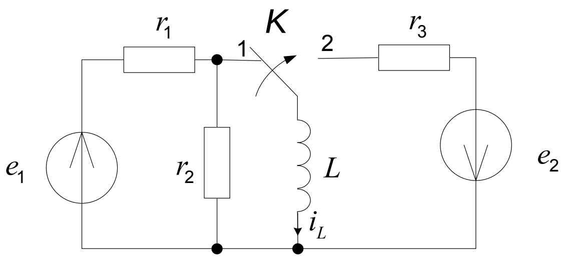
23.11.2016

IX олимпиада по теории электронных цепей "ТЭЦ'2016",

посвященная памяти проф. Сигорского Виталия Петровича



Задача 3.

Схема находится в установившемся состоянии, когда ключ К мгновенно переводится в положение 2. Сколько энергии потребит источник напряжения e_2 в течение переходного процесса? Номиналы компонентов схемы следующие: r_1=0,5 Ом; r_2=4 Ом; r_3= 0,5 Ом; L=1/ln2 Гн; e_1=2 В; e_2= 2 В.

<u>Решение:</u>

В установившемся состоянии все токи и напряжения в схеме постоянны. Тогда напряжение на индуктивности, согласно компонентному уравнению, равно нулю:

$$u_L = L\frac{di_L}{dt}\bigg|_{i_L=const} = 0\,. \tag{1}$$

Это значит, что индуктивность можно заменить короткозамкнутой дугой, сопротивление которой равно нулю и, следовательно, равно нулю напряжение при протекании любого тока. В результате замены получается схема, приведенная на Рис. 5(а).

Ток короткозамкнутой дуги I_0 протекает также и через сопротивление r_1 (ток через сопротивление r_2 равен нулю, так как напряжение на нем равно нулю), поэтому его можно найти по закону Ома:

$$I_0 = \frac{u_1}{r_1} = \frac{e_1}{r_1} = 4\ A\,. \tag{2}$$

В начальный момент времени (момент коммутации ключа), который примем равным нулю, ток через индуктивность будет равным 4 А (если бы это было не так, то мгновенное изменение тока привело бы, согласно (1), к бесконечно большому напряжению на индуктивности, что

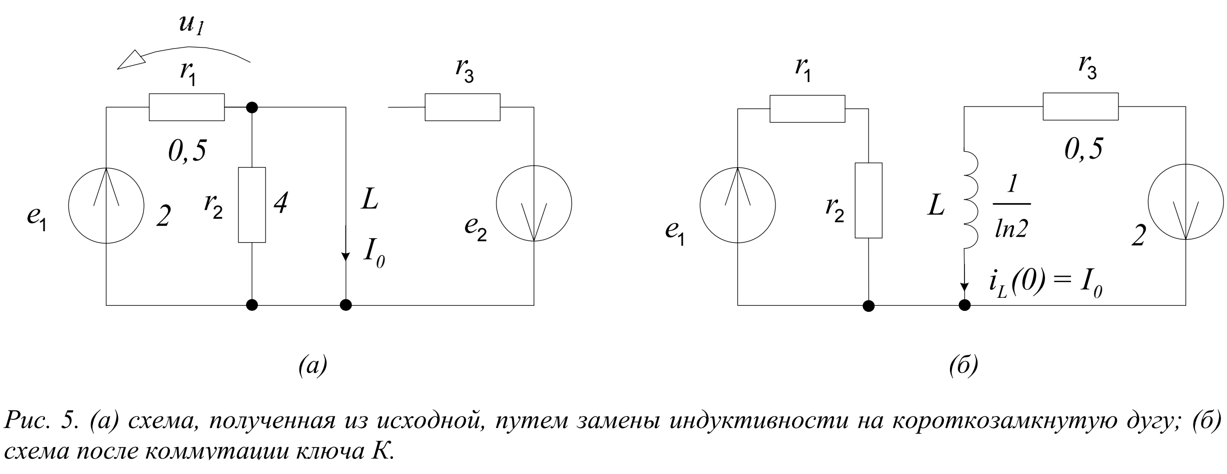


Рис. 5. (а) схема, полученная из исходной, путем замены индуктивности на короткозамкнутую дугу; (б) исходная схема после коммутации ключа К.

