times {}_1\Psi_1 \left[\begin{matrix} (c; \tau); \\ (c; \beta); \end{matrix} \middle| zt^{\tau} \right] dt, \end{aligned} \quad (8)$$

де $\operatorname{Re} c > \operatorname{Re} a > 0$; $\{\tau, \beta\} \subset \mathbb{R}$; $\tau > 0$; $\beta > 0$; $\tau - \beta < 1$; $\Gamma(a)$ – класична гамма-функція [6]; ${}_1\Phi_1$ – функція Фокса–Райта [1]; ${}_1\Psi_1(z)$ – частинний випадок узагальненої функції Райта ${}_p\Psi_q(z)$ [1]:

$${}_p\Psi_q(z) \equiv {}_p\Psi_q(z) \left[\begin{matrix} (a_i; \alpha_i)_{1, p}; \\ (b_j; \beta_j)_{1, q}; \end{matrix} \middle| z \right], \quad (9)$$

де $z \in \mathbb{C}$; $a_i, b_j \in \mathbb{C}$; $\alpha_i, \beta_j \in \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$; $(\alpha_i, \beta_j \neq 0; i = 1, 2, \dots, p; j = 1, 2, \dots, q)$.

Зображення функції ${}_p\Psi_q$ за допомогою інтеграла Мелліна–Бернса має вигляд [1]

$${}_p\Psi_q(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{L_\infty} \frac{\Gamma(s) \prod_{i=1}^p \Gamma(a_i - \alpha_i s)}{\prod_{j=1}^q \Gamma(b_j - \beta_j s)} (-z)^{-s} ds, \quad (10)$$

де шлях інтегрування L_∞ відокремлює всі полюси $b_l = -l$ ($l = 0, 1, 2, \dots$) функції $\Gamma(s)$ зліва і полюси $a_{ik} = \frac{a_i + k}{\alpha_i}$ ($i = 1, 2, \dots, p; k = 0, 1, 2, \dots$) справа; $L_\infty = L$ – контур, розміщений у горизонтальній смузі, починається з точки $-\infty + i\phi_1$ і йде до точки $-\infty + i\phi_2$ ($-\infty < \phi_1 < \phi_2 < +\infty$); $s \in C$.

Запровадимо в такому вигляді нові інтегральні перетворення:

узагальнені інтегральні перетворення Лапласа

$$\begin{aligned} \tilde{L}_1\{f(x); y\} &= \\ &= \int_0^\infty e^{-xy} {}_1\Phi_1^{\tau, \beta}(a; c; -b(xy)^\gamma) f(x) dx, \quad (11) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{L}_2\{f(x); y\} &= \\ &= \int_0^\infty x e^{-x^2 y^2} {}_1\Phi_1^{\tau, \beta}(a; c; -b(x^2 y^2)^\gamma) f(x) dx; \quad (12) \end{aligned}$$

узагальнені інтегральні перетворення потенціалу

$$\begin{aligned} \tilde{\mathfrak{P}}_1\{f(x); y\} &= \\ &= \int_0^\infty \frac{x f(x)}{x^2 + y^2} {}_2\Psi_1 \left[\begin{matrix} (a, \tau); (1, \gamma) \\ (c, \beta) \end{matrix} \middle| -b \left(\frac{x^2}{x^2 + y^2} \right)^\gamma \right] dx, \quad (13) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{\mathfrak{P}}_2\{f(x); y\} &= \\ &= \int_0^\infty \frac{x f(x)}{x^2 + y^2} {}_2\Psi_1 \left[\begin{matrix} (a, \tau); (1, \gamma) \\ (c, \beta) \end{matrix} \middle| -b \left(\frac{y^2}{x^2 + y^2} \right)^\gamma \right] dx; \quad (14) \end{aligned}$$

узагальнені інтегральні перетворення Стілтєса

$$\begin{aligned} \tilde{\mathfrak{S}}_1\{f(x); y\} &= \\ &= \int_0^\infty \frac{f(x)}{x + y} {}_2\Psi_1 \left[\begin{matrix} (a, \tau); (1, \gamma) \\ (c, \beta) \end{matrix} \middle| -b \left(\frac{x}{x + y} \right)^\gamma \right] dx, \quad (15) \end{aligned}$$

$$\tilde{\mathfrak{S}}_2\{f(x); y\} =$$

$$= \int_0^\infty \frac{f(x)}{x + y} {}_2\Psi_1 \left[\begin{matrix} (a, \tau); (1, \gamma) \\ (c, \beta) \end{matrix} \middle| -b \left(\frac{y}{x + y} \right)^\gamma \right] dx; \quad (16)$$

узагальнене інтегральне експоненціальне перетворення

$$\tilde{\mathfrak{E}}_{21}\{f(x); y\} = \int_0^\infty x e^{x^2 y^2} \tilde{E}_1(x^2 y^2) f(x) dx, \quad (17)$$

де

$$\tilde{E}_1(x) = \int_1^\infty \frac{e^{-xt}}{t} {}_2\Psi_1 \left[\begin{matrix} (a, \tau); (1, \gamma) \\ (c, \beta) \end{matrix} \middle| -b \left(1 - \frac{1}{t} \right)^\gamma \right] dt. \quad (18)$$

У формулах (11)–(18) $b \geq 0, \gamma > 0$.

Одержимо композиційні співвідношення, рівності типу Парсеваля–Гольдштейна, наведемо ілюстративні приклади.

Лема 1. При умовах існування інтегралів та їх абсолютній збіжності справедливі такі співвідношення:

$$\tilde{\mathfrak{L}}_2\{\mathfrak{L}_2\{f(x); u\}; y\} = \frac{1}{2} \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)} \tilde{\mathfrak{P}}_2\{f(x); y\}, \quad (19)$$

$$\tilde{\mathfrak{L}}_2\{\mathfrak{L}_2\{f(x); u\}; y\} = \frac{1}{2} \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)} \tilde{\mathfrak{P}}_1\{f(x); y\}, \quad (20)$$

де $\tilde{\mathfrak{L}}_2, \tilde{\mathfrak{P}}_1, \tilde{\mathfrak{P}}_2$ – оператори, задані відповідно формулами (12)–(14), а

$$\mathfrak{L}_2\{f(x); u\} = \int_0^\infty x e^{-x^2 u^2} f(x) dx. \quad (21)$$

Доведення. Використовуючи означення операторів $\tilde{\mathfrak{L}}_2, \mathfrak{L}_2$ (формули (12), (21)), маємо

$$\begin{aligned} \tilde{\mathfrak{L}}_2\{\mathfrak{L}_2\{f(x); u\}; y\} &= \\ &= \int_0^\infty u e^{-u^2 y^2} {}_1\Phi_1^{\tau, \beta}(a; c; -b(u^2 y^2)^\gamma) \times \\ &\times \left[\int_0^\infty x e^{-x^2 u^2} f(x) dx \right] du. \quad (22) \end{aligned}$$

Змінюючи порядок інтегрування у правій частині (22), що можливо завдяки абсолютній збіжності інтегралів, одержимо

$$\tilde{\mathfrak{L}}_2\{\mathfrak{L}_2\{f(x); u\}; y\} =$$

$$\begin{aligned}
 &= \int_0^\infty xf(x) \left[\int_0^\infty ue^{-u^2(y^2+x^2)} {}_1\Phi_1^{\tau,\beta}(a; c; -b(u^2y^2)^\gamma) du \right] dx = \\
 &= \frac{1}{2} \int_0^\infty xf(x) \left[\int_0^\infty e^{-z} {}_1\Phi_1^{\tau,\beta} \left(a; c; -b \left(\frac{y^2z}{x^2+y^2} \right)^\gamma \right) \frac{dz}{x^2+y^2} \right] dx = \\
 &= \frac{1}{2} \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)} \int_0^\infty \frac{xf(x)}{x^2+y^2} \times \\
 &\times \left[\sum_{n=0}^\infty \frac{\Gamma(a+\tau n)(-b)^n}{\Gamma(c+\beta n) n!} \left(\frac{y^2}{x^2+y^2} \right)^{\gamma n} \int_0^\infty e^{-z} z^{\gamma n} dz \right] dx = \\
 &= \frac{1}{2} \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)} \tilde{\mathfrak{P}}_2\{f(x); y\}.
 \end{aligned}$$

Зауважимо, що при доведенні було використано зображення функції ${}_1\Phi_1^{\tau,\beta}(z)$ у вигляді ряду [7].

Аналогічно доводимо співвідношення (20):

$$\begin{aligned}
 &\tilde{\mathcal{L}}_2\{\mathcal{L}_2\{f(x); u\}; y\} = \\
 &= \int_0^\infty ue^{-u^2y^2} \left[\int_0^\infty xe^{-x^2u^2} {}_1\Phi_1^{\tau,\beta}(a; c; -b(x^2u^2)^\gamma) f(x) dx \right] du = \\
 &= \int_0^\infty xf(x) \left[\int_0^\infty ue^{-u^2(x^2+y^2)} {}_1\Phi_1^{\tau,\beta}(a; c; -b(x^2u^2)^\gamma) du \right] dx.
 \end{aligned}$$

Після перетворень матимемо праву частину формули (20) $= \frac{1}{2} \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)} \tilde{\mathfrak{P}}_1\{f(x); y\}$.

Теорема 1 (рівність типу Парсеваля–Гольштейна щодо узагальнених інтегральних перетворень $\tilde{\mathcal{L}}_2$ і $\tilde{\mathfrak{P}}_2$). При умовах існування відповідних інтегралів та їх абсолютній збіжності справедлива рівність

$$\begin{aligned}
 &\int_0^\infty x \tilde{\mathcal{L}}_2\{f(y); x\} L_2\{g(z); x\} dx = \\
 &= \frac{1}{2} \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)} \int_0^\infty yf(y) \tilde{\mathfrak{P}}_2\{g(z); y\} dy. \quad (23)
 \end{aligned}$$

Доведення. Застосовуючи формули (12), (21) і змінюючи порядок інтегрування, матимемо

$$\begin{aligned}
 &\int_0^\infty x \tilde{\mathcal{L}}_2\{f(y); x\} L_2\{g(z); x\} dx = \\
 &= \int_0^\infty x \mathcal{L}_2\{g(z); x\} \left(\int_0^\infty yf(y) \times
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &\times e^{-x^2y^2} {}_1\Phi_1^{\tau,\beta}(a; c; -b(x^2y^2)^\gamma) dy \right) dx = \\
 &= \int_0^\infty yf(y) \left(\int_0^\infty xe^{-x^2y^2} {}_1\Phi_1^{\tau,\beta}(a; c; -b(x^2y^2)^\gamma) dx \right) dy = \\
 &= \int_0^\infty yf(y) \tilde{\mathcal{L}}_2\{L_2\{g(z); x\}; y\} dy.
 \end{aligned}$$

Використавши лему 1, одержимо (23).

Наслідок. Із (23) випливає рівність

$$\int_0^\infty x\varphi(x) \tilde{\mathcal{L}}_2\{f(z); x\} dx = \int_0^\infty yf(y) L_2\{\varphi(x); y\} dy. \quad (24)$$

Справді, якщо покласти $\varphi(x) = \mathcal{L}_2\{g(z); x\}$ в (23), то одержимо (24).

Покажемо, що деяка композиція узагальнених інтегральних перетворень Лапласа дасть узагальнене інтегральне експоненціальне перетворення \mathfrak{E}_{21} . Справедлива така лема.

Лема 2. При умовах існування відповідних інтегралів та їх абсолютній збіжності виконуються співвідношення

$$\begin{aligned}
 &\mathcal{L}_2\{\tilde{\mathcal{L}}_2\{\mathcal{L}_2\}\} = \\
 &= \frac{1}{2} \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)} \mathcal{L}_2\{\tilde{\mathfrak{P}}_2\{f(x); u\}; y\}, \quad (25)
 \end{aligned}$$

$$\tilde{\mathcal{L}}_2^3\{f(x); y\} = \frac{1}{4} \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)} \tilde{\mathfrak{E}}_{21}\{f(x); y\}. \quad (26)$$

Доведення. Розглянемо композицію

$$\begin{aligned}
 &\mathcal{L}_2\{\tilde{\mathcal{L}}_2\{\mathcal{L}_2\}\} = \frac{1}{2} \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)} \mathcal{L}_2\{\tilde{\mathfrak{P}}_2\{f(x); u\}; y\} = \\
 &= \frac{1}{2} \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)} \int_0^\infty ue^{-u^2y^2} \left\{ \int_0^\infty \frac{xf(x)}{x^2+u^2} \times \right. \\
 &\times {}_2\Psi_1 \left[\begin{matrix} (a, \tau); (1, \gamma); \\ (c, \beta); \end{matrix} \middle| -b \left(\frac{u^2}{x^2+u^2} \right)^\gamma \right] dx \Big\} du = \\
 &= \frac{1}{4} \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)} \int_0^\infty xf(x) \times
 \end{aligned}$$

$$\times \left\{ \int_0^\infty \frac{e^{-uy^2}}{x^2+u} dx {}_2\Psi_1 \left[\begin{matrix} (a, \tau); (1, \gamma); \\ (c, \beta); \end{matrix} \middle| -b \left(\frac{u}{x^2+u} \right)^\gamma \right] \right\} du.$$

Зауважимо, що у фігурних дужках підінтегрального виразу останнього інтеграла стоїть уза-

гальнений оператор Стілтєса $\tilde{\mathfrak{S}}_1\{e^{-uy^2}; x^2\}$. Знаходимо його значення:

$$\tilde{\mathfrak{S}}_1\{e^{-uy^2}; x^2\} = e^{x^2y^2} \tilde{\mathfrak{E}}_1(x^2y^2),$$

де $\tilde{\mathfrak{E}}_1$ має вигляд (18). Врахувавши (17), одержимо (26).

Теорема 2 (рівність типу Парсеваля–Гольдштейна щодо узагальнених інтегральних перетворень $\mathfrak{L}_2, \tilde{\mathfrak{E}}_{21}, \tilde{\mathfrak{P}}_2$). При умовах існування відповідних інтегралів та їх абсолютній збіжності справедливі такі рівності:

$$\begin{aligned} \int_0^\infty y \mathfrak{L}_2\{f(x); y\} \tilde{\mathfrak{P}}_2\{g(u); y\} dy &= \\ &= \frac{1}{2} \int_0^\infty x f(x) \tilde{\mathfrak{E}}_{21}\{g(u); x\} dx, \end{aligned} \quad (27)$$

$$\begin{aligned} \int_0^\infty y \mathfrak{L}_2\{f(x); y\} \tilde{\mathfrak{P}}_2\{g(u); y\} dy &= \\ &= \frac{1}{2} \int_0^\infty u g(u) \tilde{\mathfrak{E}}_{21}\{f(x); u\} du. \end{aligned} \quad (28)$$

Доведення. Доведемо формулу (27) (доведення співвідношення (28) – аналогічне). Врахувавши означення $\mathfrak{L}_2, \tilde{\mathfrak{P}}_2$, матимемо

$$\begin{aligned} \int_0^\infty y \mathfrak{L}_2\{f(x); y\} \tilde{\mathfrak{P}}_2\{g(u); y\} dy &= \\ &= \int_0^\infty y \tilde{\mathfrak{P}}_2\{g(u); y\} \times \\ &\times \left[\int_0^\infty x e^{-x^2y^2} f(x) dx \right] dy = \\ &= \int_0^\infty x f(x) \mathfrak{L}_2\{\tilde{\mathfrak{P}}_2\{g(u); y\}; x\} dx = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^\infty x f(x) \tilde{\mathfrak{E}}_{21}\{g(u); x\} dx. \end{aligned}$$

Приклад 1. Якщо $\operatorname{Re} \omega < 1$, а відповідні інтеграли абсолютно збігаються, то матимемо рівність

$$\begin{aligned} \int_0^\infty y^{-\omega} \tilde{\mathfrak{P}}_1\{g(u); y\} dy &= \\ &= \Gamma\left(\frac{1-\omega}{2}\right) \frac{\Gamma(a)}{\Gamma(c)} \int_0^\infty y^\omega \tilde{\mathfrak{E}}_2\{f(x); y\} dy. \end{aligned} \quad (29)$$

За допомогою використання інтегрального перетворення Мелліна (5) останню рівність можна подати в такому вигляді:

$$\begin{aligned} \mathfrak{M}\{\tilde{\mathfrak{P}}_1\{g(u); -\omega + 1\} &= \\ &= \Gamma\left(\frac{1-\omega}{2}\right) \frac{\Gamma(a)}{\Gamma(c)} \mathfrak{M}\{\tilde{\mathfrak{E}}_2\{f(x); y\}; \omega + 1\}. \end{aligned} \quad (30)$$

Приклад 2. Якщо $\operatorname{Re} \omega > -1$, а відповідні інтеграли абсолютно збігаються, то справедлива рівність

$$\begin{aligned} \int_0^\infty x^\omega \tilde{\mathfrak{E}}_{21}\{g(u); x\} dx &= \\ &= \Gamma\left(\frac{\omega+1}{2}\right) \int_0^\infty y^{-\omega} \tilde{\mathfrak{P}}_1\{g(u); y\} dy. \end{aligned} \quad (31)$$

Використавши інтегральне перетворення Мелліна (5), рівність (31) перепишемо у вигляді

$$\begin{aligned} \mathfrak{M}\{\tilde{\mathfrak{E}}_{21}\{g(u); x\}; \omega + 1\} &= \\ &= \Gamma\left(\frac{\omega+1}{2}\right) \mathfrak{M}\{\tilde{\mathfrak{P}}_1\{g(u); -\omega + 1\}. \end{aligned} \quad (32)$$

Висновки

За допомогою узагальненої виродженої (конфлюентної) гіпергеометричної функції можна запровадити нові інтегральні перетворення. Для деяких із них наведено важливі рівності Парсеваля–Гольдштейна, які дають змогу широко застосовувати ці нові інтегральні перетворення, зокрема, і в прикладному математичному аналізі, математичній фізиці та ін.

