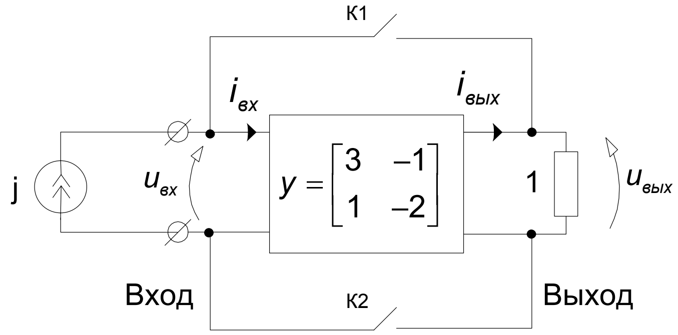
VII олимпиада "ТЭЦ'2014",

посвященная памяти проф. Сигорского Виталия Петровича

Все величины заданы в системе единиц СИ



Задача 1.

y-параметры системы, заданы в сименсах. Известно, что в течение 10 с после замыкания ключей система и нагрузка потребили 160 Дж энергии. Определить ток источника j (уравнения системы не изменяются после замыкания ключей).

<u>Решение:</u>

В исходной схеме Рис. 1 токи связаны следующими соотношениями:

$$i_{вх} = \tilde{i}_{вх};\; i_{вых} = \tilde{i}_{вых} \quad , \tag{1}$$

что позволяет описывать связь между токами и напряжениями на сторонах системы при помощи двух уравнения и четырех параметров:

$$\begin{aligned} i_{вх} &= y_{11}u_{вх} + y_{12}u_{вых}; \\ i_{вых} &= y_{21}u_{вх} + y_{22}u_{вых}. \end{aligned} \tag{2}$$

На рис. 1 (б) приведена схема после замыкания ключей. Запишем уравнения по I закону Кирхгофа для проведенных сечений (замкнутая штриховая линия):

$$\begin{aligned} -j + i_{вх} - i_{вых} + i_{н} &= 0; \\ +j - \tilde{i}_{вх} + \tilde{i}_{вых} - i_{н} &= 0. \end{aligned} \tag{3}$$

По условию задачи замыкание ключей не приводит к изменению уравнений системы, т.е., соотношение (1) не изменится. Тогда, подставив (2) в одно из уравнений (3) и выразив ток нагрузки через напряжение по закону Ома, получим:

$$-j + y_{11}u_{вх} + y_{12}u_{вых} - y_{21}u_{вх} - y_{22}u_{вых} + r_{н}^{-1}u_{вых} = 0 \tag{4}$$

После замыкания ключей имеет место равенства напряжений

$$u_{вх} = u_{вых} \tag{5}$$

Подставив (5) в (4) и решив относительно $u_{вх}$, получим:

$$u_{вх} = \frac{j}{y_{11} + y_{12} - y_{21} - y_{22} + r_{н}^{-1}} = \frac{j}{4}\,[B] \tag{6}$$

Параметры системы – вещественные числа, тогда при постоянном токе источника все другие токи и напряжения в системе будут также постоянны. Поэтому потребление энергии W системой и нагрузкой после замыкания ключа происходит при постоянной мощности, равной

$$P = \frac{W}{\Delta t} = \frac{160}{10} = 16\,[Bm], \tag{7}$$

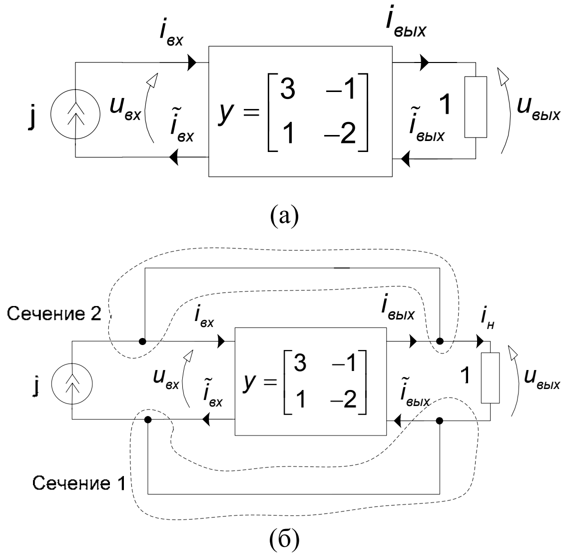


Рис 1. (а) исходная схема; (б) схема после замыкания ключей.