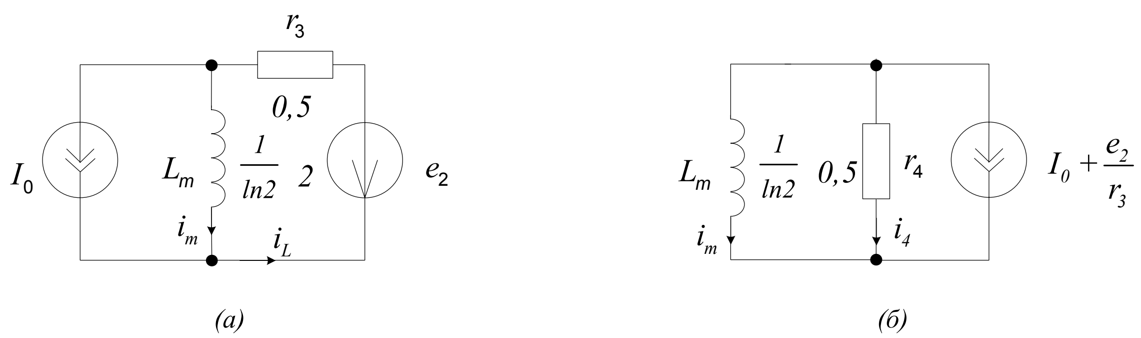


Рис. 6. (а) схема, полученная из схемы Рис. 5(б), заменой индуктивности ее схемной моделью; (б) схема, полученная из схемы Рис. 6(б), путем эквивалентного преобразования источников.

невозможно из физических соображений). Схема, соответствующая начальному моменту времени $t = 0$, приведена на Рис 5(б).

Далее последует переходный процесс за счет энергии магнитного поля индуктивности и энергии источника напряжения e_2. Исходя из этого, индуктивность заменим схемной моделью, учитывающей ненулевые начальные условия (ненулевой начальный запас энергии в магнитном поле), как показано на Рис. 6(а), где L_m – индуктивность схемной модели, значение которой равно значению исходной индуктивности $L = 1/\ln 2$ Гн, а начальное значение тока $i_m(0)$ находится по первому закону Кирхгофа с учетом (2):

$$i_m(0) = i_L(0) - I_0 = 0\,. \tag{3}$$

Преобразуем реальный источник напряжения в реальный источник тока. В результате идеальный источник последнего с током e_2/r_3 окажется соединенным параллельно с идеальным источником тока I_0. Объединив идеальные источники тока, получим схему, приведенную на Рис. 6(б), для которой можно по первому закону Кирхгофа записать следующее уравнение:

$$i_m + i_4 + I_0 + \frac{e_2}{r_3} = 0\,. \tag{4}$$

Выразив в (4) ток i_4 через напряжение u_L, которое, в свою очередь, можно выразить через ток i_m согласно (1), получим следующее дифференциальное уравнение:

$$i_m + \frac{L_m}{r_3}\frac{di_m}{dt} = -(I_0 + \frac{e_2}{r_3});\; i_m(0) = 0\,. \tag{5}$$

Это неоднородное дифференциальное уравнение первого порядка с постоянной правой частью легко решается классическим или операторным методом. Его решение имеет следующий вид:

$$i_m(t) = -(I_0 + \frac{e_2}{r_3})(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})\,, \tag{6}$$

где

$$\tau = \frac{L_m}{r_3} = \frac{2}{ln2}\ c \tag{7}$$

является постоянной времени переходного процесса (постоянной времени схемы).