Н.А. Вирченко, С.М. Заикина

ОБОБЩЕННЫЕ ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ И ИХ ПРИМЕНЕНИЯ

Введены новые обобщения интегральных преобразований – Лапласа, Стильтеса, потенциала, экспоненциального типа. Доказаны равенства Парсевала–Гольдштейна, даны иллюстративные примеры.

N.O. Virchenko, S.M. Zaikina

THE GENERALIZED INTEGRAL TRANSFORMATIONS AND THEIR APPLICATION

We introduce some new generalized integral transformations of Laplace, Stieltjes, potential and exponential type. Furthermore, we prove the Parseval–Goldstein equalities and provide the illustrative examples.

1. *Kilbas A.A., Saigo M. H-Transforms.* – Charman and Hall/CRC, 2004. – 390 p.
2. *Debnath L. Integral Transforms and Their Applications.* – Boca Raton: CRC Press, 1995. – 456 p.
3. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Таблицы интегральных преобразований. – М.: Наука, 1968. – Т. 1. – 344 с.
4. *Widder D.V.* A transform related to the Poisson integral for a half-plane // *Duke Math. J.* – 1966. – **33**. – P. 355–362.
5. *Srivastava H.M., Yürekli O.* A theorem on Stieltjes-type integral transforms and its applications // *Complex Var. Theory Appl.* – 1995. – **28**. – P. 159–168.
6. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции. – М.: Наука, 1965. – Т. 1. – 296 с.; Т. 2. – 296 с.; Т. 3. – 300 с.
7. *Virchenko N.O.* On some generalizations of the functions of hypergeometric type // *Intern. J. Fract. Calculus and Appl. Anal.* – 1999. – **2**, N 3. – P. 233–244.
8. *Virchenko N.* On the generalized confluent hypergeometric function and its applications // *Ibid.* – 2006. – **9**, N 2. – P.101–108.

Рекомендована Радою фізико-математичного факультету НТУУ “КПІ”

Надійшла до редакції
27 жовтня 2008 року

УДК 517.9

В.О. Капустян, О.П. Когут

ДОСТАТНІ УМОВИ СТІЙКОСТІ ВІДНОСНО ЗБУРЕНЬ ОБЛАСТІ ОДНОГО КЛАСУ ЗАДАЧ ОПТИМАЛЬНОГО КЕРУВАННЯ

Вступ

Математична модель оптимізаційної задачі (ОСР) складається з кількох незалежних математичних об'єктів: рівняння стану, обмеження на стан системи та керування, функціонала якості. Для систем із розподіленими параметрами кожна з цих складових залежить від області Ω , на якій вивчається об'єкт керування. Отже, якщо область Ω змінюється, то приходимо до абсолютно іншої задачі оптимального керування ОСР(Ω), можливо з інакшими обмеженнями, інакшим функціоналом якості та іншою крайовою задачею.

Нехай послідовність множин $\{\Omega_\epsilon\}_{\epsilon>0}$ збігається в деякому сенсі до Ω . Тоді, виходячи з класичного підходу (див., наприклад, [1–5]), оптимізаційну задачу ОСР(Ω) називають стійкою відносно заданого збурення $\{\Omega_\epsilon\}_{\epsilon>0}$ області Ω , якщо послідовність оптимальних пар збурених задач ОСР(Ω_ϵ) збігається (в певній топології) до пари, яка є оптимальною для вихідної задачі ОСР(Ω).

Постановка задачі

У даній статті розглянуто клас задач оптимального керування коефіцієнтами нелінійного еліптичного рівняння з умовами Діріхле на границі з так званими узагальнено-соленоїдальними керуваннями. Для такого класу задач визначено поняття моско-стійкості (за Моско) відносно збурень області, а саме визначено так звані моско-стійкі задачі. За мету береться отримання достатніх умов такої стійкості. Показано, що основу таких умов становлять так звані топологічні збурення області, запропоновані Дансером [4]. Досліджена асимптотична поведінка послідовності множин допустимих пар збурених задач. Отримані результати можуть служити основою для побудови субоптимальних керувань у задачах з нерегулярними областями та областями складної форми.

Об'єкт дослідження

Нехай Ω є фіксованою відкритою підмножиною певної обмеженої множини $D \subset \mathbb{R}^n$ з регулярною границею.

Для заданих $z_\partial \in L_p(D)$ і $f \in L_q(\Omega)$ розглянемо задачу оптимального керування

$$L_\Omega = \int_\Omega |y(x) - z_\partial(x)|^p dx + \int_\Omega |\nabla y(x)|_{\mathbb{R}^n}^p dx \quad (1)$$

при обмеженнях

$$\mathcal{U} \in L_\infty^{n \times n}(D), \mathcal{U} \in U_{\text{sol}}, y \in \dot{W}_p^1(\Omega), \quad (2)$$

$$-\text{div}(\mathcal{U}(x)|\nabla y|^{p-2} \nabla y) + a_0(x)|y|^{p-2} y = f \quad \text{в } \Omega, \quad (3)$$

де $a_0(x) \geq 0$; U_{sol} – клас узагальнено-соленоїдальних матриць:

$$U_{\text{sol}} = \left\{ \left. \begin{array}{l} a_{ij} \in L_\infty(D) \\ 0 < \delta \leq \xi_1(x) \leq a_{ij}(x) \leq \xi_2(x) \text{ майже скрізь (м.с.) у } D, \\ \exists \alpha > 0 \quad \forall \eta \in \mathbb{R}^n \\ \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) |\eta_j|^{p-2} \eta_i \eta_j \geq \\ \geq \alpha \|\eta\|_{\mathbb{R}^n}^p \text{ м.с. у } D \end{array} \right\} \cap V. \quad (4)$$

Тут ξ_1, ξ_2 – задані функції з простору $L_\infty(D)$, такі, що

$$0 < \delta \leq \xi_1(x) \leq \xi_2(x) \quad \text{м.с. у } D, \quad (5)$$

а множина V визначається як

$$V = \{\mathcal{U} = [\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n] \mid \text{div } \mathbf{u}_i \in Q_i \quad \forall i = 1, \dots, n\},$$

де $\{Q_1, \dots, Q_n\}$ – компактні множини в просторі $W_q^{-1}(D)$. Множиною допустимих розв'язків Ξ задачі (1)–(3) називатимемо сукупність пар $(\mathcal{U}, y) \in L_\infty^{n \times n}(\Omega) \times \dot{W}_p^1(\Omega)$, які пов'язані співвідношеннями (2), (3). Через τ позначатимемо топологію в просторі $L_\infty^{n \times n}(\Omega) \times \dot{W}_p^1(\Omega)$ як добуток *-слабкої топології в $L_\infty^{n \times n}(\Omega)$ та слабкої топології в просторі $\dot{W}_p^1(\Omega)$.

Виходячи з (4), (5), легко побачити, що нелінійний еліптичний оператор у рівнянні (3) є коерцитивним, строго монотонним та демінеперервним. Цього достатньо, щоб стверджувати однозначну розв'язність крайової задачі (1)–(3) (див. [6]). Тоді, за аналогією з [7], легко показати, що задача (1)–(3) є розв'язною в класі узагальнено-соленоїдальних керувань (див. також [8]).

У даній статті досліджується асимптотична поведінка розв'язків $(U_\epsilon^{\text{opt}}, y_\epsilon^{\text{opt}})$ задач оптимального керування

$$L_{\Omega_\epsilon}(U_\epsilon, y_\epsilon) = \int_{\Omega_\epsilon} |y_\epsilon(x) - z_0(x)|^p dx + \int_{\Omega_\epsilon} |\nabla y_\epsilon(x)|_{\mathbb{R}^n}^p dx \rightarrow \inf, \quad (6)$$

$$-\text{div}(U_\epsilon(x) |\nabla y_\epsilon|_{\mathbb{R}^n}^{p-2} \nabla y_\epsilon) + a_0 |y_\epsilon|^{p-2} y_\epsilon = f \text{ в } \Omega_\epsilon, \quad (7)$$

$$y_\epsilon \in \overset{\circ}{W}_p^1(\Omega_\epsilon), U_\epsilon \in U_{\text{sol}} \quad (8)$$

відносно збурень $\{\Omega_\epsilon\}_{\epsilon>0}$ області $\Omega \subseteq D$. Далі ϵ означатиме малий параметр, що змінюється в межах строго спадної послідовності додатних чисел, які прямують до нуля. Припускаємо, що множина допустимих керувань U_{sol} і, відповідно, множина допустимих розв'язків $\Xi_\epsilon \subset L_\infty^{n \times n}(D) \times \overset{\circ}{W}_p^1(\Omega_\epsilon)$ непорожні для кожного $\epsilon > 0$.

Аналіз існуючих публікацій показує (див., зокрема, праці [1, 9,10]), що типовою ситуацією для крайових задач виду (2), (3) з умовами Діріхле на границі є наявність властивості “нестійкості” відносно збурень області. У зв'язку з цим зауважимо, що метою даної статті є отримання достатніх умов на збурення $\{\Omega_\epsilon\}_{\epsilon>0}$, при яких задача оптимального керування (а не лише відповідна крайова задача) буде задовольняти певні умови стійкості.

Допустимі збурення області

Надалі нам знадобиться поняття локальної соболевської p -ємності.

Означення 1. Для компактної множини K , що міститься в довільній кулі B , ємність K у B визначається таким чином:

$$C_p(E, B) =$$

$$= \inf \left\{ \int_B |\nabla \phi|^p dx \mid \forall \phi \in C_0^\infty(B), \phi \geq 1 \text{ на } K \right\}.$$

Визначимо допустимі збурення множини Ω , йдучи за Дансером (див. [4]).

Означення 2. Послідовність $\{\Omega_\epsilon\}_{\epsilon>0}$ відкритих підмножин D топологічно збігається до відкритої множини $\Omega \subseteq D$ (в позначеннях $\Omega_\epsilon^{\text{top}} \rightarrow \Omega$), якщо існують компактна множина $K_0 \subset \Omega$ нульової p -ємності ($C_p(K_0, D) = 0$) і компактна множина $K_1 \subset \mathbb{R}^n$ лебегової міри нуль, для яких справедливі такі умови:

(D1) якщо $\Omega' \subset \subset \Omega \setminus K_0$, то $\Omega' \subset \subset \Omega_\epsilon$ для достатньо малих ϵ ;

(D2) для довільної відкритої множини U , такої, що $\overline{\Omega} \cup K_1 \subset U$, маємо $\Omega_\epsilon \subset U$ для достатньо малих ϵ .

Означення 3. Нехай Ω і $\{\Omega_\epsilon\}_{\epsilon>0}$ – відкриті підмножини D . Будемо говорити, що послідовність $\{\Omega_\epsilon\}_{\epsilon>0}$ утворює топологічно допустиме збурення множини Ω (коротко, t -допустиме), якщо $\Omega_\epsilon^{\text{top}} \rightarrow \Omega$ за означенням 2.

Зауваження 1. Будемо говорити, що $\Omega \subseteq D$ є p -стійкою областю, якщо $y|_\Omega \in \overset{\circ}{W}_p^1(\Omega)$ для довільних $y \in W_p^1(\mathbb{R}^n)$, таких, що $y = 0$ м. с. на $\text{int } \Omega^c$. Зауважимо, що ця властивість справедлива для достатньо регулярних областей, наприклад таких, як ліпшицеві множини [4].

Основні результати

Далі буде досліджено асимптотичну поведінку множини допустимих пар збурених задач, введено поняття стійкості задачі оптимального керування і доведено, що за допустимих збурень ϵ стійкою не лише гранична задача Діріхле (2), (3), але й задача оптимального керування (1)–(3).

Теорема 1. Нехай Ω , $\{\Omega_\epsilon\}_{\epsilon>0}$ – відкриті підмножини D . Нехай також $\Xi_{\Omega_\epsilon} \subset L_\infty^{n \times n}(D) \times \overset{\circ}{W}_p^1(\Omega_\epsilon)$ і $\Xi_\Omega \subset L_\infty^{n \times n}(D) \times \overset{\circ}{W}_p^1(\Omega)$ – множини допустимих розв'язків задач оптимального керування (6)–(8) і (1)–(3), відповідно. Припустимо, що Ω є p -стійкою областю і $\{\Omega_\epsilon\}_{\epsilon>0}$ – її t -допустиме збурення Ω . Тоді послідовність $\{\Xi_{\Omega_\epsilon}\}_{\epsilon>0}$ збігається до Ξ_Ω за Моско, тобто:

(ΞM_1) для довільної пари $(U, y) \in \Xi_\Omega$ знайдеться послідовність $\{(U_\epsilon, y_\epsilon) \in \Xi_{\Omega_\epsilon}\}_{\epsilon>0}$, така, що

$U_\varepsilon \rightarrow U$ сильно в $L^\infty(D)$ і $\tilde{y}_\varepsilon \rightarrow \tilde{y}$ сильно в $\mathring{W}_p^1(D)$;

(ΞM_2) якщо $\{\varepsilon_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ – числова послідовність, що збігається до нуля, а $\{(U_k, y_k)\}_{k \in \mathbb{N}}$ – послідовність, для якої

$$(U_k, y_k) \in \Xi_{\Omega_{\varepsilon_k}} \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

і

$$(U_k, \tilde{y}_k) \xrightarrow{\tau} (U, \psi) \text{ в } L^\infty(D) \times \mathring{W}_p^1(D),$$

то існує функція $y = \mathring{W}_p^1(\Omega)$, така, що $y = \psi|_\Omega$ і $(U, y) \in \Xi_\Omega$.

Зауваження 2. Тут і далі через \tilde{y}_ε (відповідно, \tilde{y}) буде позначатися тривіальне поширення на \mathbb{R}^n функцій, визначених на Ω_ε (відповідно, на Ω), а саме $\tilde{y}_\varepsilon = \tilde{y}_\varepsilon \chi_{\Omega_\varepsilon}$ та $\tilde{y} = \tilde{y} \chi_\Omega$.

Доведення. Почнемо з властивості (ΞM_2). Оскільки кожна з пар $(U_k, y_k) \in \Xi_{\Omega_{\varepsilon_k}}$ є допустимою для відповідної задачі (6)–(8), то легко бачити, що послідовність $\{(U_k, \tilde{y}_k)\}_{k \in \mathbb{N}}$ є рівномірно обмеженою відносно норми простору $L^\infty(D) \times \mathring{W}_p^1(D)$. Отже, можемо припускати, що існує пара (U^*, y^*) , така, що (з точністю до підпослідовності, яку також будемо позначати індексом k) $(U_k, \tilde{y}_k) \xrightarrow{\tau} (U^*, y^*)$ в $L^\infty(D) \times \mathring{W}_p^1(D)$. Тоді, враховуючи секвенційну *-слабку компактність множини U_{sol} (див. [7]), маємо $U^* \in U_{\text{sol}}$.