С другой стороны, по теореме о балансе мощности, сумма мощностей на всех компонентах схемы равна нулю:

$$P_{ист} + P = 0\,, \tag{8}$$

где

$$P_{ист} = -u_{вх}\,j = -\frac{j^2}{4} \tag{9}$$

Подставив (7) и (9) в (8), находим $j = \pm 8\,[A]$.

<u>Второй способ </u>решения задачи состоит в замене системы схемной моделью, как показано на Рис. 2. В результате получается схема с двумя узлами, т.е., ее узловая модель будет содержать одно уравнение. Сформируем узловую модель схемы, используя правила учета в модели компонентов, образующих схему:

$$(y_{11} + y_{12} - y_{21} - y_{22} + g_н)V_1 = j\ , \tag{10}$$

где V_1 - узловое напряжение узла 1, $g_н$ - проводимость нагрузки. Решив уравнение, получим:

$$V_1 = \frac{j}{y_{11} + y_{12} - y_{21} - y_{22} + g_н} = \frac{j}{4}\ . \tag{11}$$

Поскольку $u_{вх} = V_1$, дальнейшее решение задачи выполняется так, как описано ранее (см. (6)).

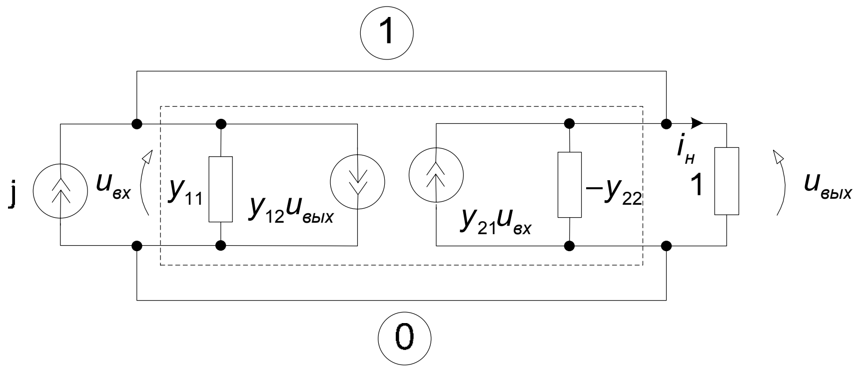
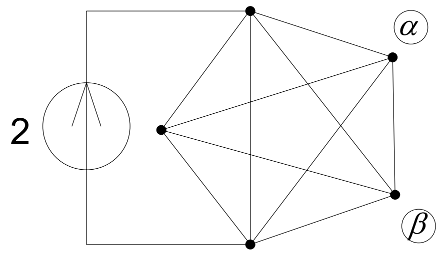
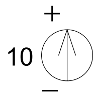


Рис2. Схема, полученная заменой системы с двумя сторонами схемной моделью с двумя зависимыми источниками.



Задача 2.

Заменить каждую дугу графа сопротивлением 1 Ом и представить схему эквивалентным источником относительно узлов α, β.



-схемное обозначение идеального источника напряжения 10В

Решение:

На рис. 3 (а) приведена исходная схема, имеющая пять узлов и состоящая из идеального источника напряжения и графа, где каждая дуга графа представляет сопротивление $r = 1\ Ом$. На Рис. 3 (б) изображен эквивалентный источник напряжения (схема Тевенена), характеризуемый двумя параметрами $e_э = u^{x.x.}$ и $r_э$, которые и требуется определить. Для этого сформируем узловую модель схемы в матричной форме (0 – базисный узел):

$$\begin{bmatrix} 4g & -g & -g \\ -g & 4g & -g \\ -g & -g & 4g \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_\alpha \\ V^\beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ge \\ ge \\ ge \end{bmatrix}, \tag{12}$$

где $g = r^{-1} = 1\ См$ - проводимость сопротивлений схемы, V_α, V_β, V_1- неизвестные узловые напряжения. Решив (12), например, методом Крамера или Гаусса, получим:

$$V_\alpha = \frac{1}{2}e;\ V_\beta = \frac{1}{2}e\,. \tag{13}$$

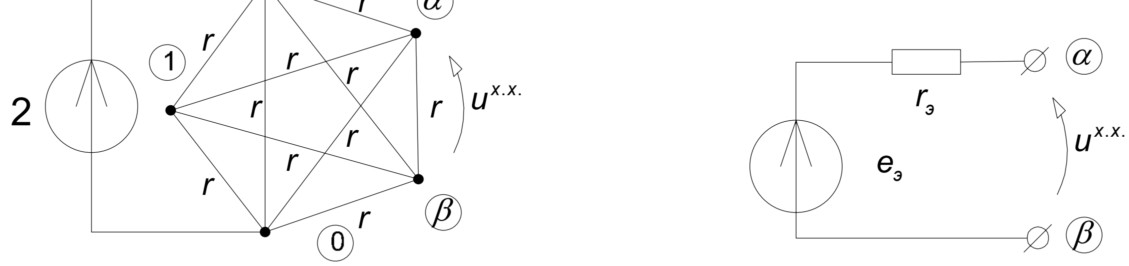
Тогда по II закону Кирхгофа получим $e_э = V_\alpha - V_\beta = 0\ [B]$.

Эквивалентное сопротивление $r_э$ находим по формуле

$$r_э = \frac{\Delta_{(\alpha+\beta)(\alpha+\beta)}}{\Delta} = \frac{\det\begin{bmatrix} 6g & -2g \\ -2g & 4g \end{bmatrix}}{\det\begin{bmatrix} 4g & -g & -g \\ -g & 4g & -g \\ -g & -g & 4g \end{bmatrix}} = \frac{20g^2}{50g^3} = 0,4[Ом]\,.$$

Таким образом, исходную схему относительно узлов α, β можно заменить эквивалентной схемой, состоящей из одного сопротивления $r_э = 0,4\,Ом$ (сопротивление идеального источника напряжения равно нулю).

<u>Второй способ</u> решения задачи 2 состоит в преобразовании полного пятиугольника в эквивалентную пятилучевую звезду (см. Рис. 4) где $y_i,\ i \in (0,1,2,\alpha,\beta)$ - проводимости дуг звезды. Такое преобразование возможно при выполнении следующих условий:



(а) (б)

Рис 3. (а) исходная схема; (б) эквивалентный источник напряжения (схема Тевенена).

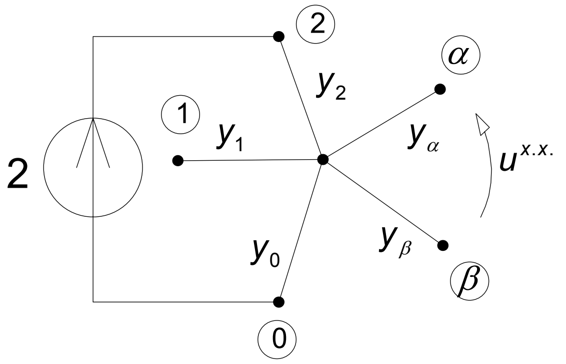


Рис 4. Исходная схема после преобразования полного пятиугольника в пятилучевую звезду

$$\frac{g_{kl}}{g_{ki}} = \frac{g_{jl}}{g_{ji}} = \cdots; \quad i \neq j \neq k \neq l, \tag{14}$$

где n - количество узлов (вершин графа) в полном n- угольнике (в нашем случае $n=5$), g_{ij} - проводимость дуги графа n-угольника, подключенной между узлами i и j, и т.д. В нашем случае проводимости g_{ij} дуг полного пятиугольника одинаковы и равны g, поэтому условие (14) выполняется и переход к схеме Рис.4 возможен.

Поскольку по дугам $y_\alpha,\, y_\beta$ ток протекать не будет и по закону Ома напряжение на них будет равно нулю, то по II закону Кирхгофа напряжение $u^{x.x.}$ будет также равно нулю, что совпадает с результатом, полученным узловым методом.

Сопротивление эквивалентного источника $r_э$ можно найти как сопротивление последовательно соединенных дуг с проводимостями $y_\alpha,\, y_\beta$. Чтобы найти проводимости $y_\alpha,\, y_\beta$, воспользуемся формулами преобразования полного n- угольнике в n- лучевую звезду. Проводимость y_i дуги звезды, подключенной к узлу i, определяется по формуле

$$y_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} g_{ij} + \frac{g_{li}}{g_{lk}} g_{ik};\; l \neq k \neq i,\; i = \overline{1,n}. \tag{15}$$

Проводимости всех дуг, образующих полный многоугольник и входящих в (15) в нашем случае одинаковы, поэтому соотношение (15) принимает следующий вид:

$$y_i = ng,\; i = 1,2,...,n\,. \tag{16}$$

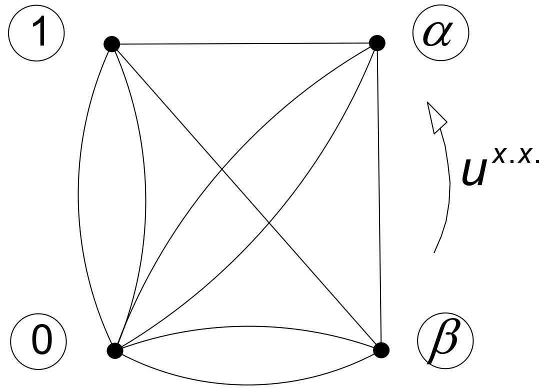
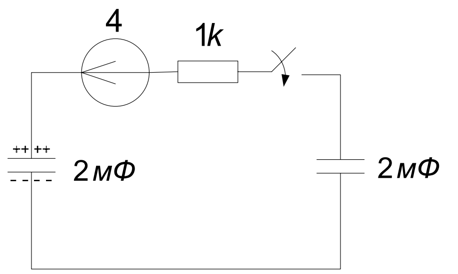


Рис 5. Граф схемы после подавления источника напряжения (сопротивление каждой дуги равно 1Ом).

В нашем случае ($n=5,\; g=1См$) $y_i = 5См;\; i \in (0,1,2,\alpha,\beta)$.

Тогда $r_э = \dfrac{1}{y_\alpha} + \dfrac{1}{y_\beta} = 0,4Ом$, что совпадает с результатом, полученным узловым методом.

<u>Третий способ</u> позволяет избежать применения соотношения (15). Сопротивление эквивалентного источника $r_э$ можно найти как сопротивление между узлами α, β при подавленном источнике напряжения, сопротивление которого равно нулю, так как он идеальный. На Рис. 5 приведен граф схемы при подавленном источнике напряжения. Путем несложных эквивалентных преобразований находим $r_э = 0,4Ом$.



Задача 3.

На заряженной емкости имеется запас энергии 100 мДж, другая емкость не заряжена. Сколько энергии заряженной емкости израсходуется в течение переходного процесса, возникающего после замыкания ключа, и на что она потратится ?

<u>Решение</u>.
Момент замыкания ключа примем за начальный, т.е., соответствующее ему значение времени t равно нулю. Начальное напряжение $u_{c1}(0)$ заряженной емкости c_1 можно выразить через запасенную энергию по формуле

$$W_c = \frac{cu_c^2}{2}, \tag{17}$$

откуда $u_{c1}(0) = \sqrt{\frac{2W_{c1}}{c_1}} = 10\,B$. Вторая емкость c_2 не заряжена, поэтому напряжение $u_{c2}(0) = 0$.

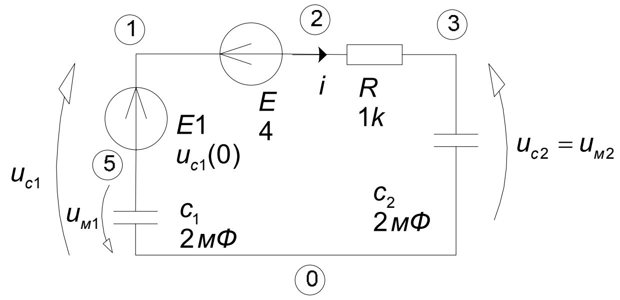
После замыкания ключа начнется переходный процесс, исследовать который можно по схеме, приведенной на Рис. 6 (а), где заряженная емкость заменена моделью, состоящей из незаряженной емкости c_1 (емкости модели) и источника напряжения $u_{c1}(0)$. Упрощенная схема, полученная путем эквивалентных преобразований, приведена на Рис. 6(б). Это схема заряда емкости при нулевых начальных условиях, и мы можем воспользоваться известными результатами ее расчета, которые обычно находятся классическим или операторным методом:

$$u_м(t) = 6(1 - e^{-\frac{t}{\tau}});$$
$$i(t) = C\frac{du_м}{dt} = \frac{6}{r}e^{-\frac{t}{\tau}}, \tag{18}$$

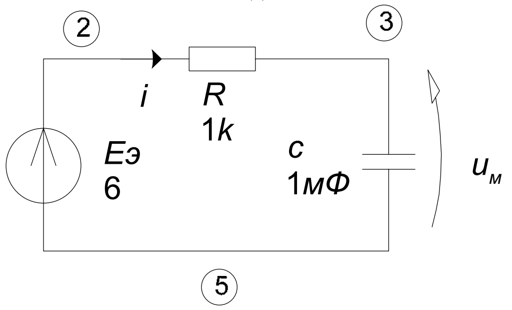
где $\tau = rc = 1c$ - постоянная времени заряда емкости. В конце переходного процесса ($t \to \infty$) напряжение $u_м(\infty) = u_{35} = 6\,B$ (см. (18)), где u_{35} - напряжение между узлами 3, 5 схемы на Рис. 6 (а).

Во время процесса заряда через незаряженные емкости моделей протекал один и тот же ток i, так как они включены последовательно. Поэтому после завершения переходного процесса на каждой из емкостей в схеме Рис. 1 (а) накопится заряд одной и той же величины, который найдем по формуле $q_1 = q_2 = cu_м(\infty) = 6\,мКл$.

Зная величину емкости и заряд на ней, можно определить напряжение на емкостях моделей по завершении переходного процесса:



(а)



(б)

Рис 6. (а) исходная схема после замыкания ключа; (б) упрощенная эквивалентная схема.

$$u_{м1}(\infty) = \frac{q_1}{c_1} = 3\,B;$$

$$u_{м2}(\infty) = \frac{q_2}{c_2} = 3\,B.$$

Как и следовало ожидать, напряжение u_{35} поделилось между емкостями пополам, так как емкости одинаковы.

Зная напряжения на емкостях моделей, находим напряжения на емкостях в исходной схеме с учетом начальных условий:

$$u_{c1}(\infty) = u_{c1}(0) - u_{м1}(\infty) = 7\,В;$$
$$u_{c2}(\infty) = u_{c2}(0) + u_{м2}(\infty) = 3\,В.$$

Таким образом, переходный процесс завершился уменьшением напряжения на первой емкости с 10 В до 7 В (заряд первой емкости уменьшился на 6 мКл) и увеличением напряжения второй емкости с 0 до 3 В (вторая емкость зарядилась до 6 мКл).

Находим энергию, запасенную на емкостях после окончания переходного процесса:

$$W_{c1}(\infty) = \frac{c_1 u_{c1}^2(\infty)}{2} = 49\,мДж;$$
$$W_{c2}(\infty) = \frac{c_2 u_{c2}^2(\infty)}{2} = 9\,мДж;$$

Сравнивая энергию, запасенную емкостями в начале и конце переходного процесса, приходим к выводу, что она уменьшилась на 42 мДж. Следовательно, недостающая энергия должна быть связана с процессами, протекающими в оставшихся компонентах схемы, т.е., источнике напряжения Е и сопротивлении R.

Рассчитаем энергию, рассеянную сопротивлением (превращенную в тепло) при протекании через него тока $i(t)$ (см. (18)) как интеграл от мгновенной мощности:

$$W_R = \int_0^\infty r i^2(t)dt = \frac{36r}{r^2}\int_0^\infty e^{-\frac{2t}{\tau}}dt = 18\,мДж;$$

Тогда по закону сохранения энергии, оставшиеся 24 мДж должны пополнить запас энергии в источнике напряжения Е. Проверим это, проинтегрировав мгновенную мощность источника:

$$W_E = \int_0^\infty 4i(t)dt = \frac{4\cdot 6}{r}\int_0^\infty e^{-\frac{t}{\tau}}dt = 24\,мДж;$$

Таким образом, установлены потребители энергии, изначально запасенной емкостью c_1, и энергия, потребленная каждым из них в ходе переходного процесса, возникшего после замыкания ключа.