Из (3), записанного для любого момента времени, получим ток исходной индуктивности:

$$i_L(t) = I_0 + i_m(t) = I_0 - (I_0 + \frac{e_2}{r_3})(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) = -\frac{e_2}{r_3} + (I_0 + \frac{e_2}{r_3})e^{-\frac{t}{\tau}}\,. \tag{8}$$

Из (8) следует, что $i_L(\infty) = -4\ A$, следовательно, в переходном процессе ток через индуктивность изменяется от 4 А в начальный момент времени до -4 А по окончании переходного процесса, пересекая ось времени в некоторый момент времени t_1, который можно найти, приравняв (8) к нулю:

$$-\frac{e_2}{r_3}+(I_0+\frac{e_2}{r_3})e^{-\frac{t_1}{\tau}}=0;$$
$$t_1=-\tau ln\frac{1}{2}=\frac{L}{r_3}ln2=2\,c. \qquad (9)$$

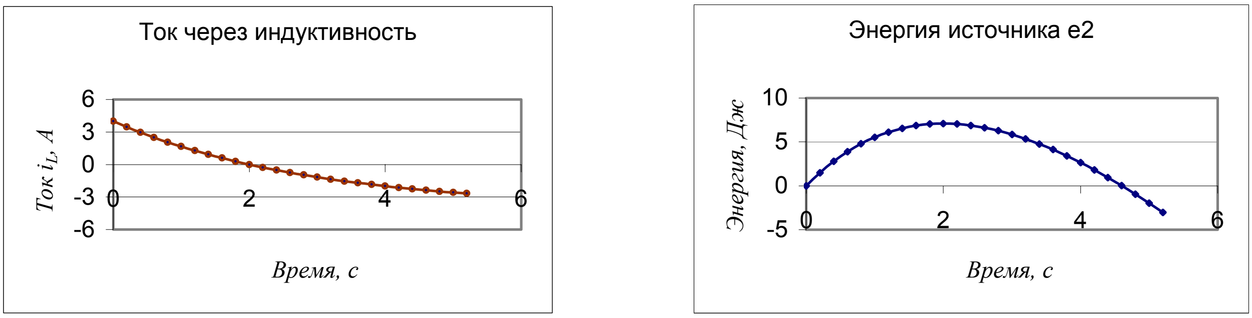
График функции $i_L(t)$ приведен на Рис. 7(а). На интервале от 0 до 2 с ток i_L протекает через источник напряжения e_2 в направлении от положительного полюса к отрицательному. Следовательно, на этом интервале энергия магнитного поля индуктивности передается источнику. Величина искомой энергии равна интегралу от мощности источника:

$$W=\int_0^{t_1} i_L(t)e_2dt=e_2\int_0^{t_1}\left(-\frac{e_2}{r_3}+(I_0+\frac{e_2}{r_3})e^{-\frac{t}{\tau}}\right)dt=-\frac{e_2^2}{r_3}t_1-e_2\tau(I_0+\frac{e_2}{r_3})\,e^{-\frac{t}{\tau}}\Big|_0^2=16(\frac{1}{ln2}-1)\cong 7\ Дж. \qquad (10)$$

Функцию $w(t)$, характеризующую динамику изменения энергии источника, можно найти, интегрируя мощность как в (10), но с переменным верхним пределом t:

$$w(t)=\int_0^{t} i_L(x)e_2dx=e_2\int_0^{t}\left(-\frac{e_2}{r_3}+(I_0+\frac{e_2}{r_3})e^{-\frac{x}{\tau}}\right)dx=-\frac{e_2^2}{r_3}t-e_2\tau(I_0+\frac{e_2}{r_3})(e^{-\frac{t}{\tau}}-1).$$

Ее график приведен на Рис. 7(б). От начала переходного процесса и до момента времени $t_1=2c$ функция $w(t)$ увеличивается, что указывает на накопление электрической энергии источником. Далее энергия источником отдается и расходуется на нагревание сопротивления и накопление энергии в магнитном поле индуктивности. При этом ток индуктивности увеличивается, протекая в направлении, противоположном первоначальному. Следовательно, направление силовых линий магнитного поля изменилось на противоположное в момент $t_1=2c$.



(а) (б)

Рис. 7. (а) зависимость тока через индуктивность от времени; (б) динамика изменения энергии w(t) источника напряжения e_2.