Візьмемо як тестову функцію $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$. Оскільки $\Omega_{\varepsilon_k}^{\text{top}} \rightarrow \Omega$, то для довільного $\varphi \in C_0^\infty(\Omega \setminus K_0)$ це означає, що $\text{supp } \varphi \subset \Omega_{\varepsilon_k}$ для всіх достатньо малих значень $\varepsilon_k > 0$. А з того, що множина K_0 має нульову p -ємність, впливає, що простір $C_0^\infty(\Omega \setminus K_0)$ щільний у $\mathring{W}_p^1(\Omega)$. Це означає, що для зафіксованої вище функції $\varphi \in \mathring{W}_p^1(\Omega)$ існує послідовність $\{\varphi_k = \varphi|_{\Omega_{\varepsilon_k}}\}_{k \in \mathbb{N}}$ така, що $\tilde{\varphi}_k \rightarrow \tilde{\varphi}$ сильно в $\mathring{W}_p^1(D)$. Оскільки $(U_k, y_k) \in \Xi_{\Omega_{\varepsilon_k}}$ є допустимою парою для відповідної задачі на Ω_{ε_k} , можемо записати

$$\int_{\Omega_{\varepsilon_k}} (U_k |\nabla y_k|_{\mathbb{R}^n}^{p-2} \nabla y_k, \nabla \varphi_k)_{\mathbb{R}^n} dx + \int_{\Omega_{\varepsilon_k}} a_0 |y_k|^{p-2} y_k \varphi_k dx = \int_{\Omega_{\varepsilon_k}} f \varphi_k dx.$$

Отже, матимемо

$$\int_D (U_k |\nabla \tilde{y}_k|_{\mathbb{R}^n}^{p-2} \nabla \tilde{y}_k, \nabla \tilde{\varphi}_k)_{\mathbb{R}^n} dx + \int_D a_0 |\tilde{y}_k|^{p-2} \tilde{y}_k \tilde{\varphi}_k dx = \int_D f \tilde{\varphi}_k dx \quad \forall \varepsilon > 0. \quad (9)$$

Для перевірки (ΞM_2) перейдемо до границі в інтегральній тотожності (9) при $\varepsilon_k \rightarrow 0$. Це можна зробити, використовуючи аргументи теореми 1 праці [7]. Враховуючи, що $\varphi_k = \varphi \quad \forall k \in \mathbb{N}$, маємо

$$\int_D (U^* |\nabla y^*|_{\mathbb{R}^n}^{p-2} \nabla y^*, \nabla \tilde{\varphi})_{\mathbb{R}^n} dx + \int_D a_0 |y^*|^{p-2} y^* \tilde{\varphi} dx = \int_D f \tilde{\varphi} dx. \quad (10)$$

Залишається показати, що $y^*|_\Omega \in \mathring{W}_p^1(\Omega)$. Нехай B_0 – довільна замкнена куля, яка не перетинає $\bar{\Omega} \cup K_1$. Тоді з (7), (8) випливає, що для пари $(U_k, y_k) \in \Xi_{\Omega_{\varepsilon_k}}$ маємо $\tilde{y}_k = 0$ майже скрізь у B_0 , як тільки параметр ε_k стає достатньо малим. Оскільки \tilde{y}_k збігається до y^* сильно в $L_p(D)$, то робимо висновок, що така ж властивість має місце для граничної функції y^* . Оскільки куля B_0 вибиралася довільно, а множина K_1 має нульову лебегову міру, то $\text{supp } y^* \subset \Omega$. Тоді, за теоремою Фубіні, $\text{supp } y^* \subset \bar{\Omega}$. Отже, використовуючи властивості p -стійких областей (див. зауваження 1), приходимо до бажаного висновку: $y^*|_\Omega \in \mathring{W}_p^1(\Omega)$. Властивість (ΞM_2) доведено.

Доведемо властивість (ΞM_1). За вихідними припущеннями, множина допустимих пар Ξ_Ω для задачі (1)–(3) непорожня. Нехай $(U, y) \in \Xi_\Omega$ – її довільний елемент. Побудуємо послідовність $\{(U_\varepsilon, y_\varepsilon) \in \Xi_{\Omega_\varepsilon}\}_{\varepsilon > 0}$, яка буде задовольняти умову (Ξ_1) таким чином: $U_\varepsilon = U \quad \forall \varepsilon > 0$, а $y_\varepsilon = y|_{\Omega_\varepsilon}$, U – відповідний розв'язок крайової задачі (7), (8). Зауважимо, що такий вибір можливий, оскільки матриця U є допустимим керуванням для задачі (6)–(8) при кожному $\varepsilon > 0$. Покажемо, що $\tilde{y}_\varepsilon \rightarrow \tilde{y}$ сильно в $W_p^1(D)$. Слабка збіжність даної послідовності впливає із влас-

тивості (ΞM_2) . Згідно з умовами, накладеними на коефіцієнти матриці \mathcal{U} , за еквівалентну норму простору $\mathring{W}_p^1(D)$ можна взяти таку:

$$\|y\|_{\mathring{W}_p^1(D)} = \left(\int_D (\mathcal{U}^* |\nabla y|^{p-2} \nabla y, \nabla y)_{\mathbb{R}^n} dx + \int_D a_0(x) |y|^p dx \right)^{1/p}.$$

Достатньо встановити, що

$$\|\tilde{y}_\varepsilon\|_{\mathring{W}_p^1(D)} \rightarrow \|\tilde{y}\|_{\mathring{W}_p^1(D)} \text{ при } \varepsilon \rightarrow 0. \quad (11)$$

У рівняннях (3) і (7) за тестові функції візьмемо \tilde{y} і \tilde{y}_ε , відповідно. Переходячи до границі в (7), отримуємо

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\int_D (\mathcal{U}^* |\nabla \tilde{y}_\varepsilon|^{p-2} \nabla \tilde{y}_\varepsilon, \nabla \tilde{y}_\varepsilon)_{\mathbb{R}^n} dx + \int_D a_0 |\tilde{y}_\varepsilon|^p dx \right) &= \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (\|\tilde{y}_\varepsilon\|_{\mathring{W}_p^1(D)})^p = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_D f \tilde{y}_\varepsilon dx = \\ &= \int_D f \tilde{y} dx = \int_D (\mathcal{U}^* |\nabla \tilde{y}|^{p-2} \nabla \tilde{y}, \nabla \tilde{y})_{\mathbb{R}^n} dx + \\ &+ \int_D a_0 |\tilde{y}|^p dx = (\|\tilde{y}\|_{\mathring{W}_p^1(D)})^p. \end{aligned}$$

Отже, (11) разом зі слабкою збіжністю в $\mathring{W}_p^1(D)$ дає сильну збіжність розв'язків.

Оскільки $u_{\Omega, \mathcal{U}}$ – єдиний розв'язок задачі (1)–(3), а $(\mathcal{U}, y) \in \Xi_\Omega$, то це означає, що $y = u_{\Omega, \mathcal{U}}$. Таким чином, маємо

$$(\mathcal{U}, \tilde{y}_\varepsilon) \rightarrow (\mathcal{U}, \tilde{y}) \text{ сильно в } L_\infty^{n \times n}(D) \times \mathring{W}_p^1(D)$$

Теорему доведено.

Введемо відповідне поняття.

Означення 4. Будемо говорити, що задача оптимального керування (1)–(3) є моско-стійкою в просторі $L_\infty^{n \times n}(D) \times \mathring{W}_p^1(D)$ відносно збурення $\{\Omega_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ області Ω , якщо:

(MS_1) множина допустимих пар Ξ_Ω для (1)–(3) є границею, за Моско, послідовності $\{\Xi_{\Omega_\varepsilon}\}_{\varepsilon>0}$ множин допустимих пар збурених задач (6)–(8);

(MS_2) якщо $\{\varepsilon_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ – числова послідовність, яка збігається до нуля, а послідовність $\{(\mathcal{U}_k, y_k)\}_{k \in \mathbb{N}}$ є такою, що

$$(\mathcal{U}_k, y_k) \in \Xi_{\Omega_{\varepsilon_k}} \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

і

$$(\mathcal{U}_k, \tilde{y}_k) \xrightarrow{\tau} (\mathcal{U}, y) \text{ в } L_\infty^{n \times n}(D) \times \mathring{W}_p^1(D),$$

де $(\mathcal{U}, y|_\Omega) \in \Xi_\Omega$, то $\lim_{k \rightarrow \infty} L_{\Omega_{\varepsilon_k}}(\mathcal{U}_k, y_k) \geq L_\Omega(\mathcal{U}, y|_\Omega)$;

(MS_3) для кожної пари $(\mathcal{U}, y) \in \Xi_\Omega$ знайдеться послідовність $\{(\mathcal{U}_\varepsilon, y_\varepsilon) \in \Xi_{\Omega_\varepsilon}\}_{\varepsilon>0}$, така, що $\mathcal{U}_\varepsilon \rightarrow \mathcal{U}$ сильно в $L_\infty^{n \times n}(D)$, $\tilde{y}_\varepsilon \rightarrow \tilde{y}$ сильно в $\mathring{W}_p^1(D)$ і $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} L_{\Omega_\varepsilon}(\mathcal{U}_\varepsilon, y_\varepsilon) \leq L_\Omega(\mathcal{U}, y)$.

Теорема 2. Нехай Ω – відкрита підмножина D . Припустимо, що розподілення $z_\partial \in L_p(D)$ (див. (1)) є таким, що

$$z_\partial(x) =$$

$$= z_\partial(x) \chi_\Omega(x) \text{ для майже всіх } x \in D. \quad (12)$$

Нехай Ω є p -стійкою областю, а $\{\Omega_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ – її t -допустиме збурення Ω . Тоді задача оптимального керування (1)–(3) є моско-стійкою в $L_\infty^{n \times n}(D) \times \mathring{W}_p^1(D)$.

Доведення. Перевіримо умови (MS_1)–(MS_3) означення 4.

Умова (MS_1) доведена в теоремі 1.

Нехай $\{(\mathcal{U}_k, y_k)\}_{k \in \mathbb{N}}$ – послідовність, що задовольняє умови (MS_2), і нехай (\mathcal{U}, y) є її τ -границею. Легко побачити, що для вибраного збурення $\{\Omega_{\varepsilon_k}\}_{\varepsilon_k > 0}$ множини Ω існує функція χ^* , така, що $\chi_{\Omega_{\varepsilon_k}}$ (з точністю до підпослідовності) збігається *-слабко до χ^* в $L_\infty(D; [0, 1])$. Тоді маємо

$$\lim_{\varepsilon_k \rightarrow 0} \int_D \tilde{y}_k \varphi dx = \int_D y \varphi dx = \int_D \chi_{\Omega_{\varepsilon_k}} y \varphi dx \quad \forall \varphi \in L_q(D).$$

З іншого боку, оскільки $\tilde{y}_k \rightarrow y$ сильно в $L_p(D)$, то

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon_k \rightarrow 0} \int_D \tilde{y}_k \varphi dx \int_D &= \lim_{\varepsilon_k \rightarrow 0} \int_D \chi_{\Omega_{\varepsilon_k}} \tilde{y}_k \varphi dx = \int_D \chi^* y \varphi dx = \\ &= \int_D \chi^* \chi_{\Omega_{\varepsilon_k}} y \varphi dx \quad \forall \varphi \in L_q(D) \end{aligned}$$

є границею добутку сильно та *-слабко збіжних послідовностей. Отже, матимемо

$$\chi_\Omega(1 - \chi^*) = 0 \text{ м. с. у } D. \quad (13)$$

Знову, користуючись тим, що $\tilde{y}_k \rightarrow y$ сильно в $L_p(D)$, отримаємо $|\tilde{y}_k - z_\partial|^p \rightarrow |y - z_\partial|^p$ сильно в $L_1(D)$ і

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|\nabla \tilde{y}_k\|_{L_p^1(D)}^p \geq \|\nabla y\|_{L_p^1(D)}^p,$$

оскільки норма є напівнеперервною знизу функцією відносно слабкої збіжності. Таким чином, матимемо

$$\begin{aligned} & \lim_{k \rightarrow \infty} L_{\Omega_{\varepsilon_k}}(\mathcal{U}_k, y_k) = \\ & = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\int_D \chi_{\Omega_{\varepsilon_k}} |\tilde{y}_k - z_\partial|^p dx + \int_D |\nabla \tilde{y}_k|_{\mathbb{R}^n}^p dx \right) \geq \\ & \geq \int_D \chi^* |y - z_\partial|^p dx + \int_D |\nabla y|_{\mathbb{R}^n}^p dx = \\ & = \{z(12)\} = \int_D \chi_\Omega \chi^* |y - z_\partial|^p dx + \int_\Omega |\nabla y|_{\mathbb{R}^n}^p dx = \\ & = \{z(13)\} = \int_\Omega |y - z_\partial|^p dx + \int_\Omega |\nabla y|_{\mathbb{R}^n}^p dx = \\ & = L_\Omega(\mathcal{U}, y|_\Omega). \end{aligned}$$

Отже, умова (MS_2) виконується. Залишається перевірити останню умову означення 4. Це легко випливає із сильної збіжності $(\mathcal{U}_\varepsilon, y_\varepsilon) \rightarrow (\mathcal{U}, y)$ в $L_\infty^{n \times n}(D) \times \overset{\circ}{W}_p^1(D)$ і властивостей (12), (13). Дійсно, в цьому випадку маємо

$$\overline{\lim}_{\varepsilon \rightarrow 0} L_{\Omega_\varepsilon}(\mathcal{U}_\varepsilon, y_\varepsilon) =$$

$$\begin{aligned} & = \overline{\lim}_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\int_D \chi_{\Omega_\varepsilon} |\tilde{y}_\varepsilon - z_\partial|^p dx + \int_D |\nabla \tilde{y}_\varepsilon|_{\mathbb{R}^n}^p dx \right) = \\ & = \int_D \chi^* |y - z_\partial|^p dx + \int_D |\nabla y|_{\mathbb{R}^n}^p dx = \\ & = \int_D \chi_\Omega \chi^* |y - z_\partial|^p dx + \int_\Omega |\nabla y|_{\mathbb{R}^n}^p dx = \\ & = \int_\Omega |y - z_\partial|^p dx + \int_\Omega |\nabla y|_{\mathbb{R}^n}^p dx = L_\Omega(\mathcal{U}, y|_\Omega). \end{aligned}$$

Теорему доведено.

Висновки

За виконання отриманих у статті достатніх умов на збурення області послідовність множин допустимих розв'язків збурених задач Моско збігається в $L_\infty^{n \times n}(D) \times \overset{\circ}{W}_p^1(D)$ до множини допустимих розв'язків вихідної задачі. Щодо сформульованого поняття моско-стійкості задачі оптимального керування за вибраного типу збурень області розглянута задача є стійкою.

Подальші дослідження можуть бути направлені на отримання достатніх умов для моско-стійкості задачі керування коефіцієнтами нелінійної еліптичної крайової задачі Неймана.

В.О. Капустян, О.П. Когут

ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ УСТОЙЧИВОСТИ ОТНОСИТЕЛЬНО ВОЗМУЩЕНИЙ ОБЛАСТИ ОДНОГО КЛАССА ЗАДАЧ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

Рассмотрен класс задач оптимального управления в коэффициентах для нелинейного эллиптического уравнения с условиями Дирихле на границе с обобщенно-соленоидальными управлениями. Определено понятие устойчивости задачи оптимального управления относительно возмущений области. Получены достаточные условия на возмущения области, при которых устойчивость рассмотренной задачи имеет место.

V.O. Kapustyan, O.P. Kogut

THE SUFFICIENT CONDITIONS OF THE SHAPE STABILITY FOR PERTURBATION OF THE ONE CLASS OF OPTIMAL CONTROL PROBLEMS

We address the optimal control problems in the coefficients for a nonlinear elliptic equation with Dirichlet boundary conditions for generalized solenoidal controls. We define the shape stability concept for optimal control problems. Finally, we reveal the sufficient conditions for perturbation of the domain, under which the shape stability of the problem under study occurs.

1. Bucur D., Buttazzo G. Variational Methodth in Shape Optimization Problems // Progress in Nonlinear Differential Equations and their Applications. – Boston: Birkhä user, 2005. – P. 65.
2. Bucur D., Trebeschi P. Shape optimization problem governed by nonlinear state equations // Proc. Roy. Soc. Edinburgh. Ser. A. – 1998. – 128. – P. 943–963.
3. Dal Maso G., Ebobisse F., Ponsiglione M. A stability result for nonlinear Neumann problems under boundary variations // J. Math. Pures Appl. – 2003. – 82. – P. 503–532.
4. Dancer E.N. The effect of domains shape on the number of positive solutions of certain nonlinear equation // J. Diff. Equations. – 1990. – 87. – P. 316–339.
5. Daners D. Domain perturbation for linear and nonlinear parabolic equations // Ibid. – 1996. – 129. – Issue 2. – P. 358–400.
6. Иваненко В.И., Мельник В.С. Вариационные методы в задачах управления для систем с распределенными параметрами. – К.: Наук. думка, 1988. – 324 с.
7. Козут О.П. Про розв'язність задачі оптимального керування нелінійним еліптичним рівнянням з умовами Неймана на границі // 36. наук. пр. Сер. “Диференціальні рівняння та їх застосування”. – Дніпропетровськ: ДНУ, 2008. – С. 85–99.
8. Жиков В.В., Козлов С.М., Олейник О.Л. Усреднение дифференциальных операторов. – М.: Физматлит, 1993. – 454 с.
9. Марченко В.А., Хруслов Е.Я. Усредненные модели микронеоднородных сред. – К.: Наук. думка, 2005. – 550 с.
10. Dal Maso G., Murat F. Asymptotic behaviour and correctors for Dirichlet problem in perforated domains with homogeneous monotone operators // Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. – 1997. – 24, N 4. – P. 239–290.

Рекомендована Радою навчально-наукового комплексу “Інститут прикладного системного аналізу” НТУУ “КПІ”

Надійшла до редакції
19 листопада 2008 року

УДК 517.9

П.О. Касьянов

ПЕРІОДИЧНІ РОЗВ'ЯЗКИ ДЛЯ КЛАСУ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНО-ОПЕРАТОРНИХ ВКЛЮЧЕНЬ З ВІДОБРАЖЕННЯМИ ТИПУ S_k **Вступ**

Диференціально-операторні рівняння та включення виникають при аналізі та керуванні математичними моделями нелінійних технологічних та промислових процесів і полів [1, 2]. Оскільки монотонна і неперервна залежність між визначальними параметрами не є природною [4], то при вивченні більш точних геофізичних моделей слід брати до уваги такі нелінійні ефекти, як негладкість, немонотонність тощо [4]. Це все призводить до необхідності якісного та чисельного дослідження моделей, що описуються, зокрема, диференціальними рівняннями з частинними похідними, які містять у головній частині немонотонну нелінійність [5]. Одним з основних класів таких диференціальних операторів є клас відображень типу S_k [5–7]. Систематичне вивчення стаціонарних операторних включень з такого типу відображеннями було проведено в працях [6, 7].

Постановка задачі

Мета даної статті полягає в обґрунтуванні методу Фаєдо–Гальоркіна для періодичних розв'язків широкого класу еволюційних включень у нескінченновимірних просторах з відображеннями типу S_k , що є новим напрямком досліджень порівняно з результатами [1–12].

Еволюційні включення в нескінченновимірних просторах

Нехай V – рефлексивний банахів простір над полем дійсних чисел; H – гільбертів простір над полем дійсних чисел зі скалярним добутком (\cdot, \cdot) , ототожнений із спряженим простором H^* ; $\{V_\sigma\}_{\sigma \geq 0}$ – ланцюжок гільбертових просторів над полем дійсних чисел, таких, що $\forall \sigma_1 \geq \sigma_2 \geq 0$ $V_{\sigma_1} \subset V_{\sigma_2}$, причому вкладення неперервне та щільне. Припустимо також, що $\exists \sigma > 0$ таке, що $V_\sigma \subset V$ неперервно та щільно, а $V_\sigma \subset H$ –

компактно. Тоді одержимо такий ланцюжок неперервних та щільних вкладень:

$$V_\sigma \subset V \subset H \subset V^* \subset V_\sigma^*,$$

де V^* – спряжений до V простір; V_σ^* – спряжений до V_σ простір відносно (\cdot, \cdot) . Зауважимо, що $V_0 \equiv H$.

Введемо позначення $S = [0, T]$ – скінченний інтервал часу. Отримаємо

$$X = L_{p_0}(S; H) \cap L_p(S; V),$$

$$X_\sigma = L_{p_0}(S; V_\sigma),$$

$$X^* = L_{q_0}(S; H) + L_q(S; V^*),$$

$$X_\sigma^* = L_{q_0}(S; V_\sigma^*),$$

де $1 < p \leq p_0 < +\infty$; $\frac{1}{p_0} + \frac{1}{q_0} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Лінійний простір $W = \{y \in X \mid y' \in X^*\}$ (відповідно, $W_\sigma = \{y \in X \mid y' \in X_\sigma^*\}$) є рефлексивним банаховим простором відносно норми $\|y\|_W = \|y\|_X + \|y'\|_{X^*}$ (відповідно, $\|y\|_{W_\sigma} = \|y\|_X + \|y'\|_{X_\sigma^*}$), де y' – похідна від елемента $y \in X$ у розумінні простору скалярних розподілів $D^*(S; V_\sigma^*)$ [8].

Для довільних $v \in X$ і $f \in X^*$ ($f = f_0 + f_1$, $f_0 \in L_{q_0}(S; H)$, $f_1 \in L_q(S; V^*)$) розглянемо

$$\begin{aligned} \langle f, v \rangle = \langle f, v \rangle_X &= \int_S (f_0(\tau), v(\tau))_H d\tau + \\ &+ \int_S \langle f_1(\tau), v(\tau) \rangle_V d\tau = \int_S (f(\tau), v(\tau)) d\tau. \end{aligned}$$

Тут $\langle \cdot, \cdot \rangle_V : V^* \times V \rightarrow R$ – канонічне спарювання, що збігається на $H \times V$ із скалярним добутком (\cdot, \cdot) в H .

Для багатозначного (в загальному випадку) відображення $A: X \rightarrow 2^{X^*}$ розглянемо таку задачу:

$$\begin{cases} u' + A(u) \ni f, \\ u(0) = u(T), u \in W \subset C(S; H), \end{cases} \quad (1)$$

де $f \in X^*$ – довільний фіксований елемент. Метою даної статті є доведення розв’язності даної проблеми за допомогою методу Фаєдо–Гальоркіна.

Метод Фаєдо–Гальоркіна

За повну систему векторів $\{h_i\}_{i \geq 1} \subset V_\sigma$ візьмемо спеціальний базис [9]:

- i) $\{h_i\}_{i \geq 1}$ ортонормована в H ;
- ii) $\{h_i\}_{i \geq 1}$ ортогональна в V_σ ;
- iii) $(h_i, v)_{V_\sigma} = \lambda_i (h_i, v) \quad \forall i \geq 1, \forall v \in V_\sigma$,

де $0 \leq \lambda_1 \leq \lambda_2, \dots, \lambda_j \rightarrow \infty$ при $j \rightarrow \infty$; $(\cdot, \cdot)_{V_\sigma}$ – природний скалярний добуток у V_σ .

Для кожного $n \geq 1$ розглянемо банахові простори

$$H_n = \text{span}\{h_i\}_{i=1}^n, \quad X_n = L_{p_0}(S; H_n),$$

$$X_n^* = L_{q_0}(S; H_n), \quad W_n = \{y \in X_n \mid y' \in X_n^*\}.$$

Для будь-якого $n \geq 1$ I_n – канонічне вклядення X_n в X , $I_n^*: X^* \rightarrow X_n^*$ – спряжений до I_n . Введемо відображення: $A_n := I_n^* A I_n: X_n \rightarrow C_v(X_n^*)$, $f_n := I_n^* f \in X_n^*$. Тоді матимемо

$$\sup_{n \geq 1} \|I_n^*\|_{L(X_\sigma^*, X_\sigma^*)} = 1. \quad (2)$$

Разом із задачею (1) $\forall n \geq 1$ розглянемо такий клас задач:

$$\begin{cases} y_{n'} + A_n(y_n) \ni f_n, \\ y_n(0) = y_n(T), \quad y_n \in W_n. \end{cases} \quad (3)$$

Означення 1. Будемо говорити, що $y \in W$ – розв’язок задачі (1), отриманий методом Фаєдо–Гальоркіна, якщо y – слабка границя деякої підпослідовності $\{y_{n_k}\}_{k \geq 1}$ в просторі X послідовності розв’язків $\{y_n\}_{n \geq 1}$ відповідних задач (3).

Класи багатозначних відображень типу S_k

Позначимо через $C_v(X^*)$ сім’ю всіх неперожних замкнутих опуклих обмежених підмножин з простору X^* . Нехай $A: X \rightarrow C_v(X^*)$ – багатозначне відображення. Для нього визначимо верхню $[A(y), \omega]_+ = \sup_{d \in A(y)} \langle d, \omega \rangle_X$ і нижню $[A(y),$

$\omega]_- = \inf_{d \in A(y)} \langle d, \omega \rangle_X$ опорні функції, де $y, \omega \in X$, а також верхню $\|A(y)\|_+ = \sup_{d \in A(y)} \|d\|_{X^*}$ і нижню $\|A(y)\|_- = \inf_{d \in A(y)} \|d\|_{X^*}$ норми. Як відомо, довільні багатозначні відображення $A, B: X \rightarrow C_v(X^*)$ задовольняють такі властивості [2, 3]:

- 1) $[A(y), v_1 + v_2]_+ \leq [A(y), v_1]_+ + [A(y), v_2]_+$,
 $[A(y), v_1 + v_2]_- \geq [A(y), v_1]_- + [A(y), v_2]_-$
 $\forall y, v_1, v_2 \in X$;
- 2) $[A(y), v]_+ = -[A(y), -v]_-$,
 $[A(y) + B(y), v]_{+(-)} = [A(y), v]_{+(-)} + [B(y), v]_{+(-)}$
 $\forall y, v \in X$;
- 3) $[A(y), v]_{+(-)} \leq \|A(y)\|_{+(-)} \|v\|_X$,
 $\|A(y) + B(y)\|_+ \leq \|A(y)\|_+ + \|B(y)\|_+$,

зокрема, включення $d \in A(y)$ виконується тоді і тільки тоді, коли $[A(y), v]_+ \geq \langle d, v \rangle_X \quad \forall v \in X$.

Означення 2. Багатозначне відображення $A: X \rightarrow C_v(X^*)$ називається локально обмеженим, якщо для довільного фіксованого $y \in X$ існують такі сталі $m > 0$ і $M > 0$, що $\|A(\xi)\|_+ \leq M$ для всіх $\xi \in X: \|y - \xi\|_X \leq m$.

Означення 3. Багатозначне відображення $A: X \rightarrow C_v(X^*)$ називається скінченновимірно локально обмеженим, якщо для довільного скінченновимірного простору $F \subset X$ звуження A на F є локально обмеженим.

Означення 4. Багатозначне відображення $A: X \rightarrow C_v(X^*)$ називається λ_0 -псевдомонотонним на W_σ , якщо для будь-якої послідовності $\{y_n\}_{n \geq 0} \subset W_\sigma$, такої, що $y_n \rightarrow y_0$ слабо в W_σ , $d_n \rightarrow d_0$ слабо в X^* при $n \rightarrow +\infty$, де $d_n \in A(y_n) \quad \forall n \geq 1$, із нерівності $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \langle d_n, y_n - y_0 \rangle_X \leq 0$ випливає існування підпослідовностей $\{y_{n_k}\}_{k \geq 1}$ з $\{y_n\}_{n \geq 1}$ і $\{d_{n_k}\}_{k \geq 1}$ з $\{d_n\}_{n \geq 1}$, для яких виконується нерівність

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \langle d_{n_k}, y_{n_k} - w \rangle_X \geq [A(y_0), y_0 - w]_- \quad \forall w \in X.$$

Означення 5. Багатозначне відображення $A: X \rightarrow C_v(X^*)$ задовольняє властивість S_k на W_σ , якщо з того, що $y_n \rightarrow y_0$ слабо в W_σ , $d_n \rightarrow d$ слабо в X^* ($d_n \in A(y_n) \quad \forall n \geq 1$) та з того, що

$$\langle d_n, y_n - y_0 \rangle_X \rightarrow 0 \text{ при } n \rightarrow \infty \quad (4)$$

впливає $d \in A(y_0)$.

Означення 6. Багатозначне відображення $A: X \rightarrow 2^{X^*}$ задовольняє *властивість* (П): якщо для довільного $k > 0$, обмеженої множини $B \subset X$, $y_0 \in \in X$ і для деякого $d \in A$ ($d(y) \in A(y) \forall y \in B$) маємо $\langle d(y), y - y_0 \rangle_X \leq k_1 \forall y \in B$, то впливає існування такого $C > 0$, що $\|d(y)\|_{X^*} \leq C \forall y \in B$.

Твердження. Довільне λ_0 -псевдомонотонне на W_σ відображення задовольняє *властивість* S_k на W_σ . Якщо $\dim H < +\infty$, то має місце обернене твердження.

Основний результат

Теорема. Нехай багатозначне відображення $A: X \rightarrow C_v(X^*)$ – локально скінченновимірною обмежене, задовольняє властивість (П) на X і властивість S_k на W_σ . Припустимо, що має місце рівність (2) та для довільного $f \in X^*$ існує $r > 0$, таке, що

$$[A(y) - f, y]_+ \geq 0 \quad \forall y \in X: \|y\|_X = r. \quad (5)$$

Тоді для довільного $f \in X^*$ множина $K_H(f) := \{y \in W | y - \text{розв'язок задачі (1), отриманий методом Фаєдо–Гальоркіна}\}$ є непорожньою та слабо замкненою в X . Більше того, маємо

$$K_H(f) = \bigcap_{n \geq 1} \left[\bigcup_{m \geq n} K_m(f_m) \right]_{X_w}, \quad (6)$$

де $\forall n \geq 1 \quad K_n(f_n) = \{y_n \in X_n | y_n - \text{розв'язок задачі (3)}\}$; $[\cdot]_{X_w}$ – оператор замикання в просторі X зі слабою топологією.

Доведення. За оператор $L: D(L) \subset X \rightarrow X^*$ візьмемо оператор похідної в сенсі простору розподілів $D^*(S, V^*)$, $D(L) = W_{\text{пер}} = \{y \in W | y(0) = y(T)\}$. З лінійності похідної та леми 1.7 з [8, с. 255] впливає, що оператор L є лінійним і максимально монотонним на $D(L) = W_{\text{пер}}$. Відображення L задовольняє такі умови:

- $L_1: \forall n \geq 1, \forall x_n \in X_n \cap D(L) \quad Lx_n \in X_n^*$;
- $L_2: \forall n \geq 1 \quad D(L_n) = D(L) \cap X_n$ – щільна в X_n ;
- $L_3: \forall n \geq 1 \quad L_n: D(L_n) = D(L) \cap X_n \subset X_n \rightarrow X_n^*$ – максимально монотонний;
- $L_4: \forall y \in D(L) \quad \langle Ly, y \rangle = 0$.

Умова L_1 впливає з [10, твердження 7], умова L_2 – з [8, лема 1.5, с. 249] та з того, що $C^1(S; H_n)$ – щільна множина в $L_{p_0}(S, H_n) = X_n$.

Умова L_3 впливає з [8, лема 1.7, с. 255] (зауважимо, що в даній лемі необхідно покласти $V = H = H_n$), а умова L_4 – з [3, теорема 4.1.7].

Розв'язність апроксимаційних задач. З умов даної теореми, твердження та [11, лема 4, с. 115] впливає, що $\forall n \geq 1$ багатозначне відображення A_n задовольняє такі властивості:

- $i_1) A_n: X_n \rightarrow C_v(X_n^*)$;
- $i_2) [A_n(y) - f_n, y]_+ \geq 0 \quad \forall y \in X_n: \|y\|_X = r$;
- $i_3) A_n - \lambda_0$ -псевдомонотонне на $D(L_n)$, задовольняє властивість (П) на X_n .

Отже, внаслідок умов i_1-i_3, L_2, L_3 та [12, теорема 3.1] задача (3) має принаймні один розв'язок $y_n \in D(L_n): \|y_n\|_X \leq r$.

Граничний перехід. Маємо послідовність наближених розв'язків $\{y_n\}_{n \geq 1}$, таких, що

$$\forall n \geq 1: \|y_n\|_X \leq r, \quad (7)$$

$$\forall n \geq 1: L_n y_n + A_n(y_n) \ni f_n, y_n \in D(L_n) \subset D(L). \quad (8)$$

Лема. Нехай для деякої строго зростаючої послідовності $\{n_k\}_{k \geq 1} \subset \mathbb{N}$ послідовність $\{y_{n_k}\}_{k \geq 1}$ задовольняє такі умови:

- 1) $\forall k \geq 1 \quad y_{n_k} \in D(L_{n_k}) = D(L) \cap X_{n_k}$;
- 2) $\forall k \geq 1 \quad L_{n_k} y_{n_k} + A_{n_k}(y_{n_k}) \ni f_{n_k}$;
- 3) $y_{n_k} \rightarrow y$ слабо в X при $k \rightarrow \infty$ для деякого $y \in X$.

Тоді маємо $y \in K_H(f)$.

Доведення. З умови 2 даної леми та умови L_1 впливає, що для довільного $k \geq 1$ існує $d_{n_k} \in A(y_{n_k})$, таке, що

$$Ly_{n_k} = L_{n_k} y_{n_k} = I_{n_k}^*(f - d_{n_k}).$$

Отже, маємо

$$\langle d_{n_k}, y_{n_k} \rangle_X \leq \|f\|_{X^*} r,$$

де $\sup_{k \geq 1} \|y_{n_k}\|_X \leq r$.

Внаслідок властивості (П) для A на X існує $D > 0$, таке, що

$$\|d_{n_k}\|_{X^*} \leq D \quad \forall k \geq 1.$$

Звідси внаслідок (2) маємо

$$\sup_{k \geq 1} \|Ly_{n_k}\|_{X_\sigma^*} \leq (D + \|f\|_{X^*}) =: C_3 < +\infty.$$

Враховуючи рефлексивність простору $W_\sigma^{\text{per}} = \{y \in W_\sigma | y(0) = y(T)\}$, за теоремою Банаха–Алаоглу отримуємо, що з послідовностей $\{y_{n_k}\}_{k \geq 1}$, $\{d_{n_k}\}_{k \geq 1}$ можна виділити підпослідовності $\{y_m\} \subset \{y_{n_k}\}_{k \geq 1}$ і $\{d_m\} \subset \{d_{n_k}\}_{k \geq 1}$, такі, для яких $y \in W_\sigma^{\text{per}}$ і $d \in X^*$ мають місце збіжності: $y_m \rightarrow y$ слабко в W_σ^{per} і в X , а $d_m \rightarrow d$ слабко в X^* . Для довільного $v \in \bigcup_{n \geq 1} X_n$

$$\begin{aligned} \langle y', v \rangle &= \lim_{m \rightarrow \infty} \langle y_{m'}, v \rangle = \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} \langle f - d_m, v \rangle = \langle f - d, v \rangle. \end{aligned}$$

Із щільності $\bigcup_{n \geq 1} X_n$ в X_σ (див. [3, с. 250]) випливає,

що $y' = f - d \in X^*$. Отже, маємо $y \in D(L)$ і $Ly = f - d$. З умови 2 даної леми та з умови L_4 отримуємо

$$\begin{aligned} \langle d_m, y_m - y \rangle &= \langle f, y_m \rangle - \langle d_m, y \rangle \rightarrow \\ &\rightarrow \langle f - d, y \rangle = \langle Ly, y \rangle = 0 \end{aligned}$$

при $m \rightarrow \infty$. Отже, внаслідок властивості S_k на W_σ для A маємо, що $d \in A(y)$. Це означає, що $y' + A(y) \ni f$, звідки $y \in K_H(f)$.

Лема доведена.

Продовжимо доведення теореми. З (7) і (8) за теоремою Банаха–Алаоглу випливає існування $\{y_{n_k}\}_{k \geq 1} \subset \{y_n\}_{n \geq 1}$, $\exists y \in X$, що задовольняють умови леми. Отже, $y \in K_H(f)$.

Рівність (6) безпосередньо випливає з властивості 8 верхніх топологічних границь (див. [13, с. 345]), леми та означення розв'язку, отриманого методом Фаедо–Гальоркіна. Більше того, дана множина є слабо замкненою в X при довільному $f \in X^*$.

Теорема доведена.

Приклад

Розглянемо простий модельний приклад, який демонструє одержані узагальнення. Нехай $T > 0$, $a, b \in R$, $a < b$, $\Omega = (a, b)$, $Q = \Omega \times (0; T)$, $\Gamma_T = \partial\Omega \times (0; T)$, $V = V_\sigma = H_0^1(\Omega)$ – дійсний простір Соболева, $H = L_2(\Omega)$, $p_0 = p = 2$, $f \in L_2(0, T;$

$H^{-1}(\Omega))$, $U = [-1, 1]$. Розглянемо таку еволюційну задачу:

$$\begin{aligned} \frac{\partial y(x, t)}{\partial t} + \frac{d}{dx} \left(\alpha \frac{d}{dx} y(x, t) \right) &= \\ &= f(x, t) \text{ майже скрізь на } Q, \end{aligned} \quad (9)$$

$$y(x, 0) = y(x, T) \text{ майже скрізь на } \Omega, \quad (10)$$

$$y(x, t) = 0 \text{ майже скрізь на } \Gamma_T \quad (11)$$

на пошук розв'язків $\{y, \alpha\}$ [2, 3].

Нехай $A: X \times U \rightarrow X^*$ визначається за правилом

$$A(y, \alpha) = \frac{d}{dx} \left(\alpha \frac{d}{dx} y \right).$$

Інтегруванням частинами задачі (9)–(11) можна поставити у відповідність таку задачу:

$$y' + A(y, u) = f, y(0) = y(T) \quad (12)$$

на пошук розв'язків $\{y, \alpha\}$ у класі $W \times U$. Узагальненим розв'язком задачі (9)–(11) будемо називати розв'язок задачі (12). Дану задачу перепишемо як

$$y' + B(y) \ni f, y(0) = y(T),$$

де $B(y) = \{A(y, \alpha) | \alpha \in U\}$; $y \in X$ – багатозначне відображення, яке задовольняє властивість S_k , є +-коерцитивним, обмеженим, але не є --коерцитивним і не є λ_0 -псевдомонотонним на W_σ . Таким чином, внаслідок теореми задача (9)–(11) має узагальнений розв'язок у класі $W \times U$, що є новим результатом порівняно з результатами праць [8–12].

Висновки

За допомогою методу Фаедо–Гальоркіна можна довести розв'язність для класу диференціально-операторних включень з відображеннями типу S_k . Як приклад, можна розглянути диференціальне рівняння з частинними похідними, в якому головна частина диференціального оператора не є монотонною. Враховуючи перспективи одержаних результатів, можна обґрунтувати конструктивну розв'язність для широкого класу більш точних геофізичних моделей та задач теорії керування.

П.О. Касьянов

ПЕРИОДИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ ДЛЯ КЛАССА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-ОПЕРАТОРНЫХ ВКЛЮЧЕНИЙ С ОТОБРАЖЕНИЯМИ ТИПА S_k

Рассмотрен класс эволюционных включений с отображениями типа S_k . Методом Фаэдо–Галеркина доказано существование периодических решений. Приведен простой пример, демонстрирующий полученные обобщения.

P.O. Kasyanov

THE PERIODIC SOLUTIONS FOR A CLASS OF DIFFERENTIAL-OPERATOR INCLUSIONS WITH S_k TYPE MAPS

In this paper, we consider a class of evolution inclusions with S_k type maps. Using the Faedo–Galerkin method, the existence of periodic solutions was proved. To demonstrate the obtained generalizations, we provide a simple example.

1. *Згуровский М.З., Новиков А.Н.* Анализ и управление односторонними физическими процессами. – К.: Наук. думка, 1996. – 328 с.
2. *Згуровский М.З., Мельник В.С., Новиков А.Н.* Прикладные методы анализа и управления нелинейными процессами и полями. – К.: Наук. думка, 2004. – 590 с.
3. *Згуровский М.З., Касьянов П.О., Мельник В.С.* Дифференциально-операторные включения и вариационные неравенства в бесконечномерных пространствах. – К.: Наук. думка, 2008. – 464 с.
4. *Панагиотопулос П.* Неравенства в механике и их приложения. – М.: Мир, 1989. – 492 с.
5. *Скрыпник И.В.* Методы исследования эллиптических краевых задач. – М.: Наука, 1990. – 442 с.
6. *Капустян В.О., Касьянов П.О., Козут О.П.* Властивості розв'язків класу параметризованих операторних включень // Наукові вісті НТУУ "КПІ". – 2008. – № 5. – С. 129–136.
7. *Капустян В.О., Касьянов П.О., Козут О.П.* Про розв'язність одного класу параметризованих операторних включень // Укр. мат. журн. – 2008. – 60, № 12. – С. 1619–1630.
8. *Гаевский Х., Греггер К., Захариас К.* Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения. – М.: Мир, 1978. – 336 с.
9. *Temam R.* Infinite-dimensional dynamical systems in mechanics and physics. – New York: Springer Publ. House, 1988. – 672 p.
10. *Perestyuk M.O., Kasyanov P.O., Zadoyanchuk N.V.* On Faedo–Galerkin method for evolution inclusions with w_{λ_0} -pseudomonotone maps // *Memoirs on Differential Equations and Mathematical Physics*. – 2008. – 44. – P. 105–132.
11. *Касьянов П.О., Мельник В.С.* Метод Фаэдо–Гальоркіна для дифференціально-операторних включень у банахових просторах з відображеннями w_{λ_0} -псевдомонотонного типу // 36. праць Ін-ту математики НАН України. – 2005. – 2, № 1. – С. 103–126.
12. *Касьянов П.О., Мельник В.С.* О разрешимости дифференциально-операторных включений и эволюционных вариационных неравенств, порожденных отображениями w_{λ_0} -псевдомонотонного типа // *Укр. мат. вісник*. – 2007. – 4, № 4. – С. 535–581.
13. *Куратовский К.* Топология. – В 2-х томах. – М.: Мир, 1966. – Т. 1. – 596 с.

Рекомендована Радою навчально-наукового комплексу "Інститут прикладного системного аналізу" НТУУ "КПІ"

Надійшла до редакції
3 листопада 2008 року

УДК 517.581

О.В. Овчаренко

АСИМПТОТИЧНІ РОЗВИНЕННЯ І НОВІ ЗАСТОСУВАННЯ УЗАГАЛЬНЕНОЇ ГІПЕРГЕОМЕТРИЧНОЇ ФУНКЦІЇ ГАУССА

Вступ

В останні роки в теорії спеціальних функцій відбувається процес розширення і узагальнення багатьох вже відомих класів функцій, які дають можливість розв’язувати нові задачі прикладної математики, фізики, квантової теорії поля, біомедицини тощо. Зокрема, узагальнюються гамма- і бета-функції [1], функції Лежандра [2], гіпергеометричні функції [3] та ін. Саме дослідженню нового (τ, β) -узагальнення функцій гіпергеометричного типу, їх застосуванню присвячено дану статтю.

При застосуванні цих функцій істотне значення має дослідження їх асимптотичної поведінки. Теорія асимптотичних розвинень функцій гіпергеометричного типу вже досліджувалась, але так і не була повністю завершена, оскільки використовувані методи не могли задовольнити розвинення функцій в околі деяких “критичних” ліній у комплексній площині. Цікавий метод дослідження асимптотичної поведінки гіпергеометричних функцій та знаходження асимптотичних розвинень здійснив Е. Райт [4].

Постановка задачі

Мета статті – розгляд (τ, β) -узагальнення функцій гіпергеометричного типу, дослідження властивості цих функцій, застосування їх у теорії дробового інтегро-диференціювання та в теорії інтегральних перетворень.

(τ, β) -Узагальнена гіпергеометрична функція і її властивості

Існує багато шляхів щодо узагальнення класичної гіпергеометричної функції Гаусса ${}_2F_1^{\tau, \beta}(a, b; c; z)$ [5], наприклад, запровадження нових параметрів, зміна їх кількості, узагальнення на випадок двох або більше змінних. Подамо узагальнений гіпергеометричний ряд, який отримано запровадженням p параметрів чисельника, що

відіграють ту саму роль, що й параметри a і b , і q параметрів, що відіграють роль c :

$${}_pF_q \left[\begin{matrix} \alpha_1, \dots, \alpha_p; z \\ \rho_1, \dots, \rho_q \end{matrix} \right] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha_1)_n \dots (\alpha_p)_n z^n}{(\rho_1)_n \dots (\rho_q)_n n!}, \quad (1)$$

де $(\alpha)_n$ – символ Похгаммера; $\{\alpha_i, \rho_j\} \in \mathbb{C}$ і $\alpha_i \neq 0, \rho_j \neq 0$ ($i = \overline{1, p}; j = \overline{1, q}$).

Райтом [4] було запроваджено узагальнення ряду (1) у вигляді

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\alpha_1 + \tau_1 n) \dots \Gamma(\alpha_p + \tau_p n) z^n}{\Gamma(\rho_1 + \beta_1 n) \dots \Gamma(\rho_q + \beta_q n) n!},$$

де $\{\tau_i, \beta_j\} \in \mathbb{R}, \tau_i > 0, \beta_j > 0$ ($i = \overline{1, p}; j = \overline{1, q}$) і виконується умова

$$1 + \sum_{k=0}^q \beta_k - \sum_{m=0}^p \tau_m > 0. \quad (2)$$

Вивченням властивостей цих функцій і дослідженням їх асимптотичної поведінки займалися Барнз [6], Ватсон [7], Фокс [8] та інші вчені.

Розглянемо (τ, β) -узагальнення гіпергеометричної функції Гаусса у вигляді [3]

$${}_2F_1^{\tau, \beta}(a, b; c; z) \equiv {}_2F_1^{\tau, \beta}(z) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)\Gamma(c-b)} \times \int_0^1 t^{b-1} (1-t)^{c-b-1} {}_2\Psi_1 \left[\begin{matrix} (a, 1); (c, \tau) \\ (c, \beta) \end{matrix} ; zt^\tau \right] dt, \quad (3)$$

де $\{a, b, c\} \in \mathbb{C}, \operatorname{Re} c > \operatorname{Re} b > 0, \{\tau, \beta\} \subset \mathbb{R}, \tau > 0, \beta > 0$ і виконується умова (2) для параметрів τ і β ; Γ – класична гамма-функція [9], ${}_2\Psi_1$ – функція типу Райта [10].

Лема 1. При умовах існування функції ${}_2F_1^{\tau, \beta}(z)$ мають місце такі рекурентні співвідношення:

$$\begin{aligned} & 1) \ c {}_2F_1^{\tau, \beta}(a, b; c; z) - \\ & \quad - (c - \beta a) {}_2F_1^{\tau, \beta}(a, b; c + 1; z) - \\ & \quad - a\beta {}_2F_1^{\tau, \beta}(a + 1, b; c + 1; z) = 0; \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} & 2) \ \Gamma(c + \beta + 1)\Gamma(b) {}_2F_1^{\tau, \beta}(a, b; c; z) - \\ & \quad - \Gamma(c + \beta + 1)\Gamma(b) {}_2F_1^{\tau, \beta}(a + 1, b; c + 1; z) + \\ & \quad + z(c - \beta a)\Gamma(c)\Gamma(b + \tau) {}_2F_1^{\tau, \beta}(a + 1, \\ & \quad b + \tau; c + \beta; z) = 0; \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned}
 & 3) \tau c \Gamma(c + \beta) \Gamma(b) {}_2F_1^{\tau, \beta}(a, b; c; z) - \\
 & - \beta b \Gamma(c + \beta) \Gamma(b) {}_2F_1^{\tau, \beta}(a + 1, b + 1; c + 1; z) + \\
 & + z \tau \Gamma(b + \tau) \Gamma(c + 1) {}_2F_1^{\tau, \beta}(a + 1, \\
 & b + \tau; c + \beta; z) + \\
 & + (\beta b - c \tau) \Gamma(c + \beta) \Gamma(b) {}_2F_1^{\tau, \beta}(a + 1, \\
 & b; c + 1; z) = 0. \tag{6}
 \end{aligned}$$

Доведемо, наприклад, співвідношення (6). Перепишемо цю рівність у вигляді

$$\begin{aligned}
 & c {}_2F_1^{\tau, \beta}(a, b; c; z) + \left(\frac{\beta}{\tau} b - c\right) {}_2F_1^{\tau, \beta}(a + 1, b; c + 1; z) - \\
 & - \frac{\beta}{\tau} b {}_2F_1^{\tau, \beta}(a + 1, b + 1; c + 1; z) + \\
 & + z \frac{\Gamma(b + \tau) \Gamma(c + 1)}{\Gamma(c + \beta) \Gamma(b)} {}_2F_1^{\tau, \beta}(a + 1, b + \tau; c + \beta; z) = 0.
 \end{aligned}$$

Далі, використавши зображення функції ${}_2F_1^{\tau, \beta}$ у вигляді ряду, після перетворень матимемо

$$\begin{aligned}
 & {}_2F_1^{\tau, \beta}(a, b; c; z) = \frac{1}{c} \left[\left(\frac{\beta}{\tau} b + c\right) {}_2F_1^{\tau, \beta}(a + 1, b; c + 1; z) + \right. \\
 & + \frac{\beta}{\tau} b {}_2F_1^{\tau, \beta}(a + 1, b + 1; c + 1; z) - z \frac{\Gamma(b + \tau) \Gamma(c + 1)}{\Gamma(c + \beta) \Gamma(b)} \times \\
 & \times {}_2F_1^{\tau, \beta}(a + 1, b + \tau; c + \beta; z) \Big] = \\
 & = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a + 1) \Gamma(b)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(a + n) \Gamma(b + \tau n)}{\Gamma(c + \beta n) n!} z^n \times \\
 & \times \left[\frac{\left(\frac{\beta}{\tau} b + c\right)(a + n)}{(c + \beta n)} + \frac{\frac{\beta}{\tau}(a + n)(b + \tau n)}{(c + \beta n)} - n \right] = \\
 & = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a + 1) \Gamma(b)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(a + n) \Gamma(b + \tau n)}{\Gamma(c + \beta n) n!} z^n \left[\frac{ca + \beta an}{c + \beta n} \right] = \\
 & = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b) \Gamma(a)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(a + n) \Gamma(b + \tau n)}{\Gamma(c + \beta n) n!} z^n.
 \end{aligned}$$

Доведення тверджень (4) і (5) аналогічне.

Узагальнення теореми Ердеї

Доведемо узагальнення теореми Ердеї [5, 2.4(3)] для випадку (τ, β) -узагальненої гіпергеометричної функції Гаусса.

Теорема 1. Якщо виконуються умови: $\text{Re } c > \text{Re } \lambda > 0, z \neq 1, |\arg(1 - z)| < \pi, \text{Re } c > \text{Re } b > 0, \text{Re } 2b > \text{Re } a > 0, \{\tau, \beta\} \subset R, \tau > 0, \beta > 0, \tau - \beta \leq 1$, то буде справедлива формула

$$\begin{aligned}
 & {}_2F_1^{\tau, \beta}(a, b; c; z) = \frac{\Gamma(c) \Gamma^{-1}(\lambda - b - 1)}{\Gamma(c - b) \Gamma(2b - \lambda)} \times \\
 & \times \int_0^1 t^{b-1} {}_3F_2^{\tau, \beta}(a, b, c; 2b - \lambda, c; z t^\tau) \times \\
 & \times {}_2F_1(b - c + 1, 1; \lambda - b + 1; t) dt,
 \end{aligned}$$

де ${}_2F_1$ – класична гіпергеометрична функція Гаусса [9]; ${}_3F_2^{\tau, \beta}$ – узагальнена гіпергеометрична функція [8].

Доведення. Застосуємо метод дробового диференціювання. У формулі (3) виконаємо перетворення:

$$\begin{aligned}
 & \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a) \Gamma(b) \Gamma(c - b)} \int_0^1 t^{b-1} (1 - t)^{c-b-1} \times \\
 & \times \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(a + n) \Gamma(c + \tau n)}{\Gamma(c + \beta n) n!} z^n t^{\tau n} dt.
 \end{aligned}$$

Використавши значення дробової похідної

$$\frac{d^{b-\lambda} t^{2b+\tau n-\lambda-1}}{dt^{b-\lambda}} = \frac{\Gamma(2b - \lambda + \tau n)}{\Gamma(b + \tau n)} t^{b+\tau n-1}$$

і дробове інтегрування частинами [11], матимемо

$$\begin{aligned}
 & \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a) \Gamma(b) \Gamma(c - b)} \int_0^1 (1 - t)^{c-b-1} \times \\
 & \times \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(a + n) \Gamma(c + \tau n) \Gamma(b + \tau n)}{\Gamma(c + \beta n) \Gamma(2b - \lambda + \tau n) n!} z^n \times \\
 & \times \frac{d^{b-\lambda} t^{2b+\tau n-\lambda-1}}{dt^{b-\lambda}} dt = \\
 & = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(2b - \lambda) \Gamma(c - b)} \int_0^1 (1 - t)^{c-b-1} \frac{d^{b-\lambda}}{dt^{b-\lambda}} \times \\
 & \times \{t^{2b-\lambda-1} {}_3F_2^{\tau, \beta}(a, b, c; 2b - \lambda, c; z t^\tau)\} dt = \\
 & = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(2b - \lambda) \Gamma(c - b)} \int_0^1 t^{2b-\lambda-1} {}_3F_2^{\tau, \beta}(a, b, c; 2b - \lambda, c; z t^\tau) \times \\
 & \times \frac{d^{b-\lambda}}{dt^{b-\lambda}} (1 - t)^{c-b-1}.
 \end{aligned}$$

Остаточо матимемо

$$\begin{aligned} & \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(2b-\lambda)\Gamma(c-b)} \int_0^1 t^{2b-\lambda-1} {}_3F_2^{\tau, \beta}(a, b, c; 2b-\lambda, c; zt^\tau) \times \\ & \times \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(b-c-1)_r}{r!} t^{r-b+\lambda} \frac{\Gamma(1-r)}{\Gamma(\lambda-b+1+r)} dt = \\ & = \frac{\Gamma(c)\Gamma^{-1}(\lambda-b-1)}{\Gamma(c-b)\Gamma(2b-\lambda)} \times \\ & \times \int_0^1 t^{b-1} {}_3F_2^{\tau, \beta}(a, b, c; 2b-\lambda, c; zt^\tau) \times \\ & \times {}_2F_1(b-c+1, 1; \lambda-b+1; t) dt. \end{aligned}$$

Асимптотичні розвинення (τ, β) -узагальненої гіпергеометричної функції

Досліджуватимемо асимптотичну поведінку (τ, β) -узагальненої гіпергеометричної функції Гаусса згідно з [4, 12].

Запишемо функцію ${}_2F_1^{\tau, \beta}(z)$ у вигляді ряду

$${}_2F_1^{\tau, \beta}(a, b; c; z) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(a)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{F(n)z^n}{\Gamma(1+n)},$$

де $F(t) = \Gamma(a+t)\Gamma(b+\tau t)\{\Gamma(c+\beta t)\}^{-1}$ і не має полюсів у точках $t = 0, 1, 2, \dots$

Результати, подані нижче, отримано за допомогою відомої властивості гамма-функції [4]:

$$\Gamma(\beta + ta) = \frac{(at)^{\beta+at-\frac{1}{2}}}{e^{at}} \left[\sum_{j=0}^A a_j t^{-j} + O(t^{-A}) \right], \quad (7)$$

де A — ціле додатне число, що не залежить від z ; $|\arg t| \leq \pi - \varepsilon$ і $|\arg(\beta + ta)| \leq \pi - \varepsilon$; коефіцієнти a_j залежать тільки від α, β і j . Із (7) випливає така теорема.

Теорема 2. Якщо $\{\arg t, \arg(a+t), \arg(b+\tau t), \arg(c+\beta t)\} \subset [-\pi + \varepsilon, \pi - \varepsilon]$, то можна обчислити значення p_0, p_1, p_2, \dots , такі, що виконується нерівність

$$\left| \frac{F(t)}{\left[\frac{\tau^\tau}{\beta^\beta} (\beta - \tau)^{\beta - \tau} \right]^t t!} - \sum_{j=0}^{A-1} \frac{p_j}{\Gamma\left((\beta - \tau)t - a - b + c - \frac{1}{2} + j \right)} \right| <$$

$$< \frac{\lambda}{\left| \Gamma\left((\beta - \tau)t - a - b + c - \frac{1}{2} + A \right) \right|}, \quad (8)$$

де $\lambda \equiv \lambda(\varepsilon, \tau, \beta, a, b, c, A)$, але не залежить від змінної z . Зокрема, $p_0 = \sqrt{2\pi\tau} b^{-\frac{1}{2}} (\beta - \tau)^{c-a-b}$.

Далі використовуватимемо такі позначення:

$$u = \arg z, \quad v = \arg(-z),$$

$$U = (\beta - \tau) \left(\frac{\tau^\tau}{\beta^\beta} |z| \right)^{1/(\beta - \tau)} e^{iu/(\beta - \tau)},$$

$$U_1 = |U| e^{i(v+\pi)/(\beta - \tau)}, \quad U_2 = |U| e^{i(v-\pi)/(\beta - \tau)}. \quad (9)$$

Для асимптотичного експоненціального розвинення матимемо

$$E(s) = s^{a+b-c+\frac{1}{2}} e^s \left\{ \sum_{j=0}^{A-1} p_j s^{-j} + O(s^{-A}) \right\}. \quad (10)$$

Запровадимо алгебричне розвинення. Визначимо його таким чином. Полюси функції $F(t)$ містяться серед полюсів функції $\Gamma(a+t)\Gamma(b+\tau t)$, тобто в точках

$$t = -l - a, \quad t = -\frac{l+b}{\tau} \quad (l = 0, 1, 2, \dots).$$

Якщо $F(t)$ має полюс порядку r в цих точках, то запишемо

$$rM_l \omega^{-(l+a)}, \quad rM_l \omega^{-(l+b)/\tau}$$

і вираз для залишка в цій точці

$$-\frac{\pi F(t)\omega^t}{\sin \pi t \Gamma(1+t)} = \Gamma(-t)F(t)\omega^t.$$

Якщо точка не є полюсом функції $F(t)$, то покладемо $M_l = 0$. Якщо $r > 0$, M_l — поліном, що містить у собі логарифмічні члени порядку $r - 1$, то M_l не залежить від $\ln \omega$.

Нехай Q, Q_1, Q_2 — цілі числа, такі, що

$$Q_1 + \text{Re} a < Q \leq Q_1 + \text{Re} a + 1,$$

$$Q_2 + \text{Re} b < Q\tau \leq Q_2 + \text{Re} b + 1.$$

Тоді, якщо $|\arg \omega| \leq \pi$, запишемо вираз для асимптотичного розвинення:

$$\sum_{l=0}^{Q_1} M_l \omega^{-(l+a)} + \sum_{l=0}^{Q_2} M_l \omega^{\frac{(-l+b)}{\tau}} + O(\omega^{-Q+\delta}).$$

Якщо функція $F(t)$ має скінченну кількість полюсів, то $M_l = 0$, і, починаючи з деякого номера l , більшого за \bar{Q} , \bar{Q} , можемо записати

$$D(\omega) = \sum_{l=0}^{\bar{Q}} M_l \omega^{-(l+a)} + \sum_{l=0}^{\bar{Q}} M_l \omega^{-(l+b)/\tau}. \quad (11)$$

Але $D(\omega)$ – скінченна сума. Тому для алгебричного розвинення маємо

$$H(\omega) = D(\omega) + O(\omega^{-Q+\delta}), \quad (12)$$

де Q може бути як завгодно великим.

Далі подамо ряд лем, які характеризують асимптотичну поведінку ${}_2F_1^{\tau, \beta}(a, b; c; z)$.

Лема 2. Якщо:

i) $\beta - \tau > 0$ і $|u| \leq \frac{1}{2}\pi \min\{\beta - \tau, 2\} - \varepsilon$, то

$${}_2F_1^{\tau, \beta}(a, b; c; z) = E(U);$$

ii) $\beta - \tau > 2$ і $|v| \leq \pi$, то

$${}_2F_1^{\tau, \beta}(a, b; c; z) = E(U_1) + E(U_2);$$

iii) $\beta - \tau = 2$ і $|v| \leq \pi$, то

$${}_2F_1^{\tau, \beta}(a, b; c; z) = E(U_1) + E(U_2) + H(-z),$$

де U , U_1 , U_2 , E , H – ті самі позначення, що й у формулах (9), (10), (12).

Лема 3. Якщо $0 < \beta - \tau < 2$ і якщо

1) $|v| \leq \frac{1}{2}\pi(2 - \beta + \tau) - \varepsilon$, то

$${}_2F_1^{\tau, \beta}(a, b; c; z) = H(-z);$$

2) $|u| \leq \min\left\{\pi, \frac{3}{2}\pi(\beta - \tau) - \varepsilon\right\}$, $|v| \leq \pi$, то

$${}_2F_1^{\tau, \beta}(a, b; c; z) = E(U) + H(-z).$$

Лема 4. Якщо функція $F(t)$ має скінченну кількість полюсів або не має їх зовсім, то для $\beta - \tau \geq 1$ і $|v| \leq \pi$, $|u| \leq \pi$ виконується розвинення:

i) ${}_2F_1^{\tau, \beta}(a, b; c; z) = E(U_1) + E(U_2) + D(-z)$, ($1 < \beta - \tau < 2$);

ii) ${}_2F_1^{\tau, \beta}(a, b; c; z) = E(U) + D(-z)$, ($\beta - \tau = 1$),
де D визначається формулою (11).

Застосування (τ, β) -узагальненої гіпергеометричної функції Гаусса в теорії дробового інтегро-диференціювання

Лема 5. При умовах $\operatorname{Re} \alpha > 0$, $\operatorname{Re} \eta > 0$ справедливі формули

$$(I_{\eta, \alpha}^+ {}_2F_1^{\tau, \beta})(x) = \frac{\Gamma(\eta + 1)}{\Gamma(\alpha + \eta + 1)} {}_3F_2^{\tau, \beta}(a, b, \eta + 1; c, \alpha + \eta + 1; x),$$

$$(K_{\eta, \alpha}^- {}_2F_1^{\tau, \beta})(x) = \frac{\Gamma(\eta)}{\Gamma(\alpha + \eta)} {}_3F_2^{\tau, \beta}(a, b, 1 - \alpha - \eta; c, 1 - \eta; x),$$

де ${}_3F_2^{\tau, \beta}$ – узагальнена гіпергеометрична функція, а узагальнені оператори Ердей–Кобера мають такий вигляд [11]:

$$(I_{\eta, \alpha}^+ f)(x) = \frac{x^{-\alpha-\eta}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} t^\eta f(t) dt, \quad (13)$$

$$(K_{\eta, \alpha}^- f)(x) = \frac{x^\eta}{\Gamma(\alpha)_x} \int_x^\infty (t-x)^{\alpha-1} t^{-\eta-\alpha} f(t) dt. \quad (14)$$

Доведення. Розглянемо дію оператора (13) на ${}_2F_1^{\tau, \beta}$:

$$\begin{aligned} (I_{\eta, \alpha}^+ {}_2F_1^{\tau, \beta})(x) &= \frac{x^{-\alpha-\eta}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} t^\eta {}_2F_1^{\tau, \beta}(a, b; c; t) dt = \\ &= \frac{x^{-\alpha-\eta}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} t^\eta \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(a)} \times \\ &\quad \times \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(a+n)\Gamma(b+\tau n)t^n}{\Gamma(c+\beta n)n!} dt = \\ &= \frac{x^{-\alpha-\eta}}{\Gamma(\alpha)} \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(a)} \times \\ &\quad \times \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(a+n)\Gamma(b+\tau n)}{\Gamma(c+\beta n)n!} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} t^{\eta+n} dt. \end{aligned}$$

Далі виконаємо заміну $t = \frac{y}{x}$ і обчислимо інтеграл. Остаточно матимемо

$$\frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(a)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(a+n)\Gamma(b+\tau n)\Gamma(\eta+1+n)x^n}{\Gamma(c+\beta n)\Gamma(\alpha+\eta+1+n)n!} =$$

$$= \frac{\Gamma(\eta+1)}{\Gamma(\alpha+\eta+1)} {}_3F_2^{\tau,\beta}(a, b, \eta+1; c, \alpha+\eta+1; x).$$

Друге твердження доводиться аналогічно за допомогою дії оператора (14) на ${}_2F_1^{\tau,\beta}(z)$.

Лема 6. Нехай $\{\alpha, \gamma\} \subset C$, $\text{Re} \alpha > 0$, $\text{Re} \gamma > 0$, $s \in C$, $\omega > 0$. Тоді маємо

$$(I_{0+}^{\alpha} t^{\gamma-1} {}_2F_1^{\tau,\beta}(a, b; c; rt^{\omega}))(x) =$$

$$= \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha+\gamma)} x^{\alpha+\gamma-1} {}_3F_2^{\tau,\beta,\omega}(a, b, \gamma; c, \alpha+\gamma; rx^{\omega}),$$

де I_{0+}^{α} – оператор Рімана–Ліувілля [11]:

$$(I_{0+}^{\alpha} f)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x \frac{f(t)}{(x-t)^{1-\alpha}} dt \quad (x > 0);$$

${}_3F_2^{\tau,\beta,\omega}$ – функція типу Райта.

Доведення. Використовуючи зображення ${}_2F_1^{\tau,\beta}(z)$ рядом і діючи оператором I_{0+}^{α} , маємо

$$(I_{0+}^{\alpha} t^{\gamma-1} {}_2F_1^{\tau,\beta}(a, b; c; rt^{\omega}))(x) =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(a)} \times$$

$$\times \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(a+n)\Gamma(b+\tau n)r^n t^{n\omega}}{\Gamma(c+\beta n)n!(x-t)^{1-\alpha}} t^{\gamma-1} dt =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(a)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(a+n)\Gamma(b+\tau n)r^n}{\Gamma(c+\beta n)n!} \times$$

$$\times \int_0^1 x^{\alpha+\gamma+n\omega-1} (1-y)^{\alpha-1} y^{\gamma+n\omega-1} dy =$$

$$= \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(a)} \times$$

$$\times \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(a+n)\Gamma(b+\tau n)\Gamma(\gamma+\omega n)}{\Gamma(c+\beta n)\Gamma(\alpha+\gamma+\omega n)n!} x^{\alpha+\gamma-1} (x^{\omega} r)^n =$$

$$= \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha+\gamma)} x^{\alpha+\gamma-1} {}_3F_2^{\tau,\beta,\omega}(a, b, \gamma; c, \alpha+\gamma; rx^{\omega}).$$

Лема 7. Нехай $\{\alpha, \gamma\} \subset C$, $\text{Re} \alpha > 0$, $\text{Re} \gamma > 0$, $s \in C$, $\omega > 0$. Тоді

$$\left(I_{0-}^{\alpha} t^{-\gamma} {}_2F_1^{\tau,\beta}\left(a, b; c; \frac{r}{t^{\omega}}\right) \right)(x) =$$

$$= \frac{\Gamma(\gamma-\alpha)}{\Gamma(\gamma)} x^{\alpha-\gamma} {}_3F_2^{\tau,\beta,\omega}\left(a, b, \gamma-\alpha; c, \gamma; \frac{r}{x^{\omega}}\right),$$

де I_{0-}^{α} – оператор Рімана–Ліувілля [11]:

$$(I_{0-}^{\alpha} f)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_x^{\infty} \frac{f(t)}{(t-x)^{1-\alpha}} dt \quad (x > 0).$$

Доведення аналогічне доведенню леми 6.

Висновки

Використання методу Райта дало змогу отримати асимптотичні розвинення для (τ, β) -узагальненої гіпергеометричної функції Гаусса у всій комплексній площині. Знайдені нові властивості відкривають перспективи для широкого застосування функції ${}_2F_1^{\tau,\beta}(a; b; c; z)$ в теорії дробового інтегро-диференціювання.

Е.В. Овчаренко

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ РАЗЛОЖЕНИЯ И НОВЫЕ ПРИМЕНЕНИЯ ОБОБЩЕННОЙ ГИПЕРГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ ФУНКЦИИ ГАУССА

Рассмотрено (τ, β) -обобщение функций гипергеометрического типа по Райту. Получены асимптотические разложения, новые свойства и применения этих функций в теории дробного интегро-дифференцирования.

O.V. Ovcharenko

THE ASYMPTOTIC EXPANSIONS AND NEW APPLICATION OF THE GENERALIZED HYPERGEOMETRIC GAUSSIAN FUNCTIONS

We consider the (τ, β) -generalization (according to Wright) of the functions of hypergeometric type. We also obtain the asymptotic expansions, describe new properties and consider application of these functions in the theory of fractional integration and differentiation.

1. *Virchenko N., Kalla S.L., al-Zamel A.* Some results on a generalized hypergeometric function // *Integr. and special Functions.* – 2001. – **12**, N 1. – P. 89–100.
2. *Virchenko N.O., Rumiantseva O.V.* On the generalized associated Legendre functions // *J. Fractional Calculus and Appl. Analysis.* – 2008. – **11**, N 2. – P. 175–185.
3. *Virchenko N.* On some generalizations of the functions of hypergeometric type // *Ibid.* – 1999. – **2**, N 3. – P. 233–244.
4. *Wright E.M.* The asymptotic expansion of the generalized hypergeometric function // *J. London Math. Soc.* – 1935. – **10**. – P. 287–293.
5. *Вірченко Н.О., Рум'янцева О.В.* Про (τ, β) -узагальнену гіпергеометричну функцію Гаусса та її застосування // *Доп. НАН України.* – 2008. – № 4. – С. 12–19.
6. *Barnes E.W.* The asymptotic expansion of integral functions defined by generalized hypergeometric series // *Proc. London Math. Soc.* – 1907. – **5**. – P. 59–116.
7. *Watson G.N.* A class of integral functions defined by Taylor's series // *Trans. Camb. Soc.* – 1913. – **22**. – P. 15–37.
8. *Fox C.* The asymptotic expansion of integral functions defined by generalized hypergeometric functions // *Proc. London Math. Soc.* – 1928. – **27**. – P. 389–400.
9. *Градштейн И.С., Рыжик И.М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. – М.: Наука, 1951. – 464 с.
10. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции. Т. 1. – М.: Наука, 1965. – 296 с.
11. *Вірченко Н.О., Рибак В.Я.* Основи дробового інтегродиференціювання. Навч. пос. – К.: ТОВ "Задруга", 2007. – 364 с.
12. *Wright E.M.* On the coefficient of power having exponential singularities // *J. London Math. Soc.* – 1933. – **8**. – P. 71–79.

Рекомендована Радою фізико-математичного факультету НТУУ "КПІ"

Надійшла до редакції
20 листопада 2008 року

РЕФЕРАТИ

УДК 336.767:330.322

Розвиток фондового ринку України як складової національної інвестиційної політики / Дергачова В.В. // Наукові вісті НТУУ “КПІ”. – 2008. – № 6. – С. 5–13.

Розглянуто альтернативні джерела фінансування відтворювальних процесів у реальному секторі національної економіки, виявлено економічні та історичні передумови знецінення ресурсної бази національної економіки, досліджено сучасний стан державної амортизаційної політики як економічного ресурсу розвитку фондового ринку України, розглянуто проблеми та перспективи розвитку ринку цінних паперів як складової національної інвестиційної політики.

Лл. 1. Табл. 1. Бібліогр.: 16 назв.

УДК 621.383

Оптичні і пасивувальні властивості нітриду кремнію / Мариненко О.А. // Наукові вісті НТУУ “КПІ”. – 2008. – № 6. – С. 14–19.

Розглянуто фізико-технологічні процеси підвищення ефективності перетворення фотоелектричних перетворювачів на основі монокристалічного і мультикристалічного кремнію. Досліджено оптичні і пасивувальні властивості плівок нітриду кремнію, отриманих плазмохімічним осадженням.

Лл. 6. Бібліогр.: 20 назв.

УДК 51-74

Стратегічне планування функціональності ERP/MRP-систем із врахуванням множинних заміщень / Гриша С.М., Іотко О.А. // Наукові вісті НТУУ “КПІ”. – 2008. – № 6. – С. 20–24.

Розглядається розширена задача стратегічного планування функціональності ERP-систем з відношенням заміщення, заданим на дугах графа. Для розв’язання задачі запропоновано використовувати гібридний алгоритм, що складається з поліноміальної та експоненційної частин. Алгоритм розв’язує поліноміальну складову задачі методом редукції до задачі про максимальний потік на мережі, а експоненційну – за допомогою оригінального генетичного алгоритму. Наводяться результати обчислювального алгоритму.

Табл. 1. Бібліогр.: 6 назв.

УДК 519.85

Побудова математичної моделі однієї комбінаторної задачі упакування прямокутників з нечіткими розмірами / Ємець О.О., Ємець Ол-ра О. // Наукові вісті НТУУ “КПІ”. – 2008. – № 6. – С. 25–33.

Визначено розміщення прямокутників з нечіткими розмірами у смугі: дотик, перетин, неперетин, а також розміщення прямокутників з нечіткими розмірами у смугі нечіткого розміру: попадання в смугу, дотик, перетин, неперетин. Побудовано нову математичну модель однієї задачі упакування прямокутників у вигляді задачі комбінаторної оптимізації на множині нечітких переставлень.

Лл. 7. Бібліогр.: 12 назв.

УДК 004.75

Системна інженерія проектів інформатизації організаційних систем / Маслянюк П.П., Майстренко О.С. // Наукові вісті НТУУ “КПІ”. – 2008. – № 6. – С. 34–42.

Системна інженерія проектів інформатизації організаційних систем охоплює всі етапи життєвого циклу інформаційно-комунікаційних систем. Ітеративно-інкрементний процес розробки, відповідно до міжнародних стандартів, на всіх фазах і ітераціях забезпечує виділення множини сутностей необхідних і достатніх для реалізації проекту інформатизації Орг.С, розробку бізнес-моделі Орг.С та розробку проекту інформаційно-комунікаційної системи для реалізації та досягнення мети проекту інформатизації Орг.С. Процес бізнес-моделювання реалізується за допомогою бізнес-профіля, який викремлює системні сутності та відношення між ними.

Лл. 9. Бібліогр.: 17 назв.

УДК 581.52

Динамічні і часові характеристики процесу співіснування / Повещенко Г.П. // Наукові вісті НТУУ “КПІ”. – 2008. – № 6. – С. 43–50.

В наш час існує нагальна загальноцивілізаційна проблема створення системної інформації типу “як співіснувати”. Наведені динамічні і часові характеристики розглядаються як певна спроба створення такої системної інформації про процес співіснування видів.

Лл. 6. Табл. 1. Бібліогр.: 5 назв.

УДК 661.74:669.14.046.554

Механічні властивості сплаву ВAl11 при різних режимах температурно-часової обробки / Кулініч А.А. // Наукові вісті НТУУ “КПІ”. – 2008. – № 6. – С. 51–54.

Досліджено вплив температурно-часових параметрів обробки розплаву і швидкості охолодження при кристалізації на структуру та рівень механічних властивостей сплаву ВAl11. Встановлено оптимальні технологічні параметри обробки досліджуваного сплаву, які дозволяють підвищити рівень його характеристик міцності до 20%, а пластичність – у три рази.

Лл. 3. Табл. 3. Бібліогр.: 5 назв.

УДК 531+534

Узагальнення варіаційної задачі про брахістохрону у випадку кочення однорідного циліндра / Легеза В.П. // Наукові вісті НТУУ “КПІ”. – 2008. – № 6. – С. 55–59.

Рух важкого однорідного циліндра розглядається як кочення вздовж шуканої кривої без ковзання. Знайдено функціонал у вигляді сумарного часу кочення циліндра і розв’язано відповідну варіаційну задачу з мінімізації цього функціонала. У параметричному вигляді визначено алгебричне рівняння напрямної лінії найшвидшого спуску циліндра.

Лл. 1. Бібліогр.: 16 назв.

УДК [678.027+678.029]002.8.001.53

Моделльні дослідження процесів переробки термопластичних матеріалів із застосуванням вторинної сировини / Магазій П.М., Мікульонок І.О., Ружинська Л.І. // Наукові вісті НТУУ "КПІ". – 2008. – № 6. – С. 60–67.

Розглянуто експериментальні дослідження процесу переробки вторинних наповнених термопластів у листові матеріали на екструзійно-валковому обладнанні. Наведено результати вимірювань енергосилових параметрів процесів одержання, калібрування та охолодження листових матеріалів, які задовільно узгоджуються з результатами теоретичних досліджень. Зроблено рекомендації щодо ведення технологічного процесу одержання целюлозовмісних вторинних поліолефінів.

Лл. 2. Табл. 3. Бібліогр.: 10 назв.

УДК 539.4: 620.17

Числовий перерахунок динамічних напружень з фотопружних ортотропних моделей на натурне тіло / Малежик М.П. // Наукові вісті НТУУ "КПІ". – 2008. – № 6. – С. 68–73.

Пропонується спосіб перерахунку динамічних напружень з фотопружної моделі на натурне тіло в плоских задачах механіки ортотропних тіл. Для оцінки способу проводиться перерахунок напружень з моделі на натурне тіло в задачі, що має теоретичний розв'язок.

Лл. 1. Бібліогр.: 11 назв.

УДК 66.02.011

Дискретні математичні моделі для розрахунку пружно-в'язкопластичних середовищ із змінною стисливістю при термосилових навантаженнях / Сахаров О.С., Сівецький В.І., Сокольський О.Л. // Наукові вісті НТУУ "КПІ". – 2008. – № 6. – С. 74–82.

На базі моментної схеми скінченних елементів побудовано універсальні співвідношення механіки суцільних середовищ, які дають можливість моделювати термонапружений стан та процеси переробки і формування таких нелінійних робочих середовищ, як розплави полімерів, сипучі та пластичні маси у виробі із врахуванням процесів тверднення і впливу залишкових напружень на властивості кінцевих виробів.

Лл. 6. Бібліогр.: 8 назв.

УДК 621.785

Азототитанування сталей і твердих сплавів / Хижняк В.Г., Курило Н.А., Летвицька І.В., Сердитов О.Т. // Наукові вісті НТУУ "КПІ". – 2008. – № 6. – С. 83–88.

Вивчено фазовий склад, будову, мікротвердість, товщину і зносостійкість захисних карбонітридних покриттів за участю азоту, вуглецю і титану на сталях та твердих сплавах. Показано, що на поверхні сталей і твердих сплавів утворюється двошарове покриття нітрид титану–карбід титану. Зносостійкість сталі У8А з карбонітридними покриттями зростає порівняно з вихідною в три-чотири рази.

Лл. 5. Табл. 1. Бібліогр.: 14 назв.

УДК 681.3+615.89

Оптимізація магнітної системи стабілізації мікросупутника за змішаним H_2/H_∞ -критерієм / Мелашенко О.М., Рижков Л.М. // Наукові вісті НТУУ "КПІ". – 2008. – № 6. – С. 89–93.

Розглядається побудова магнітної системи стабілізації мікросупутника. Оцінюється і порівнюється ефективність регуляторів з використанням різних критеріїв якості.

Лл. 4. Бібліогр.: 6 назв.

УДК 528.7:629.78

Методи, засоби та метрологічне забезпечення калібрування еталонних випромінювачів / Міхеєнко Л.А., Микитенко В.І. // Наукові вісті НТУУ "КПІ". – 2008. – № 6. – С. 94–99.

Розглянуто методи та засоби калібрування випромінювачів для прецизійного фотометричного обладнання. Розроблено інженерні методики та рекомендації щодо вибору основних елементів.

Лл. 1. Табл. 7. Бібліогр.: 11 назв.

УДК 579.8:582.284

Закономірності росту перспективних об'єктів біотехнології – базидіоміцетів роду *Coriolus* у поверхневій культурі / Клечак І.Р., Бісько Н.А., Поєдинок Н.Л., Антоненко Л.О. // Наукові вісті НТУУ "КПІ". – 2008. – № 6. – С. 100–107.

Проведено дослідження впливу складу поживного середовища на культурально-морфологічні характеристики та швидкість росту вегетативного міцелію 31 штаму грибів *Coriolus*. Показано, що швидкість росту залежала як від складу поживного середовища, так і від штамових особливостей культур. Встановлено оптимальні для культивування грибів роду *Coriolus* агаризовані середовища: картопляно-глюкозне, синтетичний Нюркранс та сусло-агар з відваром дубової кори.

Лл. 5. Табл. 2. Бібліогр.: 16 назв.

УДК 6.61.632.658.691.43

Лужне вилучення міді з гальванічних шламів / Астрелін І.М., Синюшкін О.М., Іванюк О.В. // Наукові вісті НТУУ "КПІ". – 2008. – № 6. – С. 108–113.

Теоретично визначено можливість хімічного вилучення міді з гальванічних шламів, експериментально досліджено процеси вилучення міді розчинами аміаку з модельних сумішей і реальних гальванічних шламів та процес електроекстракції міді з розчинів вилуговування. Визначено технологічні умови вилучення міді з відходів гальванічних виробництва. Запропоновано принципову технологічну схему переробки мідьвмісних гальванічних шламів з розрахунком матеріального балансу.

Лл. 2. Бібліогр.: 9 назв.

УДК 544.636

Моделювання і розрахунок робочих параметрів суперконденсатора / Ізотов В.Ю., Громадський Д.Г., Малетін Ю.А. // Наукові вісті НТУУ "КПІ". – 2008. – № 6. – С. 114–118.

Стаття присвячена вивченню впливу внутрішньої релаксації заряду на зміну основних характеристик суперконденсатора в часі. Запропоновано теоретичну модель, що описує

стан суперконденсатора залежно від режиму і тривалості експлуатації. У рамках запропонованої моделі показано, що при експериментальному визначенні параметрів суперконденсатора необхідно враховувати зміни, пов'язані з процесами внутрішньої релаксації заряду.

Л. 3. Бібліогр.: 5 назв.

УДК 620.197.3

Вплив оксоаніонів на анодну і хімічну пасивацію сталі в слабомінералізованій воді / Фроленкова С.В., Донченко М.І. // Наукові вісті НТУУ “КПІ”. – 2008. – № 6. – С. 119–126.

Досліджено вплив оксоаніонів (CrO_4^{2-} , WO_4^{2-} , MoO_4^{2-} , VO_3^- , MnO_4^- , BrO_3^- , IO_3^-) на анодну поведінку маловуглецевої сталі в слабомінералізованій воді. Показано, що найбільш ефективними пасиваторами є бромати і йодати, а молібдати зумовлюють високу стабільність анодних пасивних плівок. Запропоновано композиції добавок, які забезпечують самовільну пасивацію сталі і можуть використовуватись як інгібітори корозії в замкнених системах водного охолодження.

Л. 11. Табл. 1. Бібліогр.: 16 назв.

УДК 519.21

Точний порядок росту розв'язків стохастичних диференціальних рівнянь / Булдин В.В., Тимошенко О.А. // Наукові вісті НТУУ “КПІ”. – 2008. – № 6. – С. 127–132.

Досліджується поведінка розв'язків стохастичних диференціальних рівнянь із коефіцієнтом зсуву та дифузії, які залежать від часу: $d\eta(t) = g(\eta(t))\varphi(t)dt + \sigma(\eta(t))\theta(t)dw(t)$, $\eta(0) \equiv b$. Знайдено умови на функції g , φ , σ , θ , при яких точний порядок росту розв'язку η збігається з розв'язком μ диференціального рівняння $d\mu(t) = g(\mu(t))\varphi(t)dt$, $\mu(0) \equiv b$.

Бібліогр.: 7 назв.

УДК 517.581

Узагальнені інтегральні перетворення і їх застосування / Вірченко Н.О., Заїкіна С.М. // Наукові вісті НТУУ “КПІ”. – 2008. – № 6. – С. 133–137.

Запроваджено нові узагальнення інтегральних перетворень – Лапласа, Стільтєса, потенціалу, експоненціально

го типу. Доведено рівності Парсеваля–Гольдштейна, наведено ілюстративні приклади.

Бібліогр.: 8 назв.

УДК 517.9

Достатні умови стійкості відносно збурень області одного класу задач оптимального керування / Капустян В.О., Когут О.П. // Наукові вісті НТУУ “КПІ”. – 2008. – № 6. – С. 138–143.

Розглянуто клас задач оптимального керування в коефіцієнтах для нелінійного еліптичного рівняння з умовами Діріхле на границі з узагальнено-соленоїдальними керуваннями. Визначено поняття стійкості задачі оптимального керування відносно збурень області. Знайдено достатні умови на збурення області, за яких стійкість розглянутої задачі має місце.

Бібліогр.: 10 назв.

УДК 517.9

Періодичні розв'язки для класу диференціально-операторних включень з відображеннями типу S_k / Касьянов П.О. // Наукові вісті НТУУ “КПІ”. – 2008. – № 6. – С. 144–148.

Розглянуто клас еволюційних включень з відображеннями типу S_k . Методом Фаєдо–Гальоркіна доведено існування періодичних розв'язків. Наведено простий приклад, який демонструє одержані узагальнення.

Бібліогр.: 13 назв.

УДК 517.581

Асимптотичні розвинення і нові застосування узагальненої гіпергеометричної функції Гауса / Овчаренко О.В. // Наукові вісті НТУУ “КПІ”. – 2008. – № 6. – С. 149–154.

Розглянуто (τ, β) -узагальнення функцій гіпергеометричного типу за Райтом. Отримано асимптотичні розвинення, нові властивості та застосування цих функцій у теорії дробового інтегро-диференціювання.

Бібліогр.: 12 назв.

АВТОРИ НОМЕРА

Антоненко Лариса Олександрівна,

аспірантка Національного технічного університету України “Київський політехнічний інститут”.

Астрелін Ігор Михайлович,

доктор технічних наук, професор, професор, декан, завідувач кафедри Національного технічного університету України “Київський політехнічний інститут”.

Бісько Ніна Анатоліївна,

доктор біологічних наук, старший науковий співробітник, провідний науковий співробітник Інституту ботаніки ім. М.Г. Холодного НАН України.

Булдигін Валерій Володимирович,

доктор фізико-математичних наук, професор, завідувач кафедри Національного технічного університету України “Київський політехнічний інститут”.

Вірченко Ніна Опанасівна,

доктор фізико-математичних наук, професор, професор Національного технічного університету України “Київський політехнічний інститут”.

Гриша Сергій Миколайович,

заслужений діяч науки і техніки України, доктор технічних наук, професор Національного технічного університету України “Київський політехнічний інститут”.

Громадський Денис Геннадійович,

аспірант Національного технічного університету України “Київський політехнічний інститут”.

Дергачова Вікторія Вікторівна,

доктор економічних наук, доцент, професор Національного технічного університету України “Київський політехнічний інститут”.

Донченко Маргарита Іванівна,

доктор технічних наук, старший науковий співробітник Національного технічного університету України “Київський політехнічний інститут”.

Ємець Олег Олексійович,

доктор фізико-математичних наук, професор, завідувач кафедри Полтавського університету споживчої кооперації України.

Ємець Олександра Олегівна,

аспірантка Полтавського університету споживчої кооперації України.

Заїкіна Світлана Михайлівна,

асистент Волгоградського державного університету.

Іванюк Олена Володимирівна,

кандидат технічних наук, асистент Національного технічного університету України “Київський політехнічний інститут”.

Ізотов Володимир Юрійович,

кандидат хімічних наук, завідувач лабораторії Національного технічного університету України “Київський політехнічний інститут”.

Іотко Олександр Анатолійович,

аспірант Національного технічного університету України “Київський політехнічний інститут”.

Капустян Володимир Омелянович,

доктор фізико-математичних наук, професор, завідувач кафедри Національного технічного університету України “Київський політехнічний інститут”.

Касьянов Павло Олегович,

кандидат фізико-математичних наук, докторант Національного технічного університету України “Київський політехнічний інститут”.

Клечак Інна Рішардівна,

кандидат технічних наук, доцент, доцент Національного технічного університету України “Київський політехнічний інститут”.

Когут Ольга Петрівна,

аспірантка Національного технічного університету України “Київський політехнічний інститут”.

Кулініч Андрій Альбертович,

кандидат технічних наук, старший викладач Національного технічного університету України “Київський політехнічний інститут”.

Курило Надія Анатоліївна,

аспірантка Національного технічного університету України “Київський політехнічний інститут”.

Легеза Віктор Петрович,

доктор технічних наук, професор, професор Національного аграрного університету України.

Летвицька Ірина Василівна,

студентка Національного технічного університету України “Київський політехнічний інститут”.

Магазій Петро Миколайович,

старший викладач Національного технічного університету України “Київський політехнічний інститут”.

Майстренко Олександр Сергійович,

магістр Національного технічного університету України “Київський політехнічний інститут”.

Малежик Михайло Павлович,

доктор фізико-математичних наук, доцент, професор Національного педагогічного університету ім. М.П. Драгоманова.

Малетін Юрій Андрійович,

доктор хімічних наук, професор, завідувач кафедри Національного технічного університету України “Київський політехнічний інститут”.

Мариненко Олександр Анатолійович,

аспірант Національного технічного університету України “Київський політехнічний інститут”.

Маслянюк Павло Павлович,

кандидат технічних наук, доцент, заступник декана з наукової роботи факультету прикладної математики Національного технічного університету України “Київський політехнічний інститут”.

Мелашенко Олег Миколайович,

кандидат технічних наук, асистент Національного технічного університету України “Київський політехнічний інститут”.

Микитенко Володимир Іванович,

кандидат технічних наук, доцент, старший науковий співробітник НДЛ “Промінь” Національного технічного університету України “Київський політехнічний інститут”.

Мікульонюк Ігор Олегович,

кандидат технічних наук, доцент, доцент Національного технічного університету України “Київський політехнічний інститут”.

Міхеєнко Леонід Андрійович,

кандидат технічних наук, доцент, доцент Національного технічного університету України “Київський політехнічний інститут”.

Овчаренко Олена Валеріївна,

аспірантка Національного технічного університету України “Київський політехнічний інститут”.

Повещенко Геннадій Павлович,

кандидат технічних наук, старший науковий співробітник Національного технічного університету України “Київський політехнічний інститут”.

Поєдинок Наталія Леонідівна,

кандидат біологічних наук, старший науковий співробітник, старший науковий співробітник Інституту ботаніки ім. М.Г. Холодного НАН України.

Рижков Лев Михайлович,

доктор технічних наук, професор, професор Національного технічного університету України “Київський політехнічний інститут”.

Ружинська Людмила Іванівна,

кандидат технічних наук, доцент, професор Національного технічного університету України “Київський політехнічний інститут”.

Сахаров Олександр Сергійович,

доктор технічних наук, професор, професор Національного технічного університету України “Київський політехнічний інститут”.

Сердитов Олександр Тимофійович,

кандидат технічних наук, доцент Національного технічного університету України “Київський політехнічний інститут”.

Синюшкін Олександр Миколайович,

кандидат технічних наук, доцент, доцент Національного технічного університету України “Київський політехнічний інститут”.

Сівецький Володимир Іванович,

кандидат технічних наук, професор, професор Національного технічного університету України “Київський політехнічний інститут”.

Сокольський Олександр Леонідович,

кандидат технічних наук, доцент Національного технічного університету України “Київський політехнічний інститут”.

Тимошенко Олена Анатоліївна,

аспірантка, асистент Національного технічного університету України “Київський політехнічний інститут”.

Фроленкова Світлана Василівна,

аспірантка Національного технічного університету України “Київський політехнічний інститут”.

Хижняк Віктор Гаврилович,

доктор технічних наук, професор Національного технічного університету України “Київський політехнічний інститут”.

НАУКОВІ ВІСТІ

Національного технічного університету України
"Київський політехнічний інститут"

Науково–технічний журнал

№ 6(62)

2008

Започаткований у вересні 1997 року

Редакційна колегія:

Головний редактор
М.З. Згуровський

Заступник головного
редактора
М.Ю. Ільченко

Відповідальний
секретар
П.П. Маслянко

Члени редколегії –
координатори
наукових напрямків

С.Г. Бунін,
М.І. Бобир
В.Ю. Горчаков
І.А. Дичка,
О.В. Збруцький
Б.В. Новіков
О.М. Новіков
Є.М. Письменний
А.В. Праховник
Д.Ф. Чернега
О.Г. Юрченко
Ю.І. Якименко

Редакційна рада

Адреса редакції:
03056, Київ-56,
проспект Перемоги, 37,
Національний технічний
університет України
"Київський політехнічний
інститут",
Тел. 454-91-23

У номері:

Економіка та організація
виробництва

Електроніка, радіотехніка та
засоби телекомунікацій

Інформаційні технології,
системний аналіз та керування

Матеріалознавство
та машинобудування

Приладобудування та інформа-
ційно-вимірювальна техніка

Проблеми біотехнології

Проблеми хімії та хімічної
технології

Теоретичні та прикладні
проблеми фізико-
математичних наук

Засновник – Національний технічний університет України “Київський політехнічний інститут”
Свідоцтво про державну реєстрацію журналу – серія КВ № 2863, видане 26 вересня 1997 року

Рекомендовано Вченою Радою Національного технічного університету України
“Київський політехнічний інститут”, протокол № 12 від 8.12.08 р.

Члени редакційної ради (за галузями науки)

Фізико-математичні науки

Математика	Фізика	Механіка	Інформатика і кібернетика
В.В. Булдігін	В.Г. Бар'яхтар	А.Е. Бабаєв	Ю.М. Данілін
Н.О. Вірченко	Ю.І. Горобець	С.О. Довгий	О.С. Макаренко
А.А. Дороговцев	В.М. Локтев	Я.Ф. Каюк	Н.Д. Панкратова
М.М. Кухарчук	С.І. Сидоренко	В.В. Матвеев	В.В. Остапенко
А.М. Самойленко	А.П. Шпак	Ю.М. Шевченко	В.М. Панін

Хімічні науки	Біологічні науки	Технічні науки	Економічні науки	
О.О. Андрійко	Л.Б. Бондаренко	В.І. Губар	Є.А. Мачуський	О.Ф. Балацький
І.М. Астрелін	П.І. Гвоздяк	В.С. Коваленко	О.А. Павлов	В.Г. Герасимчук
А.К. Дорош	О.М. Дуган	В.І. Костюк	М.Г. Попович	Є.В. Крикавський
Ю.А. Малетін	Л.А. Лившиць	Ю.Ю. Лукач	В.М. Прохоренко	М.П. Панченко
А.А. Фокін	С.С. Малюта	Г.М. Любчик	Н.С. Равська	Г.К. Яловий
	В.С. Підгорський		В.О. Румбешта	
	Ю.М. Сиволап		В.І. Сенько	
	С.С. Ставська		В.П. Тарасенко	

Секретар редакції Л.Д. Калько

Редактор Т.С. Мельник

Графічний дизайн Б.В. Валуєнка
Комп'ютерна верстка О.С. Фрадіна

Підписано до друку 31.12.2008. Формат 60×84¹/₈. Папір офс. Гарнітура Times.
Спосіб друку – ризографія. Ум. др. арк. 18,60. Обл.-вид. арк. 31,68. Зам. № . Наклад 200 прим.

НТУУ “КПІ” ВПІ ВПК “Політехніка”. 03056, Київ, вул. Політехнічна, 14, корп. 15.
Тел./факс (044) 241-68-78

ЗМІСТ

Економіка та організація виробництва

Дергачова В.В. Розвиток фондового ринку України як складової національної інвестиційної політики 5

Електроніка, радіотехніка та засоби телекомунікацій

Мариненко О.А. Оптичні і пасивувальні властивості нітриду кремнію 14

Інформаційні технології, системний аналіз та керування

Гриша С.М., Іотко О.А. Стратегічне планування функціональності ERP/MRP-систем із врахуванням множинних замічень 20

Ємець О.О., Ємець Ол-ра О. Побудова математичної моделі однієї комбінаторної задачі упакування прямокутників з нечіткими розмірами 25

Маслянок П.П., Майстренко О.С. Системна інженерія проектів інформатизації організаційних систем 34

Повещенко Г.П. Динамічні і часові характеристики процесу співіснування 43

Матеріалознавство та машинобудування

Кулінич А.А. Механічні властивості сплаву ВАЛ11 при різних режимах температурно-часової обробки 51

Легеза В.П. Узагальнення варіаційної задачі про брахістохрону у випадку кочення однорідного циліндра 55

Магазій П.М., Мікульюнок І.О., Ружинська Л.І. Модельні дослідження процесів переробки термопластичних матеріалів із застосуванням вторинної сировини 60

Малежик М.П. Числовий перерахунок динамічних напружень з фотопружних ортотропних моделей на натурне тіло 68

Сахаров О.С., Сівецький В.І., Сокольський О.Л. Дискретні математичні моделі для розрахунку пружно-в'язкопластичних середовищ із змінною стисливістю при термосилових навантаженнях 74

Хижняк В.Г., Курило Н.А., Летвицька І.В., Сердитов О.Т. Азототитанування сталей і твердих сплавів 83

Приладобудування та інформаційно-вимірвальна техніка

Мелашенко О.М., Рижков Л.М. Оптимізація магнітної системи стабілізації мікросупутника за змішаним H_2/H_∞ -критерієм 89

Міхеєнко Л.А., Микитенко В.І. Методи, засоби та метрологічне забезпечення калібрування еталонних випромінювачів 94

Проблеми біотехнології

Клечак І.Р., Бісько Н.А., Поєдинок Н.Л., Антоненко Л.О. Закономірності росту перспективних об'єктів біотехнології – базидіоміцетів роду *Coriolus* у поверхневій культурі 100

Проблеми хімії та хімічної технології

Астрелін І.М., Синюшкін О.М., Іванюк О.В. Лужне вилучення міді з гальванічних шламів 108

Ізотов В.Ю., Громадський Д.Г., Малетін Ю.А. Моделювання і розрахунок робочих параметрів суперконденсатора 114

Фроленкова С.В., Донченко М.І. Вплив оксоаніонів на анодну і хімічну пасивацію сталі в слабомінералізованій воді 119

Теоретичні та прикладні проблеми фізико-математичних наук

Булдигін В.В., Тимошенко О.А. Точний порядок росту розв'язків стохастичних диференціальних рівнянь 127

Вірченко Н.О., Зайкіна С.М. Узагальнені інтегральні перетворення і їх застосування 133

Капустян В.О., Когут О.П. Достатні умови стійкості відносно збурень області одного класу задач оптимального керування 138

Касьянов П.О. Періодичні розв'язки для класу диференціально-операторних включень з відображеннями типу S_k 144

Овчаренко О.В. Асимптотичні розвинення і нові застосування узагальненої гіпергеометричної функції Гаусса 149

Реферати 155

Автори номера 158

CONTENTS

Economy and organization of production

Dergachova V.V. The development of the ukrainian stock market as a part of the national investment policy 5

Electronics, radio engineering and telecommunications

Marinenko O.A. The optical and passivating properties of silicon nitride 14

Information technology, system analysis and guidance

Grysha S.M., Gnatenko N.S. The strategic planning of ERP/MRP-systems functionality with regard to plural substitutions 20

Yemets' Oleg O., Yemets' Oleksandra O. The construction of the mathematical model of the one combinatorial problem of rectangles packing with fuzzy sizes 25

Maslyanko P.P., Maystrenko O.S. The system engineering of organizational system informatization projects 34

Poveshchenko G.P. The dynamic and temporal descriptions of the coexistence process 43

Materials science and machine building

Kylinich A.A. The mechanical properties of alloy VAL-11 at various treatment modes 51

Legeza V.P. The generalization of variation problem on brahistrochrone in the case of rolling homogeneous cylinder 55

Magazjy P.M., Mikulionok I.O., Ruzhinska L.I. The modeling research of thermoplastic materials processing using secondary raw material 60

Malezhyk M.P. The numerical recalculation of dynamic stress with photoelastic ortotropic models on a natural body 68

Saharov O.S., Sivetskiy V.I., Sokolskiy O.L. The discrete mathematical models for calculation of elastic-viscid-plastic environments with variable compressibility at thermopower loadings 74

Khizhniak V.G., Kurilo N.A., Letvitska I.V., Serditov O.T. Nitrogenitining of steels and firm alloys 83

Instrument manufacturing and information measuring technology

Melaschenko O.M., Ryzhkov L.M. The optimization of microsatellite magnetic stabilizing system on the mixed H_2/H_∞ -criterion 89

Mikheenko L.A., Mykytenko V.I. The approaches, means and metrological assurance of calibration of the standard radiators 94

Problems of biotechnologies

Klechak I.R., Bisko N.A., Poyedinok N.L., Antonenko L.O. The growth mechanisms of the promising research subjects of biotechnology – basidiomycetes mushrooms of the genus *Coriolus* on agar mediums 100

Problems of chemistry and chemical engineering

Astrelin I.M., Sinyushkin O.M., Ivanyuk O.V. The alkaline extraction of copper from galvanic dross 108

Izotov V.Yu., Gromadskyi D.G., Maletin Yu.A. The modeling and calculation of performance parameters of ultracapacitor 114

Frolenkova S.V., Donchenko M.I. The influence of the oxyanions on anodic and chemical steel passivation in poorly mineralized water 119

Theoretical and applied problems of physico-mathematical sciences

Buldygin V.V., Tymoshenko O.A. The asymptotic behaviour of the solutions of stochastic differential equations 127

Virchenko N.O., Zaikina S.M. The generalized integral transformations and their application 133

Kapustyan V.O., Kogut O.P. The sufficient conditions of the shape stability for perturbation of the one class of optimal control problems 138

Kasyanov P.O. The periodic solutions for a class of differential-operator inclusions with S_k type maps 144

Ovcharenko O.V. The asymptotic expansions and new application of the generalized hypergeometric Gaussian functions 149

Reports 155

Contributors to the issue 158