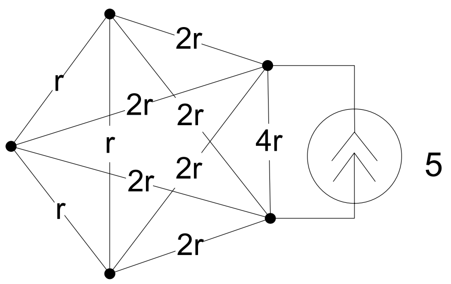
VIII олимпиада по теории электронных цепей "ТЭЦ'2015",

посвященная памяти проф. Сигорского Виталия Петровича



Задача 1.

На рисунке приведен структурный граф схемы и указаны сопротивления дуг. Идеальный источник тока 5 А отдает 1500 Дж электрической энергии за одну минуту. Найти значение сопротивления r

Решение:

Исходная схема состоит из сопротивлений, поэтому ее можно заменить эквивалентным сопротивлением относительно узлов, к которым подключен источник тока, как показано на Рис.1(а). Тогда потребляемую всеми сопротивлениями схемы энергию можно выразить по формуле

$$W = i_э^2 r_э \Delta t = j^2 r_э \Delta t \ , \qquad (1)$$

где j - ток источника, Δt - интервал времени, за который потребляется энергия, $r_э$-сопротивление эквивалентного двухполюсника. Выразив $r_э$ через сопротивления ветвей, образующих эквивалентный двухполюсник, и подставив в (1), получим уравнение относительно r.

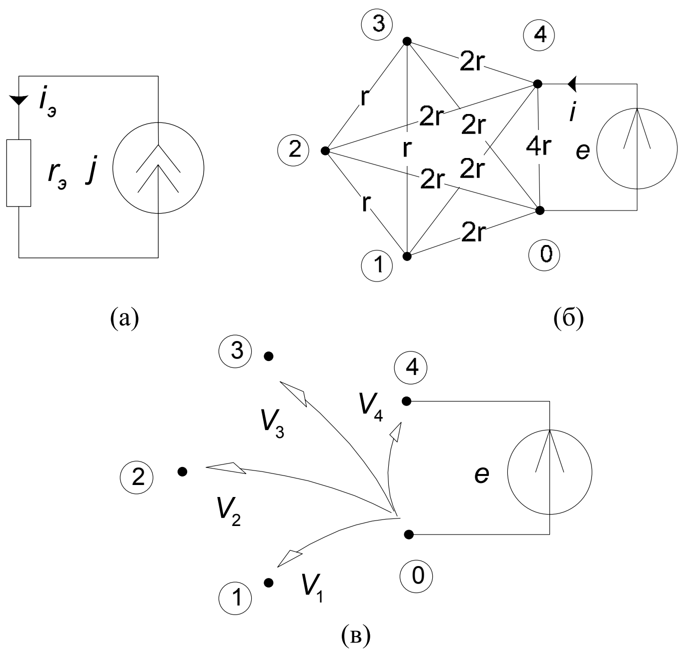


Рис. 1. (а) схема, эквивалентная исходной, (б) исходная схема, в которой источник тока заменен на идеальный источник напряжения; (в) узловые напряжения схемы.

Для этого воспользуемся методом узловых напряжений. Обозначим узлы схемы и подключим вместо источника тока идеальный источник напряжения (см. Рис. 1(б)), чтобы получить систему узловых уравнений наименьшего порядка. Для формирования узловых уравнений в матричной форме воспользуемся правилами учета сопротивления и идеального источника напряжения в узловой модели. В результате получим следующую узловую модель:

$$\begin{bmatrix} 3g & -g & -g \\ -g & 3g & -g \\ -g & -g & 3g \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,5ge \\ 0,5ge \\ 0,5ge \end{bmatrix}, \qquad (2)$$

где $g = 1/r$, $V_i,\ i = 1,2,3$ - узловые напряжения, указанные на Рис. 1(в)). Решение системы уравнений (2) можно упростить, если сократить все слагаемые на g и принять $e=2B$. Тогда система (2) примет следующий вид:

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}. \qquad (3)$$

Решаем полученные уравнения численно (см. (4)): первый переход по стрелке – умножаем второе и третье уравнение исходной системы на 3 и добавляем к ним первое уравнение; второй переход - делим второе уравнение на 2, и добавляем к третьему уравнению.

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 0 & 8 & -4 \\ 0 & -4 & 8 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 0 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 6 \end{bmatrix}. \qquad (4)$$

Находим узловое напряжение V_3 из третьего уравнения и подставляем во второе, и т.д. В результате получим:

$$V_3=V_2=V_1=1\ B. \qquad (5)$$

Далее находим ток i (см. Рис. 1 (в)) как сумму четырех токов, вытекающих из узла 4. Каждый из токов определяем по закону Ома (напряжение на соответствующей ветви выражаем через узловые напряжения по второму закону Кирхгофа):

$$i=\frac{V_4}{4r}+\frac{V_4-V_3}{2r}+\frac{V_4-V_2}{2r}+\frac{V_4-V_1}{2r}\bigg|_{V_2=e=2}=\frac{2}{r}\ A. \qquad (6)$$

Сопротивление $r_э$ находим по закону Ома с использованием (6):

$$r_э=\frac{e}{i}\bigg|_{e=2}=r. \qquad (7)$$

Подставив (7) в (1), получим: $r=1\ Ом$.

<u>Второй способ</u> решения задачи состоит в том, что вектор узловых напряжений узловой модели схемы Рис. 1(б) можно расширить, добавив неизвестный ток i. Для этого необходимо в схеме обозначить еще один узел, как показано на Рис. 2, чтобы искомый ток протекал по короткозамкнутой дуге. Далее, воспользовавшись алгоритмом расширения узловой модели, формируем следующую систему узловых уравнений:

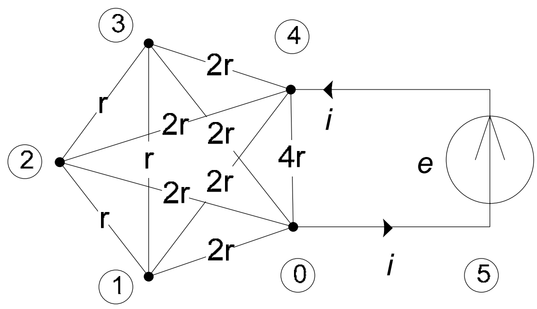


Рис. 2. Исходная схема с идеальным источником напряжения 1 В и добавленным узлом ⑤.

$$\begin{bmatrix} 3g & -g & -g & 0 \\ -g & 3g & -g & 0 \\ -g & -g & 3g & 0 \\ -0,5g & -0,5g & -0,5g & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ i \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0,5ge \\ 0,5ge \\ 0,5ge \\ -\frac{7}{4}ge \end{bmatrix}, \qquad (8)$$

которую преобразуем, помножив левую и правую части на $2r$ и подставив $e=2B$:

$$\begin{bmatrix} 6 & -2 & -2 & 0 \\ -2 & 6 & -2 & 0 \\ -2 & -2 & 6 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & -2r \end{bmatrix}\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ i \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ -7 \end{bmatrix}. \qquad (9)$$

Решаем (9): второе и третье уравнения умножаем на три, а четвертое – на 6 и получаем первую систему уравнений в (10); первый переход по стрелке – добавляем первое уравнение ко всем остальным; второй переход – третье и четвертое уравнения умножаем на 2 и добавляем к ним второе уравнение.

$$\begin{bmatrix} 6 & -2 & -2 & 0 \\ -6 & 18 & -6 & 0 \\ -6 & -6 & 18 & 0 \\ -6 & -6 & -6 & -12r \end{bmatrix}\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ i \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2 \\ 6 \\ 6 \\ -42 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 6 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & 16 & -8 & 0 \\ 0 & -8 & 16 & 0 \\ 0 & -8 & -8 & -12r \end{bmatrix}\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ i \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2 \\ 8 \\ 8 \\ -40 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 6 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & 16 & -8 & 0 \\ 0 & 0 & 24 & 0 \\ 0 & 0 & -24 & -24r \end{bmatrix}\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ i \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2 \\ 8 \\ 24 \\ -72 \end{bmatrix}. \qquad (10)$$

Далее находим $V_3 = 1B$ из третьего уравнения, подставляем V_3 в четвертое и получаем: $-24ri = -48$, откуда имеем $i = 2/r$. Подставив найденное i в (7), а (7) в (1), получим $r = 1Ом$.

Третий способ состоит в подключении к узлам 0 и 4 источника тока $j = 5\,A$, как показано на Рис. 3, и определении напряжения u между этими узлами. Для определения напряжения запишем узловые уравнения в матричной форме, применив правила учета сопротивления и идеального источника тока в узловой модели:

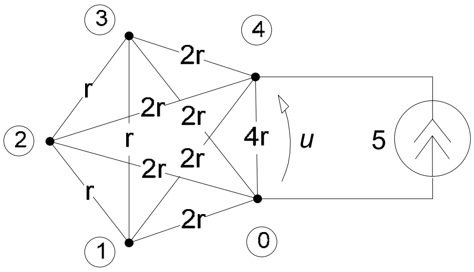


Рис. 3. Исходная схема с идеальным источником тока 5 А.

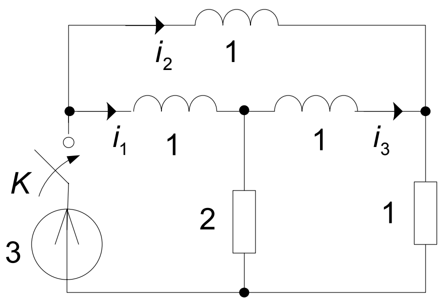
$$\begin{bmatrix} 3g & -g & -g & -0{,}5g \\ -g & 3g & -g & -0{,}5g \\ -g & -g & 3g & -0{,}5g \\ -0{,}5g & -0{,}5g & -0{,}5g & \frac{7}{4}g \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix} \qquad (11)$$

Умножим все уравнения в системе (11) на $2r$ и найдем напряжение u методом Крамера:

$$u = V_4 = \frac{\Delta_4}{\Delta} = \frac{\det\begin{bmatrix} 6 & -2 & -2 & 0 \\ -2 & 6 & -2 & 0 \\ -2 & -2 & 6 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 10r \end{bmatrix}}{\det\begin{bmatrix} 6 & -2 & -2 & -1 \\ -2 & 6 & -2 & -1 \\ -2 & -2 & 6 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & \frac{7}{2} \end{bmatrix}} = \frac{10r\cdot\Delta_{44}}{(-1)*\Delta_{14} + (-1)*\Delta_{24} + (-1)*\Delta_{34} + \frac{7}{2}\Delta_{44}} =$$

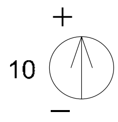
$$= \frac{10r\cdot\det\begin{bmatrix} 6 & -2 & -2 \\ -2 & 6 & -2 \\ -2 & -2 & 6 \end{bmatrix}}{\det\begin{bmatrix} -2 & 6 & -2 \\ -2 & -2 & 6 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} - \det\begin{bmatrix} 6 & -2 & -2 \\ -2 & -2 & 6 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} + \det\begin{bmatrix} 6 & -2 & -2 \\ -2 & 6 & -2 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} + \frac{7}{2}\det\begin{bmatrix} 6 & -2 & -2 \\ -2 & 6 & -2 \\ -2 & -2 & 6 \end{bmatrix}} = \frac{10r128}{-64-64-64+\frac{7}{2}128} = 5r. \qquad (12)$$

По закону Ома $r_э = \left.\frac{u}{j}\right|_{j=5} \frac{5r}{5} = r$. Подставив $r_э = r$ в (1), получим $r = 1Ом$.



Задача 2.

Ключ замыкается при нулевых начальных условиях в схеме. Найти токи i_1, i_2, i_3, которые будут течь через индуктивности после окончания переходных процессов.



-схемное обозначение идеального источника напряжения 10В

<u>Решение:</u>

После окончания переходных процессов все токи и напряжения в схеме будут постоянными, так как номинал источника напряжения - постоянная величина, 3 В, и двухполюсник, к которому подключается источник, содержит диссипативные компоненты. Поскольку напряжение на индуктивности L связано с ее током соотношением $u = L\frac{di}{dt}$, то напряжение на индуктивности равно нулю и каждую индуктивность можно заменить короткозамкнутой ветвью. Тогда исходную схему можно заменить эквивалентной резистивной схемой, показанной на Рис. 4. Токи на оставшихся компонентах схемы найдены по закону Ома и закону Кирхгофа для токов в узле 0. Неизвестные постоянные токи индуктивностей I_1, I_2, I_3 входят в систему из трех уравнений, записанную по первому закону Кирхгофа для узлов 1, 2, 3

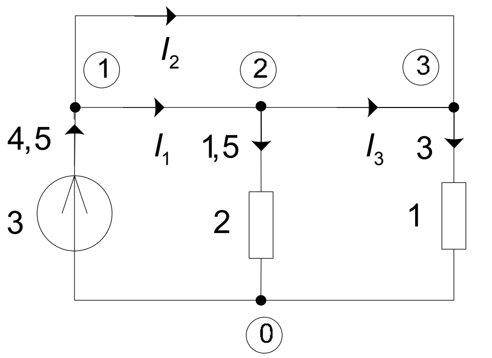


Рис. 4. Исходная схема в состоянии постоянного тока с обзначенными узлами и указанными токами компонентов .

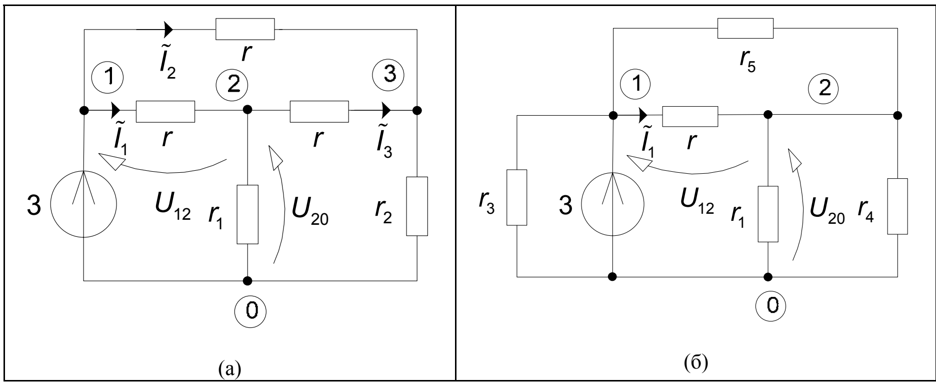
$$\begin{aligned} &I_1 + I_2 - 4,5 = 0; \\ &I_2 + I_3 - 3 = 0; \\ &I_3 - I_1 + 1,5 = 0. \end{aligned} \qquad (13)$$

Если записать систему уравнений (13) в матричной форме и применить для ее решения метод Крамера, то возникнет неопределенность, как показано ниже:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4,5 \\ 3 \\ -1,5 \end{bmatrix} \to I_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{\det\begin{bmatrix} 1 & 1 & 4,5 \\ 0 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & -1,5 \end{bmatrix}}{\det\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}} = \frac{1(-1,5) - 1(3-4,5)}{1\cdot 1 - 1\cdot 1} = \frac{0}{0}. \qquad (14)$$

Такая же неопределенность возникает и при вычислении оставшихся токов I_2, I_3, что свидетельствует о линейной зависимости уравнений системы (13). Действительно, первое из этих уравнений можно получить, вычитая из второго уравнения третье.

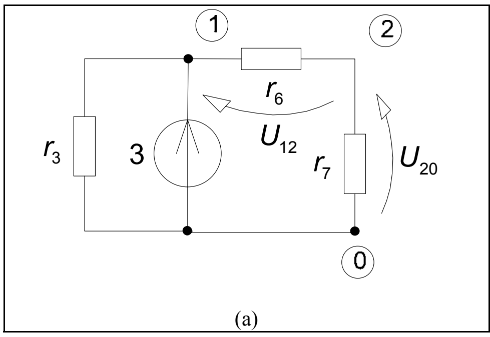
Для решения задачи изменим схему на Рис. 4, заменив нулевые сопротивления индуктивностей некоторым сопротивлением r, как показано на Рис. 5(а), где $r_1 = 2\,Ом, r_2 = 1\,Ом.$ Далее выполним эквивалентное преобразование полученной схемы: заменим звезду с вершиной в узле 3 на треугольник, как показано на Рис. 5(б) и (в). И, наконец, упростим схему Рис. 5(б) до



$$r_3 = r + r_2 + \frac{rr_2}{r} = r + 2r_2 = r + 2;$$
$$r_4 = r + r_2 + \frac{rr_2}{r} = r + 2r_2 = r + 2;$$
$$r_5 = r + r + \frac{rr}{r_2} = 2r + \frac{r^2}{r_2} = r(r+2).$$

(в)

Рис. 5. (а) схема, полученная из исходной заменой индуктивностей на сопротивления r *; (б) эквивалентная схема после замены звезды с вершиной в узле 3 на треугольник; (в) расчет сопротивлений треугольника*



$$r_6 = \frac{rr_5}{r + r_5} = \frac{r(r+2)}{r+3};$$
$$r_7 = \frac{r_1 r_4}{r_1 + r_4} = \frac{r(r+2)}{r+4}.$$

(б)

Рис. 6. (а) схема, полученная из схемы Рис. 5(б) заменой параллельно соединенных сопротивлений на сопротивления r_6, r_7 *; (б) расчет сопротивлений* r_6, r_7 *.*

делителя напряжения, преобразовав параллельно соединенные пары сопротивлений в одно, как показано на Рис. 6.

Напряжение U_{12} найдем по формуле делителя напряжения для схемы Рис. 6(а):

$$U_{12} = \frac{r_6}{r_6 + r_7} e = \frac{r(r+4)}{2(r+3) + r(r+4)} 3. \tag{15}$$

Найденное напряжение U_{12} используем для определения по закону Ома тока $\tilde{I}_1$ в схеме Рис. 5(а):

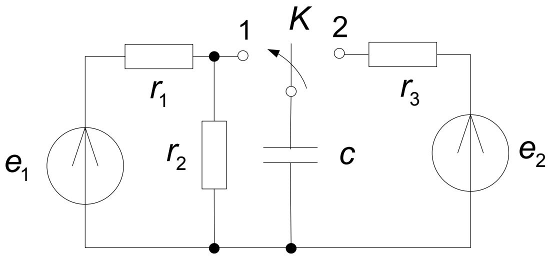
$$\tilde{I}_1 = \frac{U_{12}}{r} = \frac{(r+4)}{2(r+3) + r(r+4)} 3. \tag{16}$$

Искомый ток I_1 в схеме Рис. 4 находим, устремив r к нулю в (16), т.е. к сопротивлению индуктивности, по которой течет постоянный ток:

$$I_1 = \tilde{I}_1\Big|_{r\to 0} = \left.\frac{(r+4)}{2(r+3) + r(r+4)} 3\right|_{r\to 0} = 2\,A. \tag{17}$$

Далее по закону Кирхгофа для токов в узлах 2 и 3 находим искомые токи I_3, I_2 в схеме Рис.4 (см. (13)):

$$\begin{aligned} I_3 &= I_1 - 1{,}5 = 0{,}5\,A; \\ I_2 &= 3 - I_3 = 2{,}5\,A. \end{aligned} \tag{18}$$



Задача 3.

В момент времени t=0 емкость не заряжена, а ключ К переведен в положение 1. Определить, в какой момент времени t_x ключ был мгновенно переведен из положения 1 в положение 2, если через 10 мс после этого напряжение на емкости стало равным 6,34 В. Номиналы компонентов схемы следующие: $r_1=r_2=4$ кОм; $r_3=10$ кОм; $c=1$ мкФ; $e_1=20$ В; $e_2=5$ В.

<u>Решение:</u>

При подключении емкости к контакту 1 в начальный момент времени, который принимается равным нулю, начинается процесс ее заряда, который описывается функцией

$$u_c(t) = e_{э1}(1-e^{-\frac{t}{\tau_1}}), \qquad (19)$$

где $e_{э1} = e_1\dfrac{r_2}{r_1+r_2} = \dfrac{e_1}{2} = 10\ В;\ \tau_1 = \dfrac{r_1 r_2}{r_1+r_2}c = 2\ мс$. В момент времени t_x, когда происходит перевод ключа в положение 2, напряжение на емкости достигнет согласно (19) некоторого значения U_0:

$$U_0 = 10(1-e^{-\frac{t_x}{2}10^3}) \qquad (20)$$

Далее произойдет процесс заряда емкости при ненулевых начальных условиях, который описывается следующим соотношением:

$$u_c(t) = U_0 e^{-\frac{t}{\tau_2}} + e_{э2}(1-e^{-\frac{t}{\tau_2}}), \qquad (21)$$

где $e_{э2} = e_2 = 5\ В;\ \tau_2 = r_3 c = 10\ мс$. Согласно условию задачи через 10 мс=10^{-2} с после перевода ключа в положение 2 напряжение на емкости станет равным 6,34 В, что позволяет из (21) и (20) получить следующее уравнение относительно t_x:

$$u_c(t)\Big|_{t=10^{-2}} = U_0 e^{-\frac{t}{\tau_2}} + e_{э2}(1-e^{-\frac{t}{\tau_2}})\Bigg|_{t=10^{-2}} = 10(1-e^{-\frac{t_x}{2}10^3})e^{-1} + 5(1-e^{-1}) = 6,34\ . \qquad (22)$$

Раскрыв скобки и перенеся все известные значения в правую часть уравнения (22), а также найдя натуральный логарифм от левой и правой части, получим:

$$-\frac{t_x}{2\cdot 10^{-3}} = \ln\left[(-6,34\cdot e + 5\cdot e - 5 + 10)/10\right] \approx -2, \qquad (23)$$

откуда $t_x = 2\cdot 10^{-3}\cdot 2 = 4\ мс